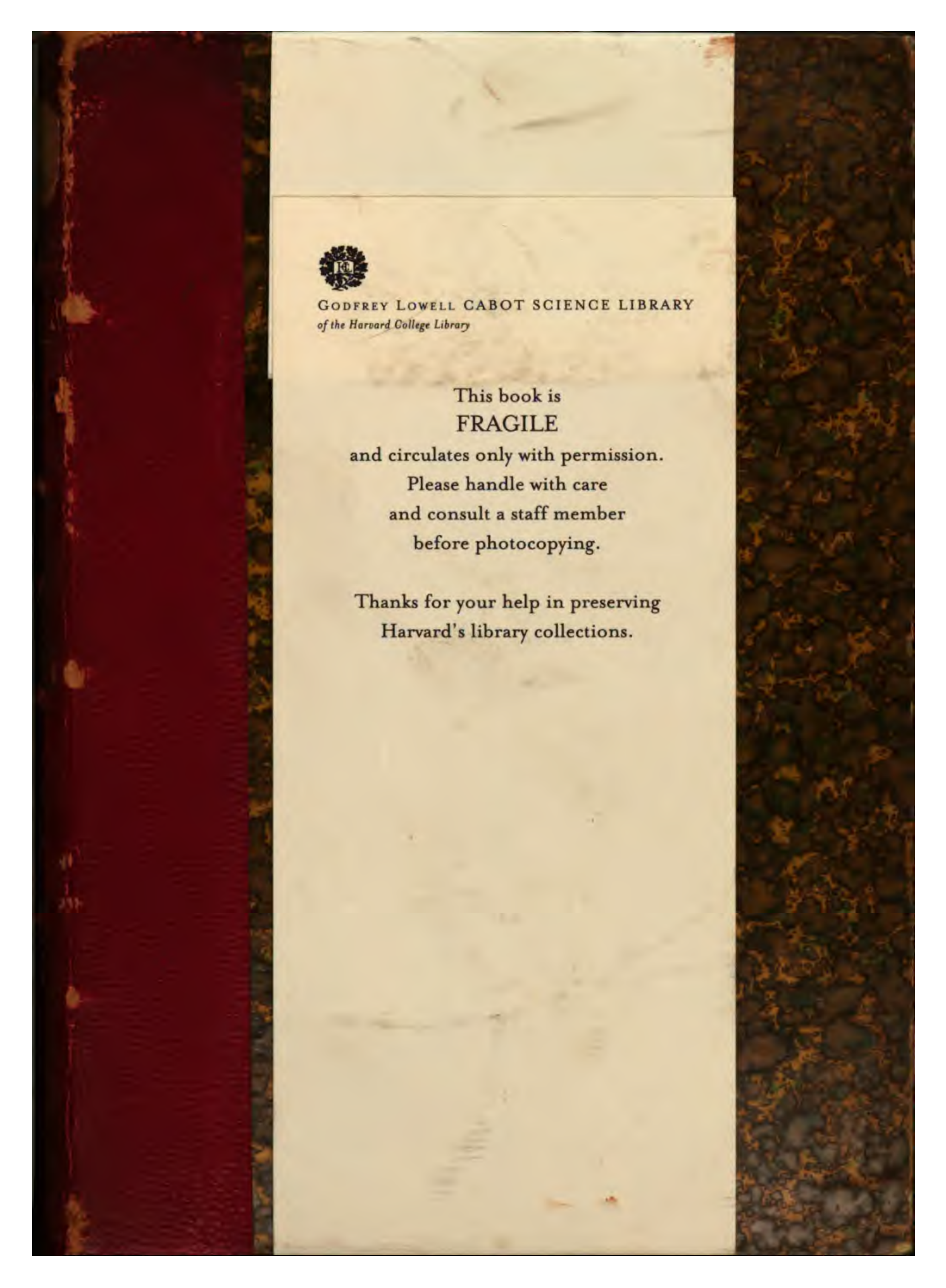
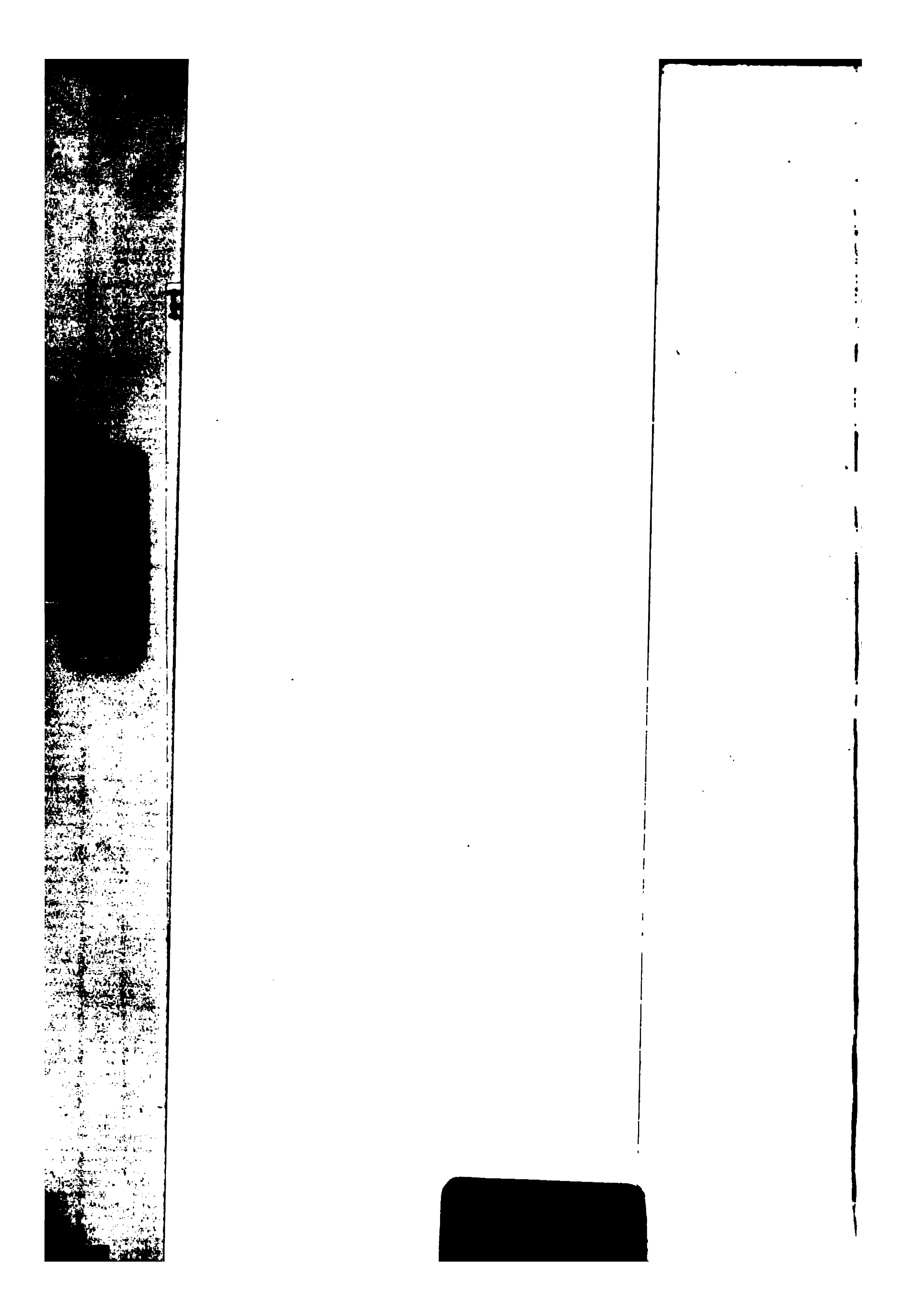

GODFREY LOWELL CABOT SCIENCE LIBRARY
of the Harvard College Library
This book is
FRAGILE
and circulates only with permission.
Please handle with care
and consult a staff member
before photocopying.
Thanks for your help in preserving
Harvard's library collections.





# Lehrbuch

der

# Vermessungskunde

## (Geodäsie).

**Mit einer Sammlung von 153 gelösten Aufgaben und angewandten Beispielen zahlreichen Erklärungen und 481 in den Text gedruckten Figuren.**

Unter Berücksichtigung des Selbstunterrichts

für Geometer-Eleven, Studierende des Bau-, Berg- und Ingenieur-Fachs

sowie zum praktischen Gebrauch

für

**Feldmesser, Kulturtechniker, Katasterbeamte etc.**

Von

Václav

Dr. **W. Láska.**

**Stuttgart.**

Verlag von Julius Maier.

1894.

Druck der Stuttgarter Vereins-Buchdruckerei.

# Vorwort.

Das vorliegende Werk schliesst sich, seiner äusseren und inneren Form nach, den bereits erschienenen Bänden der Kleyerschen Encyklopädie der gesamten mathematischen, technischen und exakten Natur-Wissenschaften an. Die äussere Form gibt sich darin kund, dass es in Fragen und Antworten verfasst ist, die innere dagegen, dass es mehr eine Sammlung von Aufgaben als ein Lehrbuch im gewöhnlichen Sinne des Wortes ist. Das Streben des Verfassers ging dahin, alles für die Feldmesser-Praxis Notwendige dem Leser zu bieten und dabei die Theorie zwar vollständig, jedoch mit Ausschluss alles Nebensächlichen zu entwickeln. Die Figuren wurden entweder den Preisverzeichnissen guter Firmen entnommen oder nach Skizzen des Verfassers gezeichnet. Bei den letzteren wurde die möglichste Einfachheit angestrebt. Die Polygonometrie, ferner die Ausgleichs- und Fehler-Rechnung wurden mit Rücksicht auf die neueren gesetzlichen Verordnungen ausführlicher behandelt, als es sonst in den Lehrbüchern der Fall ist.

**Prag,** September 1894.

Dr. W. Láska.

# Inhaltsverzeichnis.

## Erster Teil.

## Zweiter Teil.

# Verzeichnis

derjenigen hilfswissenschaftlichen Bücher zur Geodäsie, auf welche in vorliegendem Werke zum Spezialstudium verwiesen wurde.

---

**Lehrbuch der Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate.** Mit 52 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben, 29 Erkl. und 17 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet von **Dr. K. J. Bobek.** Preis: *M.* 5.—.

**Lehrbuch der ebenen Trigonometrie.** Eine Sammlung von 1049 gelösten, oder mit Andeutungen versehenen, trigonometrischen Aufgaben und 178 ungelösten, oder mit Andeutungen versehenen, trigonometrischen Aufgaben aus der angewandten Mathematik. Mit 797 Erklärungen, 563 in den Text gedruckten Figuren und 65 Anmerkungen nebst einem **ausführlichen Formelverzeichnis von über 500 Formeln.** Von **Ad. Kleyer.** Preis: *M.* 18.—.

**Lehrbuch der sphärischen Trigonometrie.** Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Mit 236 Erklärungen und 56 in den Text gedruckten Figuren und einem **Formelverzeichnis.** Bearbeitet von **Dr. W. Láska.** Preis: *M.* 4.50.

**Lehrbuch der Goniometrie (Winkelmessungslehre)** mit 307 Erklärungen und 52 in den Text gedruckten Figuren nebst einer Sammlung von 513 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit einem **Formelverzeichnis.** Von **Ad. Kleyer.** Preis: *M.* 7.—.

**Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie** (Planimetrie). Erster Teil. **Die gerade Linie, der Strahl, die Strecke, die Ebene und die Kreislinie im allgemeinen.** Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Mit 234 Erklärungen und 109 in den Text gedruckten Figuren. Von **Ad. Kleyer.** Preis: *M.* 1.80.

**do. do.** Zweiter Teil. **Der Winkel und die parallelen Linien.** Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Mit 201 Erklärungen und 113 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet von **Dr. J. Sachs.** Preis: *M.* 2.20.

**do. do.** Dritter Teil. **Die geometrischen Gebilde und ihre Lagen-Veränderungen. Die einfachen Vielecke.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 737 Erklärungen und 343 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet von **Dr. J. Sachs.** Preis: *M.* 6.—.

**do. do.** Vierter Teil. **Die Lehre vom Kreis. Die geometrischen Oerter und die merkwürdigen Punkte des Dreiecks.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 529 Erklärungen und 230 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet von **Prof. Dr. J. Sachs.** Preis: *M.* 6.—.

**do. do.** Fünfter Teil. **Die Flächen der geradlinigen Figuren.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 346 Erklärungen und 96 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet von **Prof. Dr. J. Sachs.** Preis: *M.* 4.—.

**do. do.** Sechster Teil. **Proportionalität der Strecken.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 378 Erklärungen und 90 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet von **Prof. Dr. J. Sachs.** Preis: *M.* 4.—.

**do. do.** Siebenter Teil. **Die Aehnlichkeit der geradlinigen Figuren.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 394 Erklärungen und 76 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet von **Prof. Dr. J. Sachs.** Preis: *M.* 4.—.

**do. do.** Achter Teil. **Die Anwendung der Aehnlichkeit auf die Lehre vom Kreis.** Bearbeitet von **Prof. Dr. J. Sachs.** — Befindet sich unter der Presse. —

**Lehrbuch der analytischen Geometrie der Ebene.** Erster Teil. Analytische Geometrie des Punktes und der Geraden. Mit einer Sammlung von 100 Aufgaben, 206 gelösten Uebungsaufgaben und 92 in den Text gedruckten Figuren. Für das Selbststudium und zum Gebrauch an Lehranstalten bearbeitet von Prof. Heinr. Cranz. Preis: ℳ. 6. —.

**do. do.** Zweiter Teil. Analytische Geometrie der einzelnen Linien zweiten Grades. Mit einer Sammlung von 116 Aufgaben, 286 gelösten Uebungsaufgaben und 200 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet von Prof. Heinr. Cranz. Preis: ℳ. 8. —.

**Lehrbuch der Differentialrechnung.** Erster Teil. Die einfache und wiederholte Differentiation explizieter Funktionen von einer unabhängigen Variablen. Ohne Anwendung der Grenzen- und der Nullen-Theorie und ohne Vernachlässigung von Grössen. Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Zweite Auflage. Von Ad. Kleyer. Preis: ℳ. 5. —.

**do. do.** Zweiter Teil. Die vollständige Differentiation entwickelter und nicht entwickelter Funktionen von einer und von mehreren reellen Veränderlichen. Reihenentwicklungen, unbestimmte Formen, Maxima und Minima. Nebst 352 gelösten Aufgaben, 78 Figuren und 230 Erklärungen. Bearbeitet von Prof. Dr. Haas. Preis: ℳ. 8. —.

**do. do.** Dritter Teil. Anwendung der Differentialrechnung auf die ebenen Kurven. Nebst 425 gelösten Aufgaben, 164 Figuren und 138 Erklärungen. Bearbeitet von Prof. Dr. Haas. Preis: ℳ. 7. —.

**Lehrbuch der Integralrechnung.** Erster Teil. Mit einer Sammlung von 592 gelösten Aufgaben. Für das Selbststudium, zum Gebrauch an Lehranstalten, sowie zum Nachschlagen von Integrationsformeln und -Regeln. Bearbeitet nach eigenem System und im Anschluss an das Lehrbuch der Differentialrechnung. Von Ad. Kleyer. Preis: ℳ. 10. —.

**Lehrbuch der Gleichungen des 1. Grades mit einer Unbekannten.** Sammlung von 2381 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grösstenteils in vollständig gelöster Form, erläutert durch 230 Erklärungen und 26 in den Text gedruckte Figuren. Von Ad. Kleyer. Preis: ℳ. 8. —.

**Lehrbuch der Gleichungen des 1. Grades mit mehreren Unbekannten.** Sammlung von 905 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grossenteils in vollständig gelöster Form, erläutert durch 403 Erklärungen und Anmerkungen. Nebst Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet von Otto Prange. Preis: ℳ. 7. —.

**Lehrbuch der Gleichungen des 2. Grades mit einer Unbekannten** (Quadrat. Gleichungen). Sammlung von 1650 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grossenteils in vollständig gelöster Form, erläutert durch 872 Erklärungen und 53 Figuren. Nebst Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet von Dr. Aug. Blind. Preis: ℳ. 10. —.

**Lehrbuch der Gleichungen 3. und 4. Grades,** nebst der trigonometrischen Auflösung der Gleichungen 2. Grades. Sammlung von 253 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grossenteils in vollständig gelöster Form. Mit 251 Erklärungen und 10 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet von Prof. Conrad Metger. Preis: ℳ. 6. —.

**Lehrbuch der unbestimmten Gleichungen des 1. Grades.** (Diophantische Gleichungen.) Sammlung von 374 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben in vollständig gelöster Form und zahlreichen Erklärungen und Erläuterungen. Nebt den Abhandlungen des Bachez de Méziriac, im französischen Originale mit beigefügter deutscher Uebersetzung. Bearbeitet von W. Fr. Schüler. Erstes Buch. Preis: ℳ. 4. 50.

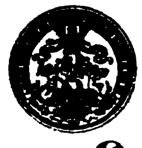
**Lehrbuch der Determinanten und deren Anwendungen.** Erster Teil. Mit einer Sammlung von 460 gelösten und ungelösten Aufgaben, mit den Ergebnissen der letzteren, nebst 226 Erklärungen. Bearbeitet von Dr. G. Weichold. Preis: ℳ. 10. —.

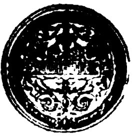
**Lehrbuch der Potenzen und Wurzeln** nebst einer Sammlung von 3296 gelösten und ungelösten analogen Beispielen. Von Ad. Kleyer. Preis: ℳ. 6. —.

**Lehrbuch des Magnetismus und des Erdmagnetismus** nebst einer Sammlung von gelösten und ungelösten Aufgaben, erläutert durch 189 in den Text gedruckte Figuren und 10 Karten. Von Ad. Kleyer. Preis: ℳ. 6. —.

**Lehrbuch der sphärischen und theoretischen Astronomie und der mathematischen Geographie.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Mit den Resultaten der ungelösten Aufgaben. Mit 328 Erklärungen, Formelverzeichnis, 148 in den Text gedruckten Figuren und 2 Tafeln. Für das Selbststudium und zum Gebrauch an Lehranstalten. Bearbeitet von Dr. W. Láska. Preis: ℳ. 6. —.

| 1273. Heft. | Preis des Heftes 25 Pf. | Vermessungskunde (Geodäsie). Seite 1—16. Mit 14 Figuren. |
|---|---|---|





# Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
**Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten**
erläutert durch
**viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,**
aus allen Zweigen
**der Rechenkunst,** der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — **aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen etc. etc.**
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
**zum einzig richtigen und erfolgreichen**
**Studium,** zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von


**Dr. Adolph Kleyer,**
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
**in Frankfurt a. M.**


unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

# Vermessungskunde
## (Geodäsie.)

Nach **System Kleyer** bearbeitet von **Dr. W. Láska.**

Seite 1—16. Mit 14 Figuren.

**Inhalt:**




**Stuttgart 1894.**
Verlag von Julius Maier.

**Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.**

# PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie,** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues,** des **konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form,** mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch **alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln,** Sätze etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen** in **allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. **Kleyer,** Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

**Stuttgart.** **Die Verlagshandlung.**

# Vermessungskunde.

## (Geodäsie.)

## I. Teil.

## I. Einleitung. Mass und Messen. Hilfsmittel zur Messung kleiner Grössen.

### 1. Ueber die Geodäsie überhaupt und ihre Einteilung.

**Frage 1.** Was versteht man unter Geodäsie?

**Erkl. 1.** Das Wort Geodäsie stammt vom griechischen gē die Erde, das Land, und daiein, teilen. Die Geodäsie wird auch praktische Geometrie oder Vermessungskunde genannt. Diese letztere Benennung ist jetzt sehr im Gebrauch.

**Erkl. 2.** In der Definition sind schon zwei Hauptprobleme der Geodäsie angedeutet: erstens die Messung und Berechnung und zweitens die Zeichnung, worauf hier besonders hingewiesen werden soll.

**Antwort.** Unter Geodäsie versteht man jene Wissenschaft, welche lehrt, wie die Gestalt und Grösse sowohl begrenzter Teile wie der ganzen Erdoberfläche, ferner die Lage einzelner Punkte derselben, durch Messung bestimmt und durch Zeichnung dargestellt werden kann.

---

**Frage 2.** Wie wird die Geodäsie eingeteilt?

**Erkl. 3.** Bei der nebenstehenden Definition ist nur auf die Messung Bedacht genommen. Was die Zeichnung anbetrifft, so mag bemerkt werden, dass die Zeichnung der niederen Geodäsie das Situationszeichnen und diejenige der höheren Geodäsie die Chorographie (vom griechischen choros, Land, und graphein, schreiben, abbilden) oder Kartographie genannt wird.

**Antwort.** Die beste Einteilung der Geodäsie dürfte jene sein, welche eine Feld-, Landes- und Erdmessung unterscheidet.

Man pflegt auch, obschon weniger treffend, die Geodäsie in die niedere und höhere einzuteilen, je nachdem die Erdkrümmung in Betracht kommt oder nicht. Demzufolge nennt man die Feldmesskunst niedere, die Land- und Erdmesskunst die höhere Geodäsie.

---

**Frage 3.** Wodurch ist die gegebene Einteilung charakterisiert?

**Erkl. 4.** In früherer Zeit nahm man fast allgemein für die Erdfläche ein Rotations-

**Antwort.** Die soeben mitgeteilte Einteilung wird auf folgende Weise eingehender charakterisiert:

ellipsoid (d. h. einen durch die Umdrehung der Ellipse um ihre kleine Achse entstandenen Körper) an. Allein schon Gauss hatte eine andere Auffassung angeregt. Gauss sagt: Was wir im geometrischen Sinne Oberfläche der Erde nennen, ist nichts anderes als diejenige Fläche, welche überall die Richtung der Schwere senkrecht schneidet und von der die Oberfläche des Weltmeeres einen Teil ausmacht. Die Richtung der Schwere an jedem Punkte wird aber durch die Gestalt des festen Teiles der Erde und seine ungleiche Dichtigkeit bestimmt. Bei dieser Lage der Sache hindert aber noch nichts, die Erde im Ganzen als ein elliptisches Rotationssphäroid zu betrachten, von dem die wirkliche, also geometrische Oberfläche bald in stärkeren, bald in schwächeren Undulationen abweicht. Aehnlich erklärt Bessel die bei den astronomisch geodätischen Arbeiten in Betracht kommende Figur der Erde als diejenige Oberfläche, in welcher sich die Oberfläche des Wassers eines mit dem Meere zusammenhängenden, die Erde bedeckenden Netzes von Kanälen befinden würde. Diese eigentümliche, von Gauss so treffend dargestellte Figur der Erde führt den Namen des Geoids.

I. Die Feldmessung (ebene Geodäsie), anwendbar auf Flächen von circa 1 Quadratmeile = 55 Quadratkilometer Ausdehnung. Die Grundebene der Messung ist eine berührende Ebene der Erdoberfläche, also die vertikale Richtung überall rechtwinklig zu dieser Ebene.

II. Die Landvermessung (sphärische Geodäsie, von sphaira, die Kugel), anwendbar auf Flächen von circa 500 □ Meilen Ausdehnung. Die Basis der Messung ist eine osculierende Kugel der Erdoberfläche, so dass die vertikale Richtung nach dem Mittelpunkt dieser Kugel gerichtet ist.

III. Die Erdmessung (sphäroidische Geodäsie, d. h. kugelähnliche), welche die ganze Erde umfasst und als deren Basis ein sich der geometrischen Erdoberfläche genügend anschliessendes Ellipsoid anzusehen ist.

---

**Frage 4.** Welche sind die vorzüglichsten Hilfswissenschaften der Geodäsie?

**Antwort.** Als die vorzüglichsten Hilfswissenschaften der Geodäsie muss die Ausgleichsrechnung und die Lehre von den geodätischen Instrumenten, sowie endlich die Kartographie genannt werden.

**Erkl. 5.** Unter Ausgleichsrechnung versteht man jene Wissenschaft, welche lehrt, wie man aus den Messungen ein von Messungsfehlern möglichst freies Resultat, sowie ein Mass für dessen Genauigkeit abzuleiten hat.

**Erkl. 6.** Unter der Lehre von den geodätischen Instrumenten versteht man jene Wissenschaft, die sich mit der Zusammensetzung und Anwendung der bei den Messungen vorkommenden Instrumente beschäftigt.

**Erkl. 7.** Unter der Kartographie versteht man die Lehre von der bildlichen Darstellung sei es der ganzen Erde oder einzelner Erdteile.

---

**Anmerkung 1.** Da wir im Folgenden von Messungen handeln, so ist es angezeigt, sich über die Messungen und die Masse zu verständigen.

---

## 2. Von der Messung.

**Frage 5.** Was heisst messen?

**Antwort.** Messen heisst das Bestimmen des Verhältnisses zweier gleichartigen Grössen.

**Erkl. 8.** Bei einer jeden Messung kommen also in Betracht: eine zu messende Grösse und die Masseinheit oder die gegebene Grösse,

mit welcher die erstere verglichen wird, und endlich das **Mass** oder die Zahl, welche den Inhalt der zu messenden Grösse in Masseinheiten angibt.

Vergleichen wir also zwei Grössen, um zu sehen, um wie viel oder wie vielmal die eine grösser oder kleiner ist als eine andere, so nennen wir diese Operation **eine Messung**.

---

**Frage 6.** Wie viele **Arten der Messung** gibt es?

**Antwort.** Es gibt zwei Arten der Messung. Eine **unmittelbare** oder **direkte**, und eine **mittelbare** oder **indirekte**.

---

**Frage 7.** Was versteht man unter einer **unmittelbaren Messung**?

**Antwort.** Unter einer **unmittelbaren** oder **direkten** Messung wird jene verstanden, bei welcher die zu messenden Objekte ohne alle Vermittlung gemessen werden können. So z. B. die Länge einer Linie mit Hilfe eines Massstabes.

---

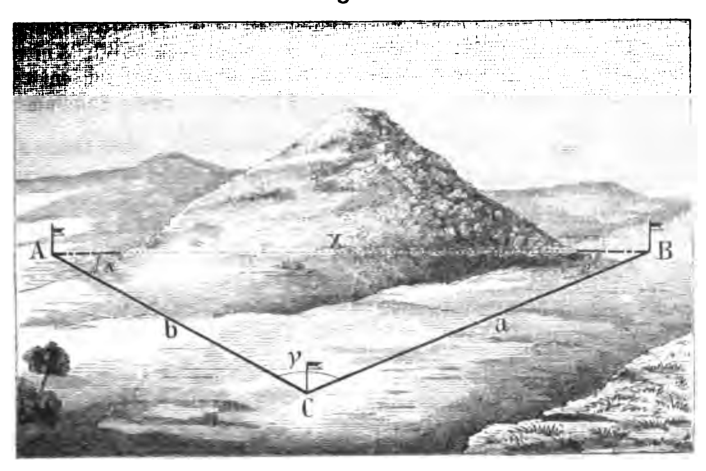
**Frage 8.** Was versteht man unter einer **mittelbaren Messung**?

**Antwort.** Werden die Grössen nicht unmittelbar miteinander verglichen, sondern ihr Verhältnis aus anderen gegebenen oder gemessenen Grössen abgeleitet, so spricht man von einer **indirekten Messung**.

Soll z. B. die Linie $AB$ (siehe Fig. 1) gemessen werden und ist die Messung wegen eines Hindernisses (Wald, Teich etc.) unausführbar, so kann man die Seiten $AC = b$ und $BC = a$ sowie den Winkel $ACB = \gamma$ messen und hieraus die Länge $AB = c$ nach dem Carnotschen Satze berechnen. Es wird:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos\gamma$$

Figur 1.




---

## 3. Aufgaben.

**Anmerkung 2.** Die in diesem Werke gegebenen Aufgaben haben im allgemeinen einen doppelten Zweck: einen didaktischen und einen praktischen. Manche Aufgaben, die nachstehend behandelt werden, sind, was die Art ihrer Ausführung anbelangt, nur theoretisch, sie werden in der Praxis nie verwendet, aber didaktisch sind sie sehr wertvoll, weil sie zeigen, wie man in allen Fällen diese Aufgaben bewältigen könnte.

Der Studierende wird an dieser Stelle noch weiter auf die beiden anerkannt vorzüglichen Werke:

**Kleyer,** Lehrbuch der Ebenen Trigonometrie,
**Kleyer,** Lehrbuch der Goniometrie (Winkelmessungslehre)

aufmerksam gemacht; dieselben enthalten eine Fülle vollständig gelöster und analoger ungelöster, aber mit Andeutungen zur Lösung versehener praktischer Aufgaben, sowie am Schlusse ein reichhaltiges Formelverzeichnis.

### a) Ueber unmittelbare Messung von Linien.

**Aufgabe 1.** Die Länge einer gezeichneten Linie ist zu bestimmen, und zwar soll die Länge möglichst genau bestimmt werden.

**I. Auflösung.** Um eine Strecke möglichst genau zu messen, lege man mit Hilfe eines Vergrösserungsglases den Massstab zuerst so, dass er mit dem einen Ende der Linie zusammenfällt. Das andere Ende wird abgelesen, indem man mit Hilfe des Vergrösserungsglases die Zehntel eines Millimeters schätzt.

Hierauf wird der Massstab um eine Strecke weiter geschoben, die Differenz der Ablesungen gibt einen neuen Wert für die Länge. Dieses Weiterschieben wird drei- bis viermal wiederholt.

Durch dieses Verfahren wird man unabhängig von den unregelmässigen Fehlern des Massstabes. Sollte der Massstab regelmässige Fehler besitzen, so wird dieses dadurch bemerkbar, dass man durch Weiterschieben des Massstabs fortschreitend entweder grössere oder kleinere Längen bekommt.

**Bemerkung.** Diese Lösung ist deswegen instruktiv, weil sie uns zwei in der Messkunst wichtige Prinzipe vorführt: Wiederholung der Messung unter verschiedenen Umständen und dann die Elimination von Teilungsfehlern des Messwerkzeugs. Bei den Winkelmessungen wird man ein ähnliches Verfahren kennen lernen.

**II. Auflösung.** Man trage auf eine scharf gezeichnete Gerade die gegebene Linie mehrmals nacheinander auf etwa $n$ mal und messe nun die Gesamtlänge $L$. Sei $l$ die wahre Länge, so wird:

$$l = \frac{L}{n}$$

Hat man sie z. B. 5mal aufgetragen und liest $L$ bis auf $\frac{1}{2}$ Millimeter ab, so wird der Fehler der Länge $l$ kleiner als $\frac{1}{10}$ Millimeter. Vergl. jedoch Erkl. 9.

**Erkl. 9.** Die nebenstehende Auflösung führt uns das geodätische Multiplikationsprinzip vor, welches wir auch bei den Winkelmessungen wiederfinden. Sei also $L_0$ die abgelesene Gesamtlänge und $L$ die wahre Länge, so wird:

$$l = \frac{L_0 + (L - L_0)}{n}$$

also:

$$l = \frac{L_0}{n} + \frac{L - L_0}{n}$$

Je grösser $n$, desto kleiner wird der letztere Bruch und desto genauer wird $l$ erhalten.

Man darf aber dieses richtige theoretische Prinzip nicht missverstehen. Würden wir z. B. die Strecke nicht 5- sondern 50mal auftragen, so wäre die theoretische Genauigkeit wohl $\frac{1}{100}$ Millimeter, in Wirklichkeit wird aber der Fehler in der Regel bedeutend grösser sein. Weil durch eine jede Multiplikation wieder neue Fehler eingeführt werden, indem dieselbe nicht theoretisch genau ausgeführt werden kann.

**Aufgabe 2.** Die Länge einer Strecke soll einzig und allein mit Hilfe einer 5 m langen ungeteilten Latte bis auf Centimeter genau gemessen werden.

**Auflösung.** Bezeichnen wir die Länge der Strecke mit $l$. Indem wir die Länge dieser Strecke mit der 5 m Latte messen, sehen wir, dass sich die Latte etwa $n$ mal anlegen lässt und dass sodann noch ein Rest $r$ übrig bleibt, dessen Länge kleiner als 5 m ist. Wir haben also für die Gesamtlänge:

$$l = 5n + r$$

Die Länge des Restes bezeichne man auf der Latte und messe nun die ganze Länge mit dieser Einheit. Sie wird sich $n'$ mal anlegen lassen und es erübrigt ein Rest $r'$, der kleiner als $r$ sein wird. Man hat also (vergl. Erkl. 10):

$$l = n'r + r'$$

So fahre man fort:

$$l = n \cdot 5 + r$$
$$l = n'r + r'$$
$$l = n''r' + r''$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Multipliziert man die 2, 3, 4 $\cdots$ Gleichung mit dem unbestimmten Faktor $\lambda\ \lambda'\ \lambda''\ \cdots$ und addiert, so folgt:

$$l(1 + \lambda + \lambda' + \cdots) = n \cdot 5 + (1 + \lambda n')r + (\lambda + n''\lambda')r' + \cdots$$

Setzt man, um $\lambda\ \lambda'\ \lambda''\ \cdots$ zu bestimmen:

$$1 + \lambda n' = 0$$
$$\lambda + \lambda' n'' = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

so wird:

$$l = \frac{n \cdot 5 + R\lambda\,(*)}{1 + \lambda + \lambda' + \cdots} \text{ in Metern}$$

$R$ bezeichnet den letzten Rest, im $\lambda$ (*) das letzte $\lambda$.

**Erkl. 10.** Es wird vielleicht nicht überflüssig sein, durch ein numerisches Beispiel das nebenstehende Verfahren zu beleuchten. Sei:

$$l = 27 \cdot 3 \text{ m}$$

wir finden durch Messung:

$$l = 5 \times \underset{n}{5} + \underset{r}{2 \cdot 3}$$

ferner:

$$l = \underset{r}{2 \cdot 3} \times \underset{n'}{11} + \underset{r'}{2 \cdot 0}$$

bleiben wir dabei stehen, so wird:

$$l(1 + \lambda) = 5 \times 5 + [1 + \lambda 11] \times 2 \cdot 3$$

Setzen wir:

$$1 + 11\lambda = 0$$

so wird:

$$\lambda = -\frac{1}{11}$$

also:

$$l = \frac{25}{1 - \frac{1}{11}} = \frac{11}{10} \times 25$$

durch Ausrechnung ergibt sich:

$$l = 27 \cdot 5$$

statt 25·3.

**Erkl. 10 a.** Es wird also

$$\lambda = -\frac{1}{n'}$$

$$\lambda' = -\frac{\lambda}{n''} = +\frac{1}{n'n''}$$

**Anmerkung 3.** Es wird warm empfohlen, nach den hier gegebenen drei Methoden das Verhältnis zweier auf Papier gezeichneter Strecken zu bestimmen. Dabei ist auf zweierlei zu achten, erstens auf die Genauigkeit, die man erhält, und zweitens auf die Zeit, die zu einer solchen Operation notwendig ist.

---

## b) Ueber mittelbares Messen der Strecken.

**Aufgabe 3.** Es ist die Entfernung zweier Punkte $A$ und $B$ (vergl. Fig. 2) zu bestimmen, wobei der Punkt $A$ unzugänglich ist.

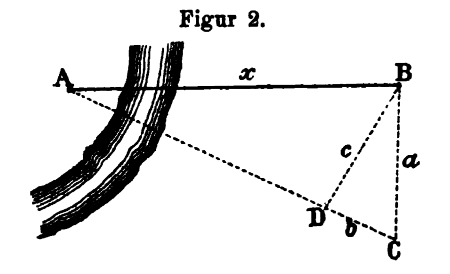
**Auflösung.** Man errichte (wie, ist vorderhand gleichgiltig und wird später gezeigt werden) in $B$ eine beliebig lange senkrechte $BC$ zu $AB$. Ferner wähle man auf der Geraden $AC$ den Punkt $D$ so, dass:

$$DB \perp AC$$

Setzt man sodann:

$$BD = c,\ BC = a,\ DC = b,\ AB = x$$

Figur 2.




so folgt aus dem ähnlichen Dreieck:

$$\triangle ABC \infty \triangle DCB$$

$$\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$$

also:

$$x = \frac{ab}{c}$$

**Aufgabe 4.** Es soll die Entfernung zweier Punkte $A$ und $B$ bestimmt werden, wenn beide unzugänglich sind und man nur über einen Apparat verfügt, der einen Winkel von $60^0$ und $90^0$ abzustecken erlaubt?

**Erkl. 11.** Ist in einem rechtwinkligen Dreieck ein Winkel $= 60^0$, so ist die ihm anliegende Kathete gleich der Hälfte der Hypothenuse. Denn dann ist das Dreieck die Hälfte eines gleichseitigen Dreiecks. Da danach:

$$2EC = AC$$
$$2CD = CB$$

so wird:

$$AB = 2(EC + CD) = 2ED$$

**Auflösung.** Man wähle sich (vergl. Fig. 3) einen beliebigen Punkt $C$ der Verbindungslinie $AB$ und lege eine Gerade $ED$ so durch diesen, dass:

$$\sphericalangle DCB = \sphericalangle ACE = 60^0$$

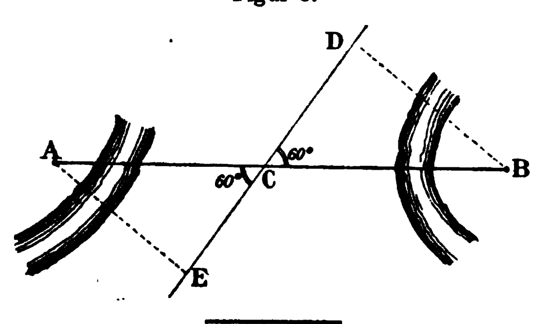
Sodann suche man die Punkte $D$ und $E$ so auf, dass:

$$DB \perp DE$$
$$AE \perp DE$$

Wird nun $DE$ gemessen, so ist (vergl. Erkl. 11):

$$AB = 2DE$$

Figur 3.




**Aufgabe 5.** Die Entfernung zweier Punkte, zwischen welchen ein Hindernis liegt und die nicht zugänglich sind, soll bestimmt werden; man besitzt nun Mittel zur Längenmessung und zum Abstecken eines Winkels von $90^0$.

**Auflösung.** Man wähle einen beliebigen Punkt $C$ und stecke ab zwei beliebige Gerade $FG$ und $DE$ (vergl. Fig. 4).

Sodann bestimme man die Punkte:

$L, K$ so, dass $KA$ und $LB \perp FG$

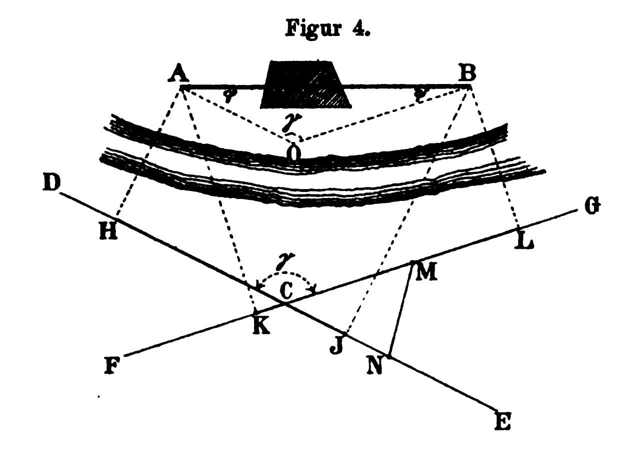
wird, und analog die Punkte:

$J, H$ so, dass $HA$ und $JB \perp DE$.

Zieht man noch zur Berechnung $AO \parallel DE$ und $OB \parallel FG$ und bezeichnet:

$$\sphericalangle BAO \text{ mit } \varphi$$
$$\sphericalangle ABO \text{ mit } \psi$$
$$\sphericalangle AOB \text{ mit } \gamma$$

Figur 4.




so hat man im $\triangle OAB$:

$$\text{I} \ldots \varphi + \psi + \gamma = 180^0$$

Nun ist weiter $HJ$ die Projektion von $AB$ auf $DE$, also wenn $AB = x$ und $HJ = a$ gesetzt wird:

$$\text{II} \ldots x \cos \varphi = a$$

Setzt man noch $KL = b$, so haben wir aus gleichem Grunde:

$$\text{III} \ldots x \cos \psi = b$$

Hiemit haben wir drei Gleichungen gewonnen für die drei unbekannten Grössen $x$, $\varphi$ und $\psi$ (vergl. Erkl. 12).

Dividiert man II durch III, so wird:

$$\frac{\cos \varphi}{\cos \psi} = \frac{a}{b}$$

also auch:

$$\frac{\cos(180^0 - \psi - \gamma)}{\cos \psi} = \frac{\cos(\psi + \gamma)}{\cos \psi} = \frac{\cos \psi \cos \gamma - \sin \psi \sin \gamma}{\cos \psi} = \frac{a}{b}$$

oder:

$$\cos \gamma - \operatorname{tg} \psi \sin \gamma = \frac{a}{b}$$

woraus leicht:

$$tg\, \psi = \frac{b \cos \gamma - a}{\sin \gamma}$$

folgt.

**Erkl. 12.** Den Winkel $\gamma = AOB$ bestimmt man, indem man ein beliebiges $\triangle CMN$ absteckt, seine Seiten $m$, $n$, $p$ misst und dann:

$$2s = m + n + p$$

setzt, so dass:

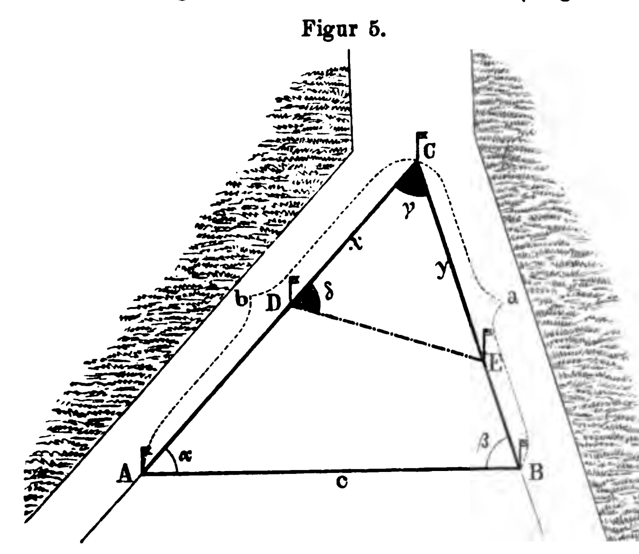
$$\sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-m)(s-n)}{mn}}$$

wird, wobei $m$ und $n$ die den Winkel $\gamma$ einschliessenden Seiten sind.

---

**Aufgabe 6.** Die Länge einer Geraden soll bestimmt werden, wenn zwischen den zugänglichen Endpunkten ein Hindernis liegt.

Figur 5.




**Auflösung.** Sei $AB$ die gesuchte Länge (vergleiche Figur 5) und $C$ ein beliebiger Punkt, der Visuren sowohl nach $A$ als auch nach $B$ gestattet.

Man messe $AC = a$, $CB = b$ und den Winkel $ACB = \gamma$, so wird:

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}$$

Besitzt man kein Winkelinstrument, dann stecke man auf $AC$ einen beliebigen Punkt $D$ und auf $CE$ einen beliebigen Punkt $E$ ab, messe:

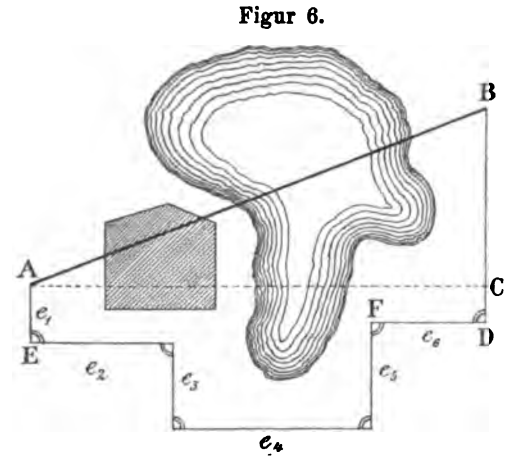
$$DC = x,\ CE = y,\ DE = p$$

so wird:

$$\cos \gamma = \frac{x^2 + y^2 - p^2}{2xy}$$

Damit hat man $\cos \gamma$ gegeben und kann nach der obigen Formel rechnen.

Figur 6.




**Erkl. 13.** Man rechne nie nach der Formel:

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$$

sondern schreibe:

$$AB = \sqrt{AC^2\left[1 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2\right]}$$

und setze:

$$1) \ldots \frac{BC}{AC} = \operatorname{tg}\varphi$$

so dass also:

$$AB = AC\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}$$

$$= AC\sqrt{1 + \frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}}$$

$$= AC\sqrt{\frac{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}}$$

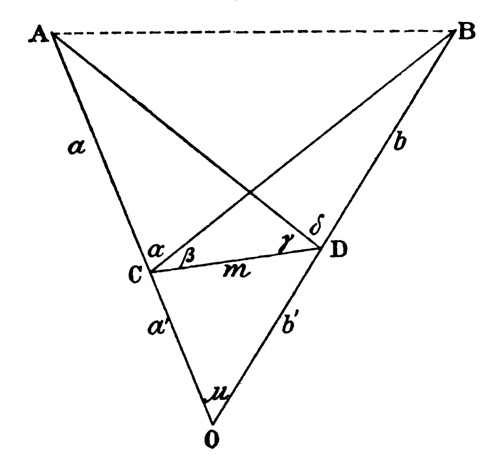
$$= AC\frac{1}{\sqrt{\cos^2\varphi}}$$

also:

$$2) \ldots AB = \frac{AC}{\cos\varphi}$$

Man verwende also immer die beiden Formeln 1) und 2).

Figur 7.




Man kann auch verfahren wie folgt (vergl. Figur 6). Von dem einen Endpunkte aus lege man einen Punkt $E$ in einer beliebigen Entfernung fest. Sodann gehe man im rechtwinkligen Zuge (die rechten Winkel sind mit [ ») ] bezeichnet) bis zu einem Punkte $F$. Auf der letzten Zugrichtung $FD$ suche man sich einen Punkt $D$ so auf, dass:

$$FD \perp DB$$

und messe die Länge $DB = l$.

Sodann ist im $\triangle ACB$

$$\text{I} \ldots AB = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2}$$

wobei der Punkt $C$ so bestimmt wird, dass:

$$\overline{DC} = e_1 + e_3 - e_5$$

es wird also:

$$\overline{BC} = l - DC = l - e_1 - e_3 + e_5$$

ferner haben wir:

$$\overline{AC} = e_2 + e_4 + e_6$$

Da damit die beiden Grössen $AC$ und $BC$ gegeben sind, so liefert auch die Formel I die gesuchte Grösse $AB$.

Sind beide Punkte unzugänglich, dann verfahre man wie folgt: Man stellt sich mit dem Theodolit an einen beliebigen Punkt $C$, der zugleich auf $A$ und $B$ Visuren gestattet und noch eine Visur auf einen ebenso beschaffenen Punkt $D$. Alsdann messe man:

$$\sphericalangle ACB = \alpha$$
$$\sphericalangle BCD = \beta$$

Dasselbe wird im Punkte $D$ gemacht und es werden gemessen die Winkel:

$$\sphericalangle CDA = \gamma$$
$$\sphericalangle ADB = \delta$$

sowie die Seite $CD = m$.

Setzt man ferner:

$$AC = a \quad CO = a'$$
$$BD = b \quad DO = b'$$

Wo $O$ den Schnittpunkt von $AC$ und $BD$ bezeichnet (vergl. Fig. 7), so hat man im $\triangle CDO$:

$$\sphericalangle AOB = 180^0 - [180^0 - (\alpha + \beta)] - [180^0 - (\gamma + \delta)]$$

also:

$$\text{I} \ldots \sphericalangle AOB = \mu = \alpha + \beta + \gamma + \delta - 180^0$$

Ferner ist in demselben Dreieck (vergl. Erkl. 14):

$$a' = m\frac{\sin(\gamma + \delta)}{\sin\mu}$$

$$b' = m\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\mu}$$

Weiter haben wir im $\triangle CDB$:

$$b = m\frac{\sin\beta}{\sin(\beta + \gamma + \delta)}$$

**Erkl. 14.** Nach dem Sinussatze ist im $\triangle COD$:

$$\frac{CO}{CD} = \frac{\sin \sphericalangle CDO}{\sin \sphericalangle COD}$$

nun ist:

$$\sphericalangle CDO = 180^0 - (\gamma + \delta)$$
$$\sin \sphericalangle CDO = \sin (\gamma + \delta)$$

weil allgemein:

$$\sin \varphi = \sin (180^0 - \varphi$$

also:

$$\frac{a'}{m} = \frac{\sin (\gamma + \delta)}{\sin \mu}$$

analog in den übrigen Dreiecken.

und im $\triangle CAD$:

$$a = m \frac{\sin \gamma}{\sin (\alpha + \beta + \gamma)}$$

damit ist:

$$AB = a + a'$$
$$OB = b + b'$$

und es ist:

$$AB = \sqrt{\overline{AO}^2 + \overline{OB}^2 - 2\,\overline{AO}\cdot\overline{OB} \cos \mu}$$

oder:

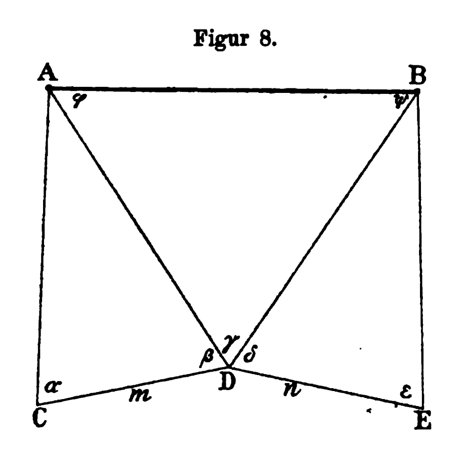
$$AB = \sqrt{(a + a')^2 + (b + b')^2 - 2 (a + a')(b + b') \cos \mu}$$

womit das Problem gelöst ist.

---

**Aufgabe 7.** Es soll die Entfernung zweier Türme $A$ und $B$ bestimmt werden. Man kann aber mit dem Theodolit sich nur an drei Punkten aufstellen. Von einem $C$ ist nur $A$, vom zweiten $D$ sind $A$ und $B$, vom dritten endlich $E$ nur $B$ sichtbar. Die Entfernungen der drei Punkte $CDE$ seien bekannt (vergleiche Figur 8).

Figur 8.




**Erkl. 15.** Es ist:

$$q = \frac{\sin(\gamma + \psi)}{\sin \psi} = \frac{\sin \gamma \cos \psi + \cos \gamma \sin \psi}{\sin \psi}$$
$$= \sin \gamma \cdot \frac{\cos \psi}{\sin \psi} + \cos \gamma$$

Da nun:

$$\frac{\cos \psi}{\sin \psi} = \operatorname{ctg} \psi$$

so folgt:

$$\sin \gamma \operatorname{ctg} \psi + \cos \gamma = q$$

oder:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{1}{\operatorname{ctg} \psi} = \frac{\sin \gamma}{q - \cos \gamma}$$

**Auflösung.** Man hat zunächst im $\triangle ABD$ (vergl. Figur 8):

$$\text{I} \ldots \varphi + \psi = 180 - \gamma$$

ferner ist:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{\sin \varphi}{\sin \psi}$$

Nun ist aber im

$$\triangle ADC \cdots AD = m : \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}$$
$$\triangle BDE \cdots BD = n : \frac{\sin(\delta + \varepsilon)}{\sin \varepsilon}$$

also:

$$\text{II} \ldots \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{m}{n} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \varepsilon} \, \frac{\sin(\delta + \varepsilon)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

Setzt man diesen Ausdruck gleich $q$, so folgt:

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = q$$

Nun ist aber:

$$\varphi = 180 - (\gamma + \psi)$$

also:

$$\sin \varphi = \sin (\gamma + \psi)$$

demnach (vergl. Erkl. 15):

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{\sin(\gamma + \psi)}{\sin \psi} = q$$

woraus:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\sin \gamma}{q - \cos \gamma}$$

folgt. Ist $\psi$ berechnet, dann wird:

$$AB = AD \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \psi}$$

womit die Aufgabe gelöst ist.

---

**Aufgabe 8.** Zur Bestimmung der Entfernung $AB$ (vergl. Fig. 9) wurden von den drei Standpunkten $CDE$ die Winkel:

$$ACB = \alpha$$
$$BCD = \beta$$
$$CDA = \gamma$$
$$ADE = \delta$$
$$DEB = \varepsilon$$

sowie die Seiten:

$$CD = m, \quad DE = n$$

gemessen. Es soll die Entfernung $AB$ bestimmt werden.

Figur 9.

**Auflösung.** Im $\triangle CDA$ haben wir nach dem Sinussatze:

$$CA = m \frac{\sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}$$

$$DA = m \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}$$

ferner haben wir im Vierecke $CDEB$ gegeben alle Winkel, denn:

$$\sphericalangle CBE = 360^0 - (\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)$$

und die Seiten $m = CD$ und $n = DE$.

Hieraus können $CB$ sowie $EB$ bestimmt werden. Ist dieses geschehen, so wird:

$$AB = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 - 2\overline{BC}\cdot\overline{AC}\cos\alpha}$$

Man kann aber auch aus dem Dreiecke $CDE$ die Seite $CE$ berechnen und die Winkel bei $C$ und $E$, sodann entsteht ein neues bekanntes Dreieck $CEB$, in welchem $CE$ und die anliegenden Winkel bekannt sind, so dass also $CB$ und $BE$ mittelst des Sinussatzes berechnet werden können.

Beide Wege sind gleich umständlich. Wir wollen den letzeren wählen.

Wir haben also im $\triangle CDE$ gegeben $CD = m$, $DE = n$ und $\sphericalangle CDE = \gamma + \delta$.

Setzen wir:

$$\sphericalangle ECD = \varphi$$
$$\sphericalangle DEC = \psi$$

so ist:

$$\varphi + \psi = 180^0 - (\gamma+\delta)$$

ferner nach dem Sinussatze:

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{n}{m}$$

also da: $\varphi = 180^0 - (\gamma+\delta) - \psi$

auch: $$\frac{\sin(\gamma+\delta+\psi)}{\sin\psi} = \frac{n}{m}$$

Entwickeln wir, so folgt:

$$\sin(\gamma+\delta)\operatorname{ctg}\psi = \frac{n}{m} - \cos(\gamma+\delta)$$

oder (vergl. Erkl. 16):

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{m\sin(\gamma+\delta)}{n - m\cos(\gamma+\delta)}$$

Ist $\psi$ berechnet, so folgt:

$$\varphi = 180^0 - (\gamma+\delta+\psi)$$

und ferner:

$$CE = m\frac{\sin(\gamma+\delta)}{\sin\psi}$$

Sodann ist im $\triangle CBE$:

$$CB = CE \cdot \frac{\sin(\varepsilon-\psi)}{\sin(\beta-\varphi)}$$

Endlich wird:

$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA\cdot CB\cos\alpha$$

wodurch die Entfernung berechnet ist.

**Erkl. 16.** Es ist:

$$\sin(\gamma+\delta+\psi) = \sin(\gamma+\delta)\cos\varphi + \cos(\gamma+\delta)\sin\psi$$

also:

$$\frac{\sin(\gamma+\delta+\psi)}{\sin\psi} = \sin(\gamma+\delta)\operatorname{ctg}\psi + \cos(\gamma+\delta)$$

weil:

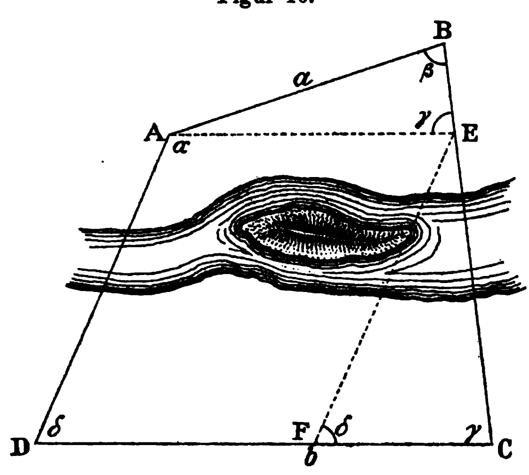
$$\frac{\cos\psi}{\sin\psi} = \operatorname{ctg}\psi$$

wir haben also:

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\psi} = \operatorname{ctg}\psi = \frac{n - m\cos(\gamma+\delta)}{m\sin(\gamma+\delta)}$$

**Aufgabe 9.** Die Entfernung zweier Punkte $C$ und $B$ soll bestimmt werden, sowie die Entfernung von $A$ und $D$, wenn im Vierecke $ABCD$ alle Winkel und die zwei Seiten $AB$ sowie $DC$ gemessen worden sind (vergl. Figur 10).

Figur 10.




**Bemerkung.** Man beachte in dieser Aufgabe die Art und Weise, wie die Auflösung des Vierecks bewerkstelligt wurde. Dadurch, dass man die beiden Parallelen $AE$ und $FE$ zieht, lassen sich alle Vierecksaufgaben lösen.

**Auflösung.** Sei $ABCD$ das so entstandene Viereck und (vergleiche Figur 10):

$$AB = a$$
$$DC = b$$

die gemessenen Seiten, sowie $\alpha\beta\gamma\delta$ die gemessenen Winkel.

Ziehen wir $AE \parallel DC$ und $EF \parallel AD$, so ist:

$$\sphericalangle AEB = \gamma$$
$$\sphericalangle EFC = \delta$$

und es wird:

$$BC = BE + EC$$

Nun ist aber im $\triangle AEB$:

$$BE = a\frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\gamma}$$

und im $\triangle FCE$:

$$FC = b - AE$$
$$= b - a\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

ferner:

$$EC = FC\cdot\frac{\sin\delta}{\sin(\gamma+\delta)}$$

also:

$$EC = \left(b - a\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)\frac{\sin\delta}{\sin(\gamma+\delta)}$$

Endlich wird:

$$BC = a\frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\gamma} + \left(b - a\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\right)\frac{\sin\delta}{\sin(\gamma+\delta)}$$

Endlich haben wir:

$$AD = FE = FC\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin(\gamma+\delta)}$$

also:

$$AD = \left(b - a\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)\frac{\sin\gamma}{\sin(\gamma+\delta)}$$

---

**Aufgabe 10.** Man habe nur drei in einer geraden Linie liegende Punkte $ABC$, deren Entfernungen $AB = m$, $BC = n$ sein mögen. Von einem vierten Punkte $D$ wurden die drei genannten anvisiert und so die Winkel:

$ADB$ und $BDC$

gemessen. Wie weit ist dieser Punkt von einem jeden der gegebenen entfernt?

**Auflösung.** Sei (vergl. Figur 11):

$$\sphericalangle ADB = \alpha$$
$$\sphericalangle BDC = \beta$$

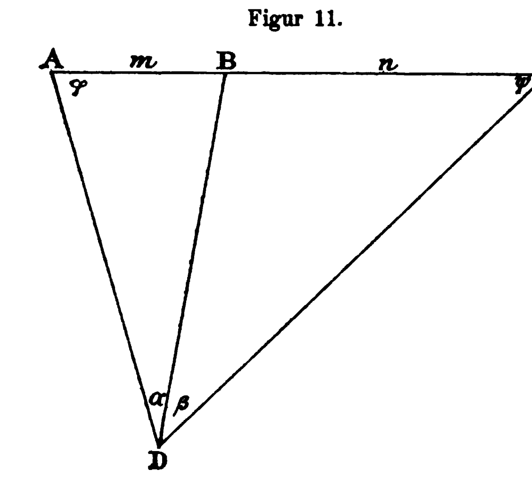
ferner:

$$\sphericalangle BAD = \varphi$$
$$\sphericalangle BCD = \psi$$

so hat man im $\triangle ABC$:

$$\text{I} \ldots \varphi + \psi = 180^0 - (\alpha + \beta)$$

Figur 11.




Ferner ist $\triangle ABD$:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{m}{BD} = \frac{\sin\alpha}{\sin\varphi}$$

und im $\triangle BCD$:

$$\frac{BC}{BD} = \frac{n}{BD} = \frac{\sin\beta}{\sin\psi}$$

Man hat also:

$$BD = n : \frac{\sin\beta}{\sin\psi} = m : \frac{\sin\alpha}{\sin\varphi}$$

so dass:

$$\text{II} \ldots \frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{n}{m}\,\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

Setzt man hierin:

$$\varphi = 180 - (\alpha + \beta + \psi)$$

so folgt (vergl. Erkl. 17):

$$\frac{\sin(\alpha + \beta + \psi)}{\sin\psi} = \frac{n}{m}\,\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

oder:

$$\sin(\alpha + \beta)\operatorname{ctg}\psi = \frac{n}{m}\,\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} - \cos(\alpha + \beta)$$

Aus dieser Gleichung berechnet sich leicht $\psi$. Dann ist:

$$\varphi = 180 - (\alpha + \beta + \psi)$$

und wir haben:

$$AD = m\,\frac{\sin(\varphi + \alpha)}{\sin\alpha}$$

$$BD = m\,\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha} = n\,\frac{\sin\psi}{\sin\beta}$$

$$DC = n\,\frac{\sin(\psi + \beta)}{\sin\beta}$$

womit die Entfernungen bestimmt sind.

**Erkl. 17.** Es ist:

$$\frac{\sin(\alpha + \beta + \psi)}{\sin\psi}$$

$$= \frac{\sin(\alpha + \beta)\cos\psi + \cos(\alpha + \beta)\sin\psi}{\sin\psi}$$

$$= \sin(\alpha + \beta)\frac{\cos\psi}{\sin\psi} + \cos(\alpha + \beta)$$

oder da:

$$\frac{\cos\psi}{\sin\psi} = \operatorname{ctg}\psi$$

auch:

$$= \sin(\alpha + \gamma)\operatorname{ctg}\psi + \cos(\alpha + \beta)$$

**Bemerkung.** Die nebenstehende Aufgabe ist ein spezieller Fall des sogenannten Pothenotschen Problems, welches wir später behandeln werden. Sie kann dazu benützt werden, um auf Grund einer Basis eine Aufnahme zu machen.

---

**Aufgabe 11.** Es seien die Punkte $ABC$ gegeben, wie in der vorhergehenden Aufgabe. Man hat von zwei Punkten $D$ und $E$ die Winkel:

$$\sphericalangle ADB = \alpha$$
$$\sphericalangle BDE = \beta$$
$$\sphericalangle DEB = \gamma$$
$$\sphericalangle BEC = \delta$$

gemessen. Welches sind die Entfernungen der Punkte $D$ und $E$ von den Basispunkten?

**Auflösung.** Es ist (vergl. Figur 12) im $\triangle DBE$:

$$\frac{DB}{EB} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$$

ferner ist im $\triangle ABD$:

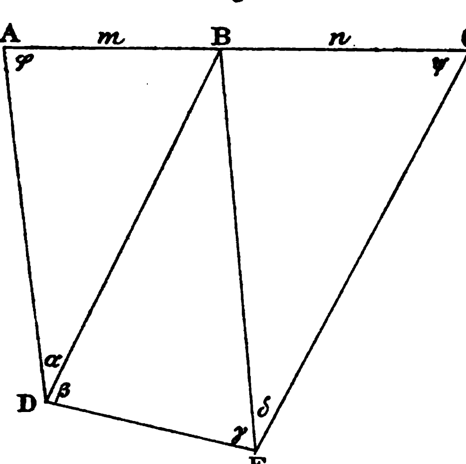
$$DB = m\,\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}$$

und im $\triangle BEC$:

$$EB = n\,\frac{\sin\psi}{\sin\delta}$$

wobei wie in der vorhergehenden Aufgabe

Figur 12.




die Winkel bei $A$ und $C$ mit $\varphi$ und $\psi$ bezeichnet werden.

Wir haben also:

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{m\sin\varphi}{\sin\alpha} : \frac{n\sin\psi}{\sin\delta}$$

oder:

$$\text{I} \ldots \frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{n\sin\alpha\sin\gamma}{m\sin\beta\sin\delta}$$

Dazu kommt noch:

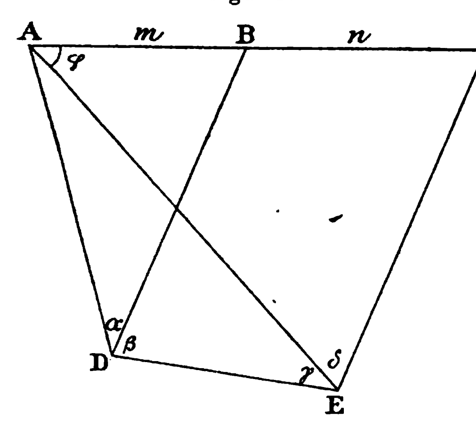
$$\text{II} \ldots \varphi + \psi = 360^0 - (\alpha + \beta + \gamma + \delta)$$

Die Auflösung erfolgt analog wie in der vorhergehenden Aufgabe.

---

**Aufgabe 12.** Es seien wieder die drei Punkte $ABC$ gegeben analog der vorhergehenden Aufgabe, aber statt des $\sphericalangle DEB = \gamma$ der $\sphericalangle DEA = \gamma$ und statt des $\sphericalangle BEC$ der $\sphericalangle AEC$. (Vergl. Figur 13.)

Figur 13.




**Erkl. 18.** Es ist:

$$\sphericalangle ABD = 180^0 - (\sphericalangle BAD + \alpha)$$

nun ist aber:

$$\sphericalangle BAD = \varphi + 180^0 - (\alpha + \beta + \gamma)$$

also wird:

$$\sphericalangle ABD = 180^0 - \alpha - \varphi - 180^0 + (\alpha + \beta + \gamma)$$
$$= \beta + \gamma - \varphi$$

**Auflösung.** Bezeichnen wir den $\sphericalangle CAE$ mit $\varphi$, so haben wir im $\triangle ACE$ (vergl. Figur 13):

$$\sphericalangle ACE = 180^0 - (\varphi + \delta)$$

also im Viereck $BCDE$:

$$\sphericalangle CBD = 360^0 - (\beta + \gamma + \delta + \sphericalangle ACE)$$

Nun ist im $\triangle ABD$ (vergl. Erkl. 18):

$$AD = m\,\frac{\sin(\beta + \gamma - \varphi)}{\sin\alpha}$$

ferner im $\triangle DEA$:

$$AE = AD \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\gamma}$$

also wird auch:

$$AE = m\,\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha\sin\gamma}\sin(\beta + \gamma - \varphi)$$

sein. Im $\triangle AEC$ ist aber

$$AE = (m + n)\frac{\sin(\varphi + \delta)}{\sin\delta}$$

Wir haben also durch Gleichsetzung der beiden Gleichungen, indem wir der Kürze wegen:

$$m\,\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha\sin\gamma} = p$$

$$(m + n)\frac{1}{\sin\delta} = q$$

setzen:

$$p\sin(\beta + \gamma - \varphi) = q\sin(\varphi + \delta)$$

Zerlegen wir nun die Sinuse (vergl. Erkl. 19), so folgt:

$$p\sin(\beta + \gamma)\cos\varphi - p\cos(\beta + \gamma)\sin\varphi = q\sin\varphi\cos\delta + q\cos\varphi\sin\delta$$

oder:

$$\sin\varphi\,[q\cos\delta + p\cos(\beta + \gamma)] = \cos\varphi\,[p\sin(\beta + \gamma) - q\sin\delta]$$

**Erkl. 19.** Es ist allgemein:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

**Erkl. 20.** Man beachte, dass

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

woraus (vergl. Erkl. 20):

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{p\sin(\beta+\gamma) - q\sin\delta}{q\cos\delta + p\cos(\beta+\gamma)}$$

folgt. Hiemit ist $\varphi$ gegeben und es lassen sich nach den bereits mitgeteilten Formeln alle Entfernungen berechnen.

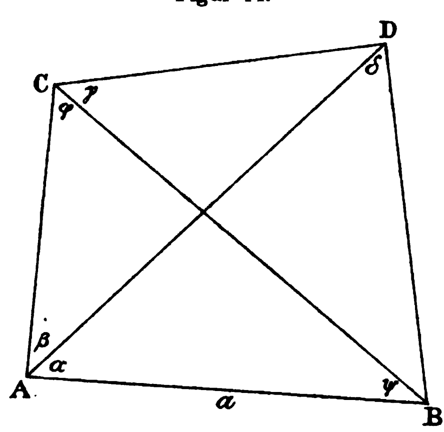
---

**Aufgabe 13.** Seien $A$ und $B$ zwei gegebene Punkte in der Entfernung $a$. Es soll die Entfernung zweier anderen Punkte $C$, $D$ bestimmt werden, wenn gemessen wurden:

$$\sphericalangle CAD = \beta$$
$$\sphericalangle DAB = \alpha$$
$$\sphericalangle ADB = \delta$$
$$\sphericalangle BCD = \gamma$$

(vergl. Figur 14).

Figur 14.




**Erkl. 21.** Es ist im $\triangle ABC$:

$$\sphericalangle \alpha + \beta + \psi + \varphi = 180^0$$

also:

$$\psi = 180 - \alpha - \beta - \varphi$$

**Erkl. 22.** Es ist allgemein:

$$\sin m \sin n = \frac{1}{2}[\cos(m-n) - \cos(m+n)]$$

setzt man:

$$m = \varphi$$
$$n = A + \varphi$$

so wird:

$$m - n = \varphi - A - \varphi = -A$$
$$m + n = \varphi + A + \varphi = A + 2\varphi$$

Da aber allgemein:

$$\cos(-m) = \cos m$$

so folgt:

$$\cos(-A) = \cos A$$

**Auflösung.** Setzt man (vergl. Fig. 14):

$$\sphericalangle BCA = \varphi$$
$$\sphericalangle CBA = \psi$$

so ist im $\triangle ABC$:

$$1) \ldots \varphi + \psi = 180 - (\alpha + \beta)$$

Ferner hat man:

$$2) \ldots DB = a\frac{\sin\alpha}{\sin\delta}$$

also ist $BD$ gegeben. Im $\triangle ABC$ ist:

$$\frac{a}{CB} = \frac{\sin\varphi}{\sin(\alpha+\beta)}$$

und im $\triangle CDB$:

$$\frac{CB}{DB} = \frac{\sin(\alpha+\delta+\gamma-\psi)}{\sin\gamma}$$

also ist:

$$\frac{a}{DB} = \frac{\sin\varphi\sin(\alpha+\delta-\gamma+\psi)}{\sin\gamma\sin(\alpha+\beta)}$$

sinus ist aber aus 2:

$$\frac{a}{DB} = \frac{\sin\delta}{\sin\alpha}$$

also wird:

$$\frac{\sin\delta\sin\gamma\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha} = \sin\varphi\sin(\alpha+\delta-\gamma+\psi)$$

Weiter ist aber (vergl. Erkl. 21):

$$\alpha+\delta-\gamma+\psi = \alpha+\delta-\gamma+180-\alpha-\beta-\varphi$$

also:

$$\alpha+\delta-\gamma+\psi = -(A+\varphi)$$

wenn:

$$A = +\beta+\gamma+\delta-180$$

gesetzt wird. Setzt man noch:

$$\frac{\sin\delta\sin\gamma\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha} = B$$

so hat man die Gleichung:

$$-B = \sin\varphi\sin(A+\varphi)$$

Nun ist aber (vergl. Erkl. 22):

$$\sin\varphi\sin(A+\varphi) = \frac{1}{2}\cos A - \frac{1}{2}\cos(2\varphi+A)$$

also ist:

$$-2B = \cos A - \cos(2\varphi + A)$$

oder:

$$\cos(2\varphi + A) = \cos A + 2B$$

Ist $\varphi$ berechnet, dann ist im $\triangle CAD$:

$$CD = AD \cdot \frac{\sin \beta}{\sin(\varphi + \gamma)}$$

oder da im $\triangle ABD$:

$$AD = a \frac{\sin(\alpha + \delta)}{\sin \delta}$$

so ist auch:

$$CD = a \frac{\sin \beta}{\sin \delta} \cdot \frac{\sin(\alpha + \delta)}{\sin(\varphi + \gamma)}$$

Damit ist das Problem gelöst.

---

## 4. Von den Massen.

**Frage 9.** Was versteht man unter der Masseinheit?

**Antwort.** Unter Masseinheit versteht man eine willkürlich gewählte Grösse mit ihren Vielfachen und Unterabteilungen, vermittelst welcher andere ihr gleichartige Grössen miteinander verglichen werden (vergl. Erkl. 23).

**Erkl. 23.** In einem jeden Lande ist eine solche Grösse (gewöhnlich Längengrösse, denn die Winkelgrössen werden überall auf gleiche Weise gemessen) als gesetzliche, landesübliche Masseinheit eingeführt, von der bei der Landesbehörde ein mit aller möglichen Sorgfalt angefertigtes Original zur beständigen Kontrolle aufbewahrt wird.

---

**Frage 10.** Welche Masseinheiten kommen in der Geodäsie allein zur Verwendung?

**Antwort.** In der niederen Geodäsie kommt hauptsächlich nur die Masseinheit für Längengrössen und die Masseinheit für Winkelgrössen zur Verwendung.

---

### Uebersicht der verschiedenen Masseinheiten.

1) Das altfranzösische (Pariser) Mass. Als Einheit wird die Länge der „toise de Pérou" bei 13° Réaumur angenommen.

1 Toise = 6 pariser Fuss = 12·6 pariser Zoll = 12·12·6 pariser Linien.

Die „Toise de Pérou" ist ein im Jahre 1735 von dem französischen Mechaniker Langlois angefertigter Massstab von Eisen, dessen Entstehungsgeschichte die folgende ist: Als die älteren Gradmessungen von P. Picard einerseits und Cassini andererseits einander widersprechende Resultate über die Gestalt der Erde geliefert hatten, wurden auf Veranlassung der Akademie zwei neue Expeditionen ausgerüstet, um neue Gradmessungen vorzunehmen. Diese beiden Expeditionen, die von La Condamine und Bouguer, welche nach Peru, und die von Maupertius und Clairaut, welche nach Lappland ging, nahmen genau übereinstimmende Toisen zur Messung der Basis mit. Jene die nach Lappland ging, wurde verloren, die von Peru blieb erhalten und wurde zur Grundlage der Längenmasse gewählt. Vergl. Base du système métrique décimal .... par Méchain et Delambre III. Vol. Paris 1806—1810. (III. Vol. p. 405.)

Wir nehmen nicht Anstand, an dieser Stelle die Wandtafel des metrischen Systems von Prof. C. Bopp (Verlag von Friedr. Doerr in Stuttgart) auf das Wärmste als ein vorzügliches Anschauungsmittel zu empfehlen. Sie stellt übersichtlich das gesamte metrische System dar und ist sehr billig, so dass sie einen praktischen Wandschmuck für den Geometer abgibt.

2) Das neufranzösische System. Als Einheit gilt das Meter.

1 m = 0·513074074 Toise = 443·296 Pariser Linien.
1 m = 10 dm (Decimeter) = 100 cm (Centimeter) = 1000 mm (Millimeter).
1 km = 1000 m.

Zur Vergleichung mögen folgende Zahlen dienen, bei welchen die Zahlenangaben n der Klammer Logarithmen sind:

| | | |
|---|---|---|
| 1 Meter | = 443·296 Pariser Linien | (2·6466938) |
| 1 Meter | = 0·5130741 Toise | (9·7101801 — 10) |
| 1 Meter | = 3·0784444 Pariser Fuss | (0·4883313) |
| 1 Millimeter | = 0·0369413 Pariser Zoll | (8·5675126 — 10) |
| 1 Millimeter | = 0·443296 Pariser Linien | (9·6466938 — 10) |
| 1 Toise | = 1·9490366 Meter | (0·2898199) |
| 1 Pariser Fuss | = 0·3248394 Meter | (9·5116687 — 10) |
| 1 Pariser Zoll | = 0·0270699 Meter | (8·4324874 — 10) |
| 1 Pariser Linie | = 2·265829 Millimeter | (0·3533062) |

Das Grundmass der metrischen Messung ist ein aus Platina von Lenoir verfertigter Massstab, der bei 0° Celsius seine natürliche Länge hat. Die Bezeichnung erfolgte nach Van Swinden's Vorschlag, wonach Vielfache jeder Einheit durch griechische, die Teile derselben durch lateinische Zahlwörter benannt wurden, so z. B.:

$$\text{Milli-Gramm} = \frac{1}{1000} \text{ Gramm lateinisch,}$$

Kilo-Gramm = 1000 Gramm griechisch.

Das Meter sollte eigentlich als zehnmillionster Teil des Meridianquadranten der Erde definiert werden. Aus der französischen Gradmessung, welche sich von Dünkirchen bis Barcelona erstreckte, wurde die Länge dieses Quadranten zu 5 130 741 Toisen, also die Länge des Meters zu 443″ 296 Pariser Linien gefunden. Durch ein Dekret vom 19. Frimaire wurde Anno 8 (10. Dezember 1799) die Länge von 443″296 des altfranzösischen Masses als „mètre vrai et définitiv“ gesetzlich. Dass diese Länge keineswegs genau der zehnmillionste Teil eines mittleren Meridianquadranten ist, hat insbesondere Bessel bewiesen. Die Länge des Meridianquadranten ist nach diesem Forscher etwa gleich 10 000 856 Meter zu setzen.

Im deutschen Reiche ist das metrische Mass und zwar zunächst für den Norddeutschen Bund durch das Gesetz vom 17. August 1868 eingeführt, welches später auf die übrigen Staaten ausgedehnt wurde, jedoch mit einigen Abweichungen, die durch das Gesetz vom 11. Juli 1884 abgeschafft wurden.

In Oesterreich-Ungarn ist das metrische System mit dem Jahre 1876 gesetzlich eingeführt.

Eine übersichtliche Darstellung der Relationen zwischen den Abstufungen ist in den nachstehenden Tabellen enthalten:

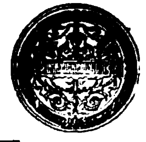
## Längenmasse.

| Kilometer | Hektometer | Dekameter | Meter | Decimeter | Centimeter | Millimeter |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 10 | 100 | 1000 | 10·000 | 100·000 | 1000·000 |
| | 1 | 10 | 100 | 1·000 | 10·000 | 100·000 |
| | | 1 | 10 | 100 | 1·000 | 10·000 |
| | | | 1 | 10 | 100 | 1·000 |
| | | | | 1 | 10 | 100 |
| | | | | | 1 | 10 |
| | | | | | | 1 |

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

1274. Heft. | Preis des Heftes 25 Pf. | Vermessungskunde (Geodäsie). Forts. v. Heft 1273. — Seite 17—32. Mit 8 Figuren.





# Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus **allen Zweigen** der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie**; des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's**; der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
**zum einzig richtigen und erfolgreichen**
**Studium**, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

**Dr. Adolph Kleyer,**
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

# Vermessungskunde

## (Geodäsie.)

Nach **System Kleyer** bearbeitet von **Dr. W. Láska.**

Fortsetzung von Heft 1273. — Seite 17—32. Mit 8 Figuren.

**Inhalt:**



**Stuttgart 1894.**
Verlag von Julius Maier.

 Das vollständige Inhaltsverzeichnis der bis jetzt erschienenen Hefte kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

## Flächenmasse.

| | Hektar | Ar | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Quadrat-Kilometer | Quadrat-Hektometer | Quadrat-Dekameter | Quadrat-Meter | Quadrat-Decimeter | Quadrat-Centimeter | Quadrat-Millimeter |
| 1 | 100 | 10 000 | 1 000 000 | ........ | .......... | ............ |
| | 1 | 100 | 10 000 | 1 000 000 | 100 000 000 | 10 000 000 000 |
| | | 1 | 100 | 10 000 | 1 000 000 | 100 000 000 |
| | | | 1 | 100 | 10 000 | 1 000 000 |
| | | | | 1 | 100 | 10 000 |
| | | | | | 1 | 100 |

Abkürzungen: In der Sitzung des Bundesrats vom 8. Oktober 1877 wurden nach dem Vorschlage einer Kommission von Sachverständigen die nachstehenden abgekürzten Zeichen festgestellt:

A. Längenmasse.

Das Kilometer . . . . . . . . . km
„ Meter . . . . . . . . . . m
„ Centimeter . . . . . . . . . cm
„ Millimeter . . . . . . . . . mm

B. Körperflächen.

Das Quadratkilometer . . . . . qkm
„ Hektar . . . . . . . . . . ha
„ Ar . . . . . . . . . . . a
„ Quadratmeter . . . . . . . . qm
„ Quadratcentimeter . . . . . qcm
„ Quadratmillimeter . . . . . qmm

## Schreibregeln.

1) Den als abgekürzte Mass- und Gewichtszeichen dienenden Buchstaben werden Schlusspunkte nicht beigefügt.

2) Die Buchstaben werden an das Ende der vollständigen Zahlenausdrücke, nicht also über das Decimalkomma gesetzt. Man schreibt also:

3,21 m nicht $3,^{m}21$ oder 3 m 21 cm.

3) Zur Trennung der Decimalstellen dient das Komma — nicht der Punkt. Also:

3,21 m nicht 3.21 m.

4) Sonst ist das Komma bei Mass- und Gewichtszahlen nicht anzuwenden, insbesondere nicht zur Abteilung mehrstelliger Zahlenausdrücke. Diese ist durch Anordnung der Zahlen in Gruppen von je drei Ziffern, vom Komma aus gerechnet, mit angemessenen Zwischenräumen zwischen den einzelnen Abteilungen zu bewirken.

Also:

3 657,21 m nicht 3.657,21 m

2 732 562,357 273 m nicht 2,732.562,357273 m.

5) Diese Regeln gelten nicht für die Logarithmen.

## Lautregeln.

Die deutsche Sprache verlangt als Regel, dass die Einheit, in welcher ein Mass oder ein Wert ausgedrückt wird, undekliniert, also im Nominativ des Singulars, hinter der entsprechenden Zahl folgt. So sagt man: „10 Fuss 5 Zoll“ (nicht Fusse und Zolle), „eine Fläche von 2¾ Hektar oder von 2 Hektar 75 Ar“ (nicht Hektaren und Aren), „etwa 50 Ar Wiesengrund“ (nicht Are), „Winkel unter 45 Grad“ (nicht Graden). Eine Ausnahme machen „Elle, Linie, Rute, Meile, Stunde“ (sämtlich weiblich). Schwankend ist der Gebrauch bei der blossen Angabe der Einheit, in oder nach welcher gemessen wird. In Wendungen, wie „bis auf Zehntelgrade genau“, „in Metern anzugeben“, „auf Are abgerundet“ ist der Nominativ der Einzahl minder gebräuchlich.

## Gesetzliche Genauigkeitsgrenzen.

Was die im öffentlichen Verkehre noch zu duldenden Abweichungen der Masse und Messwerkzeuge von der absoluten Richtigkeit anbetrifft, so bestimmt das deutsche Reichsgesetz vom 27. Juli 1885 folgendes:

### I. Längenmasse.

A. Fehlergrenze der Gesamtlänge.

Bei metallenen Massen von

| | | |
|---|---|---|
| 10 bis einschliesslich 7 m Länge | 6 mm | |
| 6 „ „ 4 „ „ | 4 „ | |
| 3 und 2 m Länge . . . . . | 2 „ | |
| 1 m Länge . . . . . . . . | 1 „ | |
| 0,5 m Länge . . . . . . . . | $\frac{1}{2}$ „ | giltig auch für Masse aus Elfenbein und hartem Holz. |
| 0,2 „ „ . . . . . . . . . | $\frac{1}{2}$ „ | |
| 0,1 „ „ . . . . . . . . . | $\frac{1}{2}$ „ | |

Bei Werkmassstäben aus Holz (Messlatten), sowie bei hölzernen Massstäben für Langwaren und bei zusammenlegbaren hölzernen Massen von

| | |
|---|---|
| 10 bis einschliesslich 7 m Länge . . . . | 12 mm |
| 6 „ „ 4 „ „ . . . . | 8 „ |
| 3 und 2 m Länge . . . . . . . . | 4 „ |
| 1 m Länge . . . . . . . . . . . | 2 „ |
| 0,5 m Länge . . . . . . . . . . | $1^1/_2$ mm |

Bei Bandmassen aus Stahl

| | |
|---|---|
| 25 bis 20 m Länge . . . . . . . . | 8 mm |
| 15 „ 10 „ „ . . . . . . . . | 6 „ |
| 9 bis einschliesslich 7 m Länge . . . . | 4 „ |
| 6 „ „ 4 „ „ . . . . | 3 „ |
| 3 und 2 m Länge . . . . . . . . | 2 „ |
| 1 m Länge . . . . . . . . . . . | $1^1/_2$ mm |

## Abstufung der aichamtlich gebrauchten Masse und Gewichte.

1) Deutsches Urmeter und Urkilogramm.

2) Unmittelbare Kopien der Urmasse. Diese können nur von der Normalaichungskommission bezogen werden.

3) Haupt-Normale werden von einzelnen Aufsichtsbehörden ausgegeben.

4) Kontroll-Normale werden von allen Aufsichtsbehörden ausgegeben und zwar sowohl an die Aichämter, als auch an Private. Der Maximalfehler eines solchen Kontroll-Normales ist $^1/_{20}$ des entsprechenden im öffentlichen Verkehr zulässigen Fehlers.

5) Gebrauchs-Normale sind hauptsächlich für den Gebrauch der Aichämter bestimmt. Der Maximalfehler beträgt $^1/_5$ des entsprechenden im öffentlichen Verkehr zulässigen Fehlers.

6) Neu geaichte Verkehrsmasse werden von den Aichämtern an das Publikum abgegeben. Der Maximalfehler ist $^1/_2$ des entsprechenden im öffentlichen Verkehr zulässigen Fehlers.

Als Urmass im Deutschen Reichs gilt für Längen ein Platinstab, welchen die Preussische Regierung besitzt und der 1863 durch eine französisch-deutsche Kommission mit dem Mètre des Archives zu Paris verglichen und bei 0° C. gleich 1,000 003 m befunden wurde.

Als Urgewicht gilt ein Platinkilogramm, welches die Nummer Eins trägt und im Jahre 1860 mit dem Kilogramme prototype zu Paris verglichen gleich 0,999 999 842 kg befunden wurde.

Das ursprünglich nur für den Norddeutschen Bund bestimmte Mass- und Gewichtssystem vom 17. August 1868 wurde durch Artikel 80 — I — 11 der Verfassung vom November 1870 zur Mass- und Gewichtsordnung erhoben.

Von den in den einzelnen Ländern früher gebrauchten Massen gibt die nachstehende Tabelle Rechenschaft.

| | |
|---|---|
| 1 Preussischer (Rheinländischer Fuss) | = 0·313853487 m (9·4967269·726) |
| 1 Bayerischer Fuss | = 0·2918591641 m (9·4651733·343) |
| 1 Hannoverscher Fuss | = 0·2920947 m (9·4655236) |
| 1 Sächsischer Fuss | = 0·28319 m (9·4820779) |
| 1 Württembergischer Fuss | = 0·2864903 m (9·4571099) |
| 1 Badischer Fuss | = 0·3 m. |

In Oesterreich war früher die Wiener Klafter das Grundmass. Nach den von Stampfer vorgenommenen Vergleichungen, siehe XX. Band der Jahrbücher des Wiener polytechnischen Instituts, ist die Wiener Klafter = 1·8966657 m = 0·9731299 Toisen. Struve fand durch Vergleichung des nach Petersburg gesandten Etalons der Wiener Klafter mit den dortigen französischen Massstäben die Wiener Klafter = 1·896483840 = 0·9730317 Toisen (Denkschriften der Wiener Akademie, 5. Band, 1. Abth., S. 118). Diese letztere Zahl dürfte die genauere sein, obschon die Abweichungen der mitgeteilten Elemente gross sind. (Astron. geod. Arbeiten des k. k. militär. geogr. Instituts 1871, p. 188). Die nachstehenden Reduktionszahlen sind im § 4 des österreichischen Massgesetzes vom 16. Juli 1871 als für den Verkehr giltig bestimmt.

| | |
|---|---|
| 1 österreichische Klafter | = 1·8964838 m (0·2779491) |
| 1 österreichische Klafter | = 840·7036 Pariser Linien (2·9246429) |
| 1 österreichische Klafter | = 6 österreichische Fuss (6′) |
| 1 österreichischer Fuss | = 12 österreichische Zoll (12″) |
| 1 österreichischer Zoll | = 12 österreichische Linien (12‴) |

Ferner wird noch die Decimalteilung in Oesterreich beim Feldmessen gebraucht und zwar 1 Klafter = 10 Zehntel (Decimalfuss) oder = 100 Hundertstel (Decimalzoll) und endlich = 1000 Tausendstel (Decimallinien).

Beim Bergbau ist die österreichische Klafter (Lachter) im Gebrauche und ist entweder duodecimal oder decimal eingeteilt. Die österreichische Meile ist = 4000 österreichische Klafter. Für den gewöhnlichen Gebrauch hat man als das Flächenmass 1 □° (eine Quadratklafter) = 36 □′ (Quadratfuss). Beim Feldmessen wird die Quadratklafter in Zehntel geteilt, als grössere Einheit: 1 österreichisches Joch = 1600 Quadratklafter. Für Vergleichung des österreichischen Masses mit dem metrischen Masssystem hat man ferner:

| | | |
|---|---|---|
| 1 österreichischer Fuss | = 0·3160806 Meter | (9·4997979 — 10) |
| 1 österreichische Meile | = 7·585936 Kilometer | (0·8800091) |
| 1 Quadratfuss | = 0·099907 Quadratmeter | (8·9995959 — 10) |
| 1 Quadratklafter | = 3·596652 Quadratmeter | (0·5558983) |
| 1 österreichisches Joch | = 0·5754642 Hektar | (9·7600196 — 10) |
| 1 österreich. Quadratmeile | = 5754642 Quadratkilometer | (1·7600183) |
| 1 Meter = 3′ 10″ 11·380‴ | = 0·5272916 österr. Klafter | (9·7220508 — 10) |
| 1 Kilometer | = 0·131823 österr. Meile | (9·1199912 — 10) |
| 1 Quadratmeter | = 10·00931 Quadratfuss | (1·0004041) |
| 1 Quadratmeter | = 0·2780364 Quadratklafter | (9·4441017 — 10) |
| 1 Ar | = 27·80364 Quadratklafter | (1·4441017) |
| 1 Hektar | = 1·737727 österr. Joch | (0·2399815) |
| 1 Quadratkilometer | = 0·01737727 österr. Quadratmeile | (8·2399815 — 10) |

**Frage 11.** Was ist bei jedem genauen Massstab noch in Betracht zu ziehen?

**Antwort.** Bei einem jeden genauen Massstab ist noch der Einfluss der Temperatur in Betracht zu ziehen. Ist $l_0$ die Länge desselben bei 0 Graden Celsius, so wird dieselbe bei $t$ Graden gleich:

$$l_t = l_0 (1 + \alpha t)$$

dabei heisst $\alpha$ der Temperaturkoëffizient. Derselbe ist abhängig von der materiellen Beschaffenheit des Massstabes.

Ist der Massstab aus Holz, so hängt seine Länge noch von der augenblicklich aufgenommenen Wassermenge ab. Vergl. Erkl. 20. Bei längeren Massstäben ist ferner die Durchbiegung ein störender Fehler.

Bei den Kreisteilungen ist die Temperatur-Ausdehnung ohne Belang.

**Bemerkung.** Einige Ausdehnungs-Koëffizienten mögen hier angeführt werden:

| | |
|---|---|
| Silber | 0·001909 |
| Gold | 0·001466 |
| Platin | 0·000884 |
| Messing | 0·001868 |
| Stahl | 0·001079 |
| Eisen | 0·001235 |
| Glas | 0·000861 |

**Erkl. 24.** Man pflegt daher die Holzmassstäbe, nachdem sie genügend trocken geworden sind, zuerst mit Oel oder besser mit Firnis zu tränken und hierauf durch mehrfachen Lackauftrag möglichst gegen Luftfeuchtigkeit zu schützen.

---

**Frage 12.** Welche Einteilung ist bei der Temperatur üblich?

**Antwort.** Die Temperatur wird jetzt fast allgemein nach Celsius (1701—1744) gemessen. Nach diesem wird der Gefrierpunkt des Wassers mit 0 und der Siedepunkt mit 100 bezeichnet. Im gewöhnlichen Leben hält man noch an der Reaumurschen (1683—1757) fest, die den Siedepunkt des Wassers mit 80 bezeichnet. Die minder übliche Skala von Fahrenheit (1686—1740) teilt das Intervall zwischen dem Gefrier- und Siedepunkte in 180° und bezeichnet den Gefrierpunkt mit 32, so dass dem Siedepunkte die Zahl 212 entspricht.

Man hat also die Relation:

$$80^0 R = 100^0 C = 180^0 F$$

also:

$$R = \frac{5}{4} C = \frac{9}{4} F$$

$$C = \frac{4}{5} R = \frac{9}{5} F$$

$$F = \frac{4}{9} R = \frac{5}{9} C$$

**Bemerkung.** Man versäume nie, sich von der Richtigkeit des verwendeten Thermometers zu überzeugen. Die gewöhnlich verkäuflichen differieren oft um mehrere Grade von einander.

**Erkl. 25.** Diese Relation gilt bei Fahrenheit natürlich nur für die Gradlängen. Es ist allgemein:

$$x^0 C \text{ über Null} = 32 + \left(\frac{9}{5}\right) x \text{ Fahrenheit}$$

$$x^0 C \text{ unter Null} = 32 - \left(\frac{9}{5}\right) x \text{ Fahrenheit}$$

ebenso:

$$x^0 R \text{ über Null} = 32 + \left(\frac{9}{4}\right) x \text{ Fahrenheit}$$

$$x^0 R \text{ unter Null} = 32 - \left(\frac{9}{4}\right) x \text{ Fahrenheit}$$

---

**Frage 13.** Welche sind die gebräuchlichsten Teilungen?

**Antwort.** Die gebräuchlichsten Teilungen sind:

I. Die Decimalteilung.
II. Die Duodecimalteilung.
III. Die Sexagesimalteilung.

Die Decimalteilung ist die bequemste und allbekannt, so dass sie nicht erst näher auseinandergesetzt zu werden braucht.

**Bemerkung.** Die duodecimale Teilung ist ägyptischen Ursprungs. Der Grund scheint in der leichten Teilbarkeit der Zahl 12 durch 2, 3, 4, 6 zu liegen. Die sexagesimale Kreisteilung entstand auf Grund der leichten Teilbarkeit des Kreises in 6 Teile durch den

Radius. In der letzten Zeit wird der Kreis auch in 400 Teile geteilt, jeder Teil wieder in 100 Unterteile u. s. w. In China war diese Teilung schon vor mehreren hundert Jahren in Gebrauch. Als Kuriosum möge angeführt werden eine Kreisteilung vom Jahre 1570 in $384 = 6 + 4 + 4 + 4$ Grade, die sich an einem alten Instrument in Kremsmünster befindet. Die Teilung eines Grades in 100′ statt 60′ rührt von Gellibrand (1597–1637) her. Lagrange bemühte sich (1783), die Decimalteilung auch beim Kreise durchzuführen; sie wurde in der französischen Revolution angenommen.

Die Duodecimalteilung war früher bei den Längenmassen brauchbar, zugleich in Verbindung mit der Sexagesimalteilung.

Beispiel:

1 Klafter = 6 Schuh (Sexagesimal)
1 Schuh = 12 Zoll (Duodecimal)

Bei der Kreisteilung ist die Sexagesimalteilung bis heute im Gebrauch:

$$\text{Umfang } 6 \cdot 60^0$$
$$1^0 = 60^0$$
$$1' = 60''$$

Eine Mischung der Decimalteilung mit der Sexagesimalen und der Duodecimalen stellt die französische Toise dar.

1 Toise = 6 Fuss
1 Fuss = 12 Zoll
1 Zoll = 12 Linien
1 Linie = 10 Teilen.

---

**Frage 14.** Was versteht man unter Bogenmass?

**Antwort.** Unter dem Bogenmass versteht man jenes Mass, welches die Länge des Bogens angibt für Radius = 1. Ist nämlich ein Bogen in Gradmass gegeben, so ist damit nur der ihn angebende Winkel bestimmt, nicht aber seine Länge. Um diese zu erhalten, benötigt man noch des Radius. Sei $\varphi^0$ der Bogen im Gradmass und $\varphi$ im Bogenmass, so ist:

$$\varphi : 2r\pi = \varphi^0 : 360^0$$

wobei $r$ den Radius bezeichnet. Also:

$$\varphi = \frac{\varphi^0}{360^0} \cdot 2\pi r = \frac{\varphi^0}{180^0} \cdot \pi r$$

Setzt man $r = 1$, so wird $\varphi = \varphi_1$ und man erhält:

$$\varphi_1 = \frac{\varphi^0}{180^0}\pi$$

also wenn man die vorstehenden Gleichungen durch einander dividiert:

$$\varphi = \varphi_1 r$$

analog wird:

$$\varphi^0 = \frac{180^0}{\pi}\varphi r$$

Ist der Winkel $\varphi$ sehr klein (begnügt man sich mit einer Genauigkeit bis zur 6. Decimalstelle, so kann $\varphi$ bis 30′ betragen), so gelten folgende Sätze:

$$\sin\varphi = \varphi'' \cdot \sin 1''$$
$$\operatorname{tg}\varphi = \varphi'' \sin 1''$$
$$\cos\varphi = 1$$

Also auch:

$$\varphi'' = \frac{\sin\varphi}{\sin 1''} = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg} 1''}$$

**Bemerkung.** Man hat:

$$\frac{180^0}{\pi} = 57^0\,2957795 = 57^0\,17'\,44''\,806$$
$$= 206264 \cdot 806$$
$$\log 206264 \cdot 806 = 5 \cdot 31442514$$
$$\log\frac{1}{206264 \cdot 806} = 4 \cdot 68557486 - 10$$

Ferner ist:

$$1^0 = 0 \cdot 01745329252\, r$$
$$1' = 0 \cdot 000290888209\, r$$
$$1'' = 0 \cdot 000004848137\, r.$$

**Bemerkung.** Es ist auch:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

also wenn $\beta$ sehr klein ist:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \pm \frac{\cos\alpha}{206265}\beta''$$

sind $\alpha$ und $\beta$ klein, dann wird:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \pm \sin\beta = \frac{\alpha'' \pm \beta''}{206265}$$

Analog ist:

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta$$

oder wenn man:

$$\frac{1}{\sin 1''} = 206265$$

setzt:

$$\varphi'' = 206265 \sin \varphi$$

$$\sin \varphi = \frac{\varphi''}{206265}$$

---

## 5. Ueber die Zeichnungsmasse.

**Frage 15.** Was versteht man unter einem verjüngten Bilde?

**Antwort.** Werden die Längenausdehnungen einer Figur nicht in ihrer wahren Länge, sondern so aufgetragen, dass man von jeder Länge nur einen bestimmten aliquoten Teil nimmt, so entsteht ein verjüngtes Bild, d. h. ein verkleinertes und ähnliches Bild der wahren Figur.

---

**Frage 16.** Was versteht man unter dem Verjüngungsverhältnis?

**Antwort.** Unter dem Verjüngungsverhältnis wird jene Zahl verstanden, welche angibt, der wievielte Teil jede Linie der Zeichnung von der entsprechenden Linie der Natur ist.

Wird z. B. eine Länge von 10 m durch einen Decimeter in der Karte verzeichnet, so wird, da 10 m = 100 dcm, das Verjüngungsverhältnis 1 : 100 sein. Wird 1 Klafter gleich gemacht 1 Zoll, so ist das Verjüngungsverhältnis 1 : 72 etc.

---

**Frage 17.** Welche sind die Hilfsmittel, um gemessene Längen in ihrem verjüngten Massstabe schnell angeben zu können?

**Antwort.** Um gemessene Längen in ihrem verjüngten Massstabe schnell abnehmen zu können, bedient man sich der sogenannten verjüngten oder Verjüngungsmassstäbe.

---

**Frage 18.** Wie wird ein verjüngter Massstab angefertigt?

**Antwort.** Um die Anfertigung eines solchen verjüngten Massstabs darzuthun, wollen wir einige spezielle Beispiele nehmen.

1) Es soll ein Metermassstab im Verhältnis von 1 : 1000 angefertigt werden.

$\frac{1}{1000}$ eines Meters ist aber 1 mm. Also ist der Millimetermassstab der verlangte.

2) Es wird im Verhältnis von 1 : 2880 gearbeitet, so dass 40 Klafter gleich 1 Zoll eines Massstabs sind. Dann entspricht eine jede 2,5 Zoll lange Linie 100 Klaftern der Wirklichkeit.

---

**Frage 19.** Was ist ein Transversalmassstab?

**Bemerkung.** Der Erfinder des Transversalmassstabs ist unbekannt. Nach Th. Digges „Alae seu scalae mathematicae" Londini 1573 waren sie schon seit dem Anfang des 16. Jahrhunderts in England gebräuchlich. Tyge Brahe wandte die Transversalteilung auch bei der Kreisteilung an.

Vergl. auch Sachs, Lehrbuch der Planimetrie, VI. Teil, Seite 23.

**Antwort.** Der Transversalmassstab ist eine Modifikation des gewöhnlichen Massstabs, welche dazu dient, kleinere Masseteile noch abzumessen, als die unmittelbare Teilung des verwendeten Massstabs selbst angibt. Sein Aussehen und seine Verwendung gibt die Figur 15.

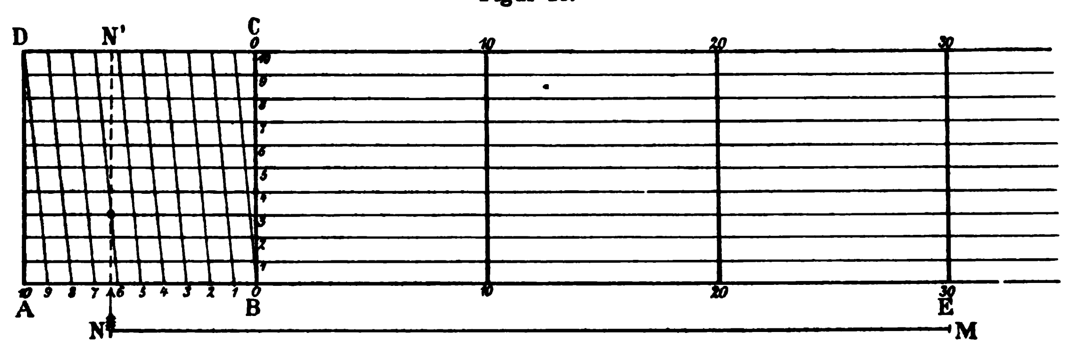
Man trägt, um einen solchen zu konstruieren, die 100 fache Längeneinheit (also $2\frac{1}{2}$ Zoll im letzten Beispiel) einigemal auf (d. h. $AB$ 4 mal bis $E$ in der Figur 15). Die erste Abteilung ($AB$) teilt man in 10 Teile. Ferner werden parallel zu $AE$ im Abstande eines Teiles 10 Linien gezogen und in den Endpunkten der 100 fachen Teile senkrechte auf $AE$ errichtet ($AD$, $BC \cdots$). Auch die oberste dieser Linien wird im ersten Intervalle (d. h. $DC$) in zehn Teile geteilt und diese Teilungspunkte schräg mit den Teilungspunkten der untersten Linie verbunden. In dem Dreiecke 9, 10, $D$ besitzen die Parallelen nacheinander die Werte:

1; 0,9; 0,8; 0,7; 0,6; 0,5; 0,4; 0,3; 0,2; 0,1;

darnach ergibt sich die Anwendung.

Die Länge $MN = 36,3$.

Figur 15.




## 6. Aufgaben über die Masse.

**Aufgabe 14.** Es sind 12 Fuss 7 Zoll (württembergisches Mass) in Metermass zu verwandeln.

**Hilfsrechnung.**

Es ist:

$$12 + \frac{7}{12} = \frac{144 + 7}{12} = \frac{151}{12}$$

**Auflösung.** Es ist ein württembergischer Fuss gleich $0 \cdot 286$ m. Ferner ist ein Zoll gleich $\frac{1}{12}$ Fuss, also gleich:

$$\frac{1}{12} \times 0 \cdot 286 = \frac{0 \cdot 286}{12} \text{ m}$$

also wird:

```
0·286 × 151
 1430
  286
 43·186 : 12 = 3·599 nahezu
  71
  118
  106
```

Wir haben also die Beziehung:

$$x = 12 \times 0{\cdot}286 + 7 \times \frac{0{\cdot}286}{12}$$

oder:

$$x = \left(12 + \frac{7}{12}\right) \times 0{\cdot}286$$

woraus (siehe Hilfsrechnung):

$$x = 3{,}599 \text{ m}$$

---

**Aufgabe 15.** 150 Joch und 1275 Quadratklafter österreichisches Mass in Metermass, d. h. Hektare, Are und Quadratmeter zu verwandeln.

**Auflösung.** Es ist:

1 Joch = 1600 □ Klafter

und

1 □ Klafter = 3,59665 qm

Darnach sind:

150 Joch und 1275 □ Klafter

gleich:

(150·1600 + 1275) □ Klafter

d. h. (vergleiche Hilfsrechnung 1):

241275 □ Klafter

und demnach:

241275 × 3,59665 qm

oder (siehe Hilfsrechnung 2):

86,7782 qm

d. h.:

86 ha 77 a 82 qm

**Hilfsrechnung 1.**

```
150 × 1600
     80000
    240000
```

**Hilfsrechnung 2.**

```
log 241275 = 5·3825123
log 3·59665 = 0·5558983
  log Summe  5·9384106
Zahl hierzu 86·7782
```

---

**Aufgabe 16.** Wieviel sind 23 Fuss 7 Zoll mecklenburgisches Mass ausgedrückt in Fuss und Zoll preussisches Mass? (Von Linien soll abgesehen werden.)

**Auflösung.** Es ist:

1 mecklenburgischer Fuss = 0,291 m

und nach Seite 19, Zeile 11:

1 preussischer Fuss = 0,314 m

also verhält sich:

1 mecklenb. Fuss : 1 preuss. Fuss = 291 : 314

23 Fuss 7 Zoll sind aber (vergleiche Hilfsrechnung):

$$23 + \frac{7}{12} \text{ Fuss} = 23{,}583 \text{ Fuss}$$

Wir haben also die Proportion:

$$23{,}583 : x = 291 : 314$$

woraus:

$$x = \frac{23{,}583 \times 314}{291} = 25{,}447$$

folgt. Wir haben also 25 Fuss und 0,447 Fuss. Nun ist 1 Zoll = $\frac{1}{12}$ Fuss, also wird 0,447 Fuss gleich sein:

0,447 × 12 Zoll = 5,364 Zoll

Wir haben also:

23 Fuss 7 Zoll mecklenburgisch

und nahezu gleich:

25 Fuss 5 Zoll preussisch.

**Hilfsrechnung.**

```
7 : 12 = 0·583
 100
  40

log 23,583 = 1·37260
   log 314 = 2·49693
    Summe  = 3·86953
 — log 291 = 2·46389
    log x  = 1·40564
Zahl hierzu  25·447
```

---

**Aufgabe 17.** Auf einer Karte, deren Massstab unbekannt ist, findet man eine Länge zu 321 württembergisch Fuss angegeben. Dieselbe Länge mit einem Metermassstab gemessen, ergab 0,237 Meter. In welchem Massstab war die Karte gezeichnet?

**Auflösung.** Es ist klar, dass wir zunächst das württembergische Mass in Metermass verwandeln müssen.

Es ist:

$$1 \text{ württembergischer Fuss} = 0{,}286 \text{ m}$$

also:

$$321 \text{ württembergische Fuss} = 321 \times 0{\cdot}286 \text{ m} = 9{,}1806 \text{ m}$$

Nun verhält sich diese Länge zu der gefundenen 0,237, sowie die Masseinheit zum Massstabe der Karte, also wird:

$$\text{Massstab} = \frac{0{,}237}{91{,}806} = \frac{1}{387\cdots}$$

**Hilfsrechnung 1.**

$$\begin{array}{r} 0{\cdot}286 \times 321 \\ 572 \\ 858 \\ \hline 91{\cdot}806 \end{array}$$

**Hilfsrechnung 2.**

$$\begin{array}{r} \log 0{,}237 = 9{\cdot}37475 \\ \log 91{\cdot}806 = 1{\cdot}96287 \\ \hline 2{\cdot}58812 \end{array}$$

Zahl dazu 387···

---

**Aufgabe 18.** Auf einer alten Karte, die im Massstab von 1:100 gezeichnet war, beträgt nun die von 5 m abgenommene Länge 6,2 dcm. In welchem Massstab erscheint nun die Karte gezeichnet?

**Auflösung.** Wir haben offenbar eine Proportion, wenn $x$ den gesuchten Massstab bezeichnet:

$$x : 100 = 5{\cdot}2 : 5$$

denn die Länge von 5 m sollte auf der Karte $\frac{5}{100}$ m, d. h. 5 dcm betragen. Aus diesem folgt:

$$x = \frac{100{\cdot}5{\cdot}2}{5} = 20{\cdot}5{\cdot}2 = 104$$

Die Karte erscheint demnach nun im Massstabe von 1:104 gezeichnet.

**Erkl. 26.** Die hygroskopischen Eigenschaften des Papiers bedingen eine stetige Veränderung des Massstabs einer gezeichneten Karte. Es ist daher wichtig, sich jedesmal von dem augenblicklichen Massstabe zu überzeugen. Oft ist dieser Papiereingang an eine bestimmte Richtung gebunden. Alsdann sind in dieser Richtung die Längen proportional zu nehmen. So z. B. müssen im nebenstehenden Falle alle Längen um 4% vergrössert werden.

---

**Aufgabe 19.** Auf einer Karte ist ein Rechteck verzeichnet und sein Inhalt mit $a \cdot b$, d. h. durch das Produkt aus Grundlinie und Höhe gegeben. Der Massstab der Karte ist $1:m$. Die wirkliche Messung ergibt aber für $a$ die Länge $\alpha - \triangle\alpha$ und für $b$ die Länge $\beta - \triangle\beta$. Wie gross ist der Papiereingang nach diesen Richtungen und wie gross muss eine andere Fläche, die $c \cdot d$ sein sollte, eingezeichnet werden?

**Auflösung.** War die Karte im Massstab $1:m$ gezeichnet, dann müsste:

$$a = m\alpha, \quad b = m\beta$$

da aber:

$$a \text{ zu } m(\alpha - \triangle\alpha)$$
$$b \text{ zu } m(\beta - \triangle\beta)$$

gefunden wurde, so muss:

$$a = m'\alpha = m(\alpha - \triangle\alpha)$$
$$b = m''\beta = m(\beta - \triangle\beta)$$

sein, also ist der Massstab der Richtung:

$$a \cdots m' = \frac{m\alpha}{\alpha - \triangle\alpha}$$

und jener der Richtung:

$$b \cdots m'' = \frac{m\beta}{\beta - \triangle\beta}$$

oder wenn man nun die ersten Potenzen von $\triangle\beta$ berücksichtigt:

$$m' = m + m\frac{\triangle\alpha}{\alpha}$$

$$m'' = m + m\frac{\triangle\beta}{\beta}$$

der Papiereingang ist also in der Richtung von $a$ gleich:

$$m\frac{\triangle\alpha}{\alpha}$$

und in der Richtung von $b$ gleich:

$$m\frac{\triangle\beta}{\beta}$$

Eine Fläche $cd$ sollte für:

$$c = m\gamma, \quad d = m\delta$$

mit $\gamma\delta$ gezeichnet werden. Nun muss man aber statt $m$ in der Richtung von $c$, $m'$ und und statt $m$ in der Richtung von $d$, $m''$ nehmen. Man hat daher zu suchen:

$$c = m'\gamma', \quad d = m''\delta'$$

also:

$$\gamma' = \frac{c}{m'} = \frac{c}{m + m\frac{\triangle\alpha}{\alpha}}$$

$$\delta' = \frac{d}{m''} = \frac{d}{m + m\frac{\triangle\beta}{\beta}}$$

und die Fläche mit $\gamma' \cdot \delta'$ zu zeichnen.

**Erkl. 27.** Es ist bekanntlich für $x < 1$:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$$

also wenn $x^2$ und die höheren Potenzen nicht beachtet werden, genähert:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x$$

demnach:

$$\frac{m\alpha}{\alpha - \triangle\alpha} = \frac{m}{1 - \frac{\triangle\alpha}{\alpha}} = m\left(1 + \frac{\triangle\alpha}{\alpha}\right)$$

---

## 7. Ueber den Nonius.

**Frage 20.** Welche sind die Mittel zur Messung sehr kleiner Grössen?

**Antwort.** Zur Messung sehr kleiner Grössen dienen der Nonius, der Messkeil und die Mikrometerschraube.

**Erkl. 28.** Auch das Mikrometer ist hieher zu rechnen, da es aber vorzugsweise bei den Kreisinstrumenten im Gebrauche ist, so wird es auch im Anschluss an jene besprochen.

---

**Frage 21.** Was ist ein Nonius?

**Antwort.** Der Nonius ist ein an einem grösseren Massstab leicht verschiebbares Massstäbchen, welches so geteilt ist, dass $n$ Teile desselben gleich sind $n \pm 1$ Teilen des Massstabs, zu welchem der Nonius gehört.

Ist die Länge von $n+1$ Teil des Massstabs beim Nonius in $n$ Teile geteilt, so spricht man vom vortragenden oder vorläufigen Nonius; sind dagegen $n - 1$ Teile des Massstabs gleich $n$ Teilen des Nonius,

**Erkl. 29.** Der Name „Nonius“ stammt von dem Portugiesen Pero Nunez (Petrus Nonius) her, der zum erstenmal bei den Kreisteilungen eine ähnliche Vorrichtung anwandte (1542). Die jetzige Gestalt des Nonius rührt von Peter Werner, einem niederländischen Schlosshauptmann her (1631) daher der Name Vernier.

Petrus Nonius, geboren 1492 zu Alcacar do Sal, gestorben 1577 zu Coimbra, Professor

daselbst. Schrieb „Opera mathematica“, „De crepusculis Liber unus“ etc.

Vernier Pierre, geboren 1580 zu Ornans (Besançon), gestorben 1636 ebendaselbst, Generaldirektor der Münzen.

so hat man einen nachtragenden oder rückläufigen Nonius vor sich.

---

**Frage 22.** Wie wird der Nonius gebraucht?

**Antwort.** Da der nachtragende Nonius entsteht, wenn man $n-1$ Teile des Massstabs in $n$ Teile des Nonius zerlegt, so ist zunächst klar, dass ein Noniusteil zu einem Teile des Massstabs sich verhalten wird wie $n-1$ zu $n$, es wird daher:

$$\frac{\text{Noniusteil}}{\text{Massstabteil}} = \frac{n-1}{n}$$

Man hat demnach die Beziehung:

$$\text{Noniusteil} = \text{Massstabteil} - \frac{1}{n}\,\text{Massstabteil.}$$

Daraus folgt weiter die Beziehung:

$$\text{Massstabteil} - \text{Noniusteil} = \frac{1}{n}\,\text{Massstabteil}$$

und auch:

$$x\ \text{Massstabteile} - x\ \text{Noniusteile} = \frac{x}{n}\,\text{Massstabteile.}$$

Analog gilt für den vortragenden Nonius die Beziehung:

$$x\ \text{Massstabteile} - x\ \text{Noniusteile} = -\frac{x}{n}\,\text{Massstabteile.}$$

**Erkl. 30.** Aus:

$$\frac{\text{Noniusteil}}{\text{Massstabteil}} = \frac{n-1}{n}$$

folgt:

$$\text{Noniusteil} = \text{Massstabteil}\,\frac{n-1}{n}$$

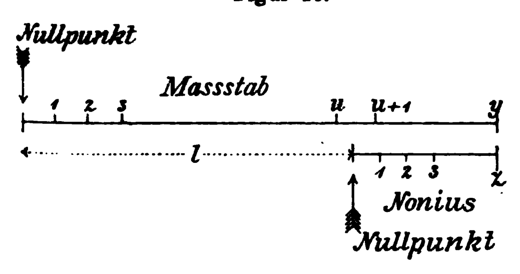
oder:

$$\text{Noniusteil} - \text{Massstabteil} = \text{Massstabteil}\left(\frac{n-1}{n} - 1\right) = \text{Massstabteil}\,\frac{n-1-n}{n}$$

oder:

$$\text{Noniusteil} = \text{Massstabteil} - \frac{1}{n}\,\text{Massstabteil.}$$

Figur 16.




Nun nehmen wir an, wir hätten eine Länge $l$ gemessen und gefunden, dass dieselbe gleich ist (vergleiche Figur 16) $y$ Teilen des Massstabs weniger $z$ Teilen des Nonius, also:

$$l = yM - zN$$

Diese Gleichung lässt sich auch schreiben wie folgt:

$$l = (y-z)M + z(M-N)$$

Nun ist für den nachtragenden Nonius:

$$M - N = \frac{1}{n}M$$

und für den vortragenden:

$$M - N = -\frac{1}{n}M$$

demnach wird:

$$l = (y-z)M \pm \frac{z}{n}M$$

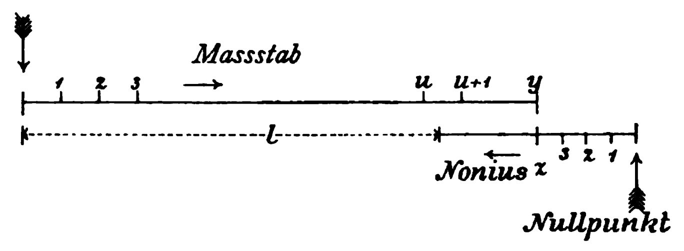
oder:

$$l = \left(y - z \pm \frac{z}{n}\right)M$$

Hier gilt das + Zeichen, wenn der Nonius ein nachtragender ist, das — Zeichen, wenn der Nonius ein vortragender ist.

Um daher eine Länge zu messen, bringe man den Anfangspunkt des Massstabs an das eine Ende derselben und den Anfangs-

Figur 17.




punkt des Nonius auf das andere und sehe nach, welcher Noniusteil mit dem Massstabteil zusammenfällt. Aus der obigen Formel folgt dann die Länge, ausgedrückt in Teile des Massstabes.

Der Gebrauch dieser Formel ist aber für die Praxis nicht vorteilhaft. Man pflegt anders zu verfahren.

Man sucht vielmehr denjenigen Punkt $u$, der dem Nullpunkt des Nonius zunächst liegt (vergl. Figur 16). Sodann ist offenbar:

$l = uM +$ der Entfernung zwischen dem Punkte $u$ und dem Nullpunkte des Nonius.

Oder für die Figur 17:

$l = uM +$ Entfernung zwischen dem Punkte $u$ und dem Endpunkte des Nonius.

Im ersten Falle ist diese Entfernung gleich:

$$(y-u)M - zN$$

im letzteren dagegen:

$$(y-u)M + zN$$

Nun ist aber offenbar:

$$y - u = z$$

also haben wir für den ersten Fall:

$$z(M-N)$$

und für den zweiten:

$$z(M+N)$$

Nun ist für den nachtragenden Nonius:

$$M - N = \frac{M}{n}$$

und für den vortragenden:

$$N - M = -\frac{M}{n}$$

Wählen wir also die Darstellung der Figur 17 für die vortragenden, jene der Figur 16 für die nachtragenden Nonien, so haben wir in beiden Fällen:

$$\text{Entfernung} = z\frac{M}{n}$$

so dass also für alle Fälle:

$$l = uM + z\frac{M}{n}$$

Hieraus folgt die Regel: Man liest zunächst den, dem Nullpunkte des Nonius

**Erkl. 81.** Der Buchstabe $M$ ist der Kürze halber für den Massstab-, $N$ für den Noniusteil gebraucht.

Aus:

$$l = yM - zN$$

folgt:

$$l = yM - zM + zM - zN$$

also:

$$l = M(y-z) + z(M-N)$$

**Erkl. 82.** Die im Gebrauch vorkommenden Nonien sind zumeist nachtragende. Der vortragende Nonius kommt höchst selten vor. Nachtragende Nonien sind auf den ersten Blick daraus zu erkennen, dass sie mit dem Massstabe gleichlaufende Zählung haben, während sie bei den vortragenden dem Massstabe entgegengesetzt laufen.

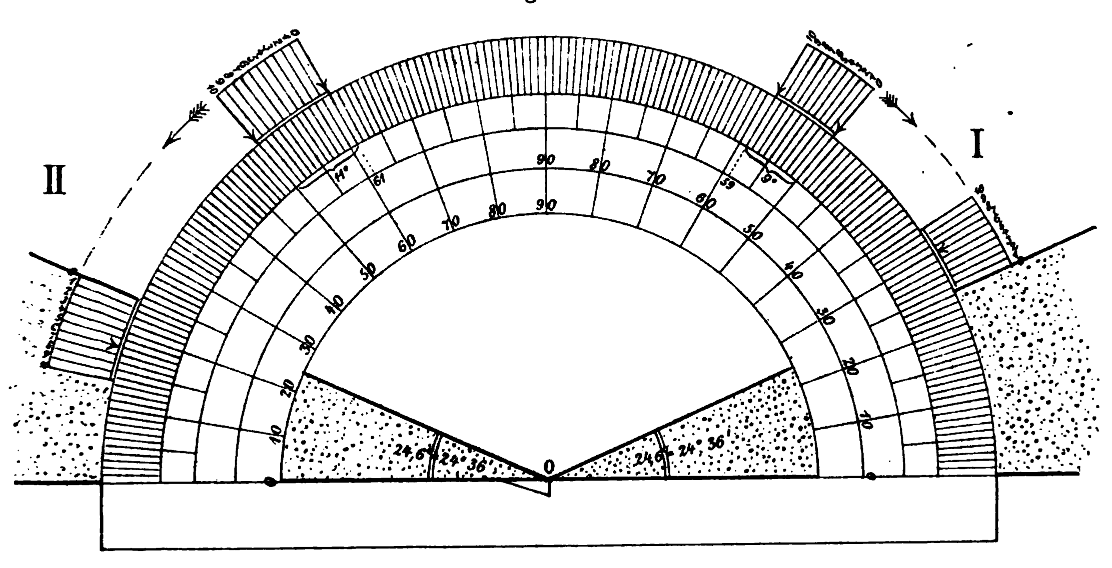
**Erkl. 83.** Der Unterschied zwischen einem Massstab und Noniusteil nennt man die „Angabe des Nonius“.

**Erkl. 84.** Es wurde hier vorausgesetzt, dass ein Noniusteil mit einem Massstabteil zuzusammenfällt; dieses ist in der Regel nicht der Fall. Dann nimmt man den am meisten zusammenfallenden Strich. Die neueren Instrumente sind indessen so fein geteilt, dass oft mehrere Striche zusammenzufallen scheinen. In

diesem Falle nimmt man immer den mittleren. Man vergleiche auch Figur 18 dieses Werkes.

vorangehenden Teilstrich ab und vermehrt diese Länge um soviel Nonien-Betrag, als der nächste mit dem Massstabpunkte zusammenfallende Nonienteil angibt (vergleiche Erkl. 34 und 37 und Figur 18).

Figur 18.




## 8. Aufgaben über Nonien.

**Aufgabe 20.** An einem Nonius sind 11 Teile 12 Teilen des Massstabs gleich. Was ist das für ein Nonius und wie die Angabe des Nonius?

**Erkl. 35.** Vortragend auch deswegen, weil ein Noniusteil grösser als der Massstabteil.

**Auflösung.** Da 11 Teile des Nonius gleich sind $11+1$ Teilen des Massstabs, so ist der Nonius nach Frage 22 ein vortragender.

Da ferner:

$$12M = 11N$$

so wird:

$$M = N(N - M)$$

also:

$$N - M = \frac{M}{11}$$

Daher beträgt die Angabe des Nonius $\frac{1}{11}$ eines Massstabteiles.

---

**Aufgabe 21.** Wie gross ist der Unterschied zwischen 7 Teilen des Nonius und des Massstabs beim vorhergehenden Nonius?

**Antwort.** Da:

$$N - M = \frac{M}{11}$$

ist, so wird:

$$7N - 7M = \frac{7}{11} M$$

d. h. der Unterschied beträgt $\frac{7}{11}$ eines Massstabteiles.

---

**Aufgabe 22.** Es soll ein nachtragender Nonius zu einer Millimeterteilung verfertigt werden, der $\frac{1}{10}$ eines Millimeters angeben würde. Wie ist dieses zu machen?

**Erkl. 36.** Es ist:

$$M - N = \frac{1}{10} M$$

also:

$$M - \frac{1}{10} M = N$$

woraus:

$$\frac{10}{10} M - \frac{1}{10} M = \frac{9}{10} M = N$$

folgt. Durch beiderseitige Multiplikation mit 10 ergibt sich:

$$9M = 10N$$

**Antwort.** Wir haben allgemein für den nachtragenden Nonius:

$$N - M = -\frac{M}{n}$$

oder:

$$M - N = \frac{M}{n}$$

nun soll die Angabe gleich $\frac{1}{10}$ sein, demnach wird:

$$M - N = \frac{1}{10} M$$

Hieraus folgt:

$$M \frac{9}{10} = N$$

oder:

$$M9 = N10$$

Es müssen daher 9 Teile des Massstabs gleich 10 Teilen des Nonius gemacht werden. Vergl. Erkl. 36.

---

**Aufgabe 23.** Wenn der verlangte Nonius der vorhergehenden Aufgabe ein vortragender sein sollte, wie müsste dann die Teilung aussehen?

**Antwort.** Für den vortragenden wäre offenbar:

$$M - N = -\frac{1}{10} M$$

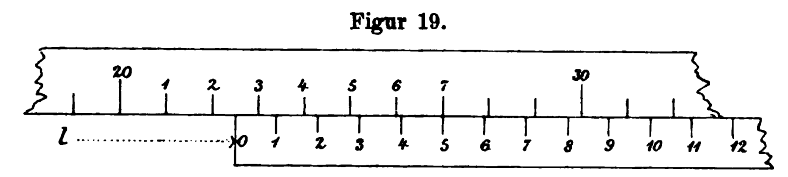
also:

$$11M = 10N$$

d. h. 11 Massstabteile müssten gleich 10 Noniusteilen gemacht werden.

---

Figur 19.




**Aufgabe 24.** Ist der Nonius der Figur 18 ein vortragender oder ein nachtragender und wie viel beträgt die Ablesung?

**Antwort.** Durch Abmessung mit dem Zirkel überzeugt man sich, dass 10 Massstabteile = 11 Teilen des Nonius, auch lehrt der Anblick, dass die Noniusteile kleiner sind als die Massstabteile, demnach ist es ein vortragender Nonius.

Ferner sehen wir, dass die Länge $l$ nur bis zum Teil 22 des Massstabs geht, und dass der 7. Teil des Massstabs mit dem 5. Teil des Nonius zusammenfällt.

Die Angabe des Nonius ist also:

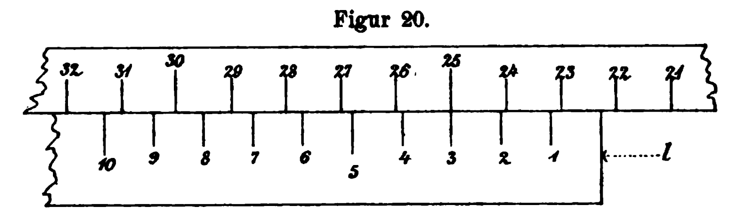
$$M - N = -\frac{1}{10} M$$

gleich $\frac{1}{10}$ eines Massstabteiles.

Da nun der 5. Strich des Nonius mit dem 7. Strich des Massstabs zusammenfällt, so wird:

$$l = 22\,M + \frac{5}{10} M$$

Figur 20.




**Aufgabe 25.** Man bestimme die Art des Nonius und die Ablesung an der vorstehenden Figur 20.

**Auflösung.** Der Nonius ist ein nachtragender und die Ablesung lautet:

$$l = 22\,M + \frac{3}{10} M$$

Die genaue Diskussion bleibt dem Leser überlassen.

---

**Aufgabe 26.** An einem Winkelinstrument ist ein Nonius angebracht, der entgegengesetzt der Teilung (die 20′ zu 20′ geht) beziffert ist. Der Nonius ist so beschaffen, dass seine 20 Teile gleich 6° 20′ sind. Es soll die Angabe des Nonius berechnet werden.

**Auflösung.** Da 20 Teile des Nonius gleich 6° 20′ also 380′ sind, so ist der Wert eines Teiles gleich:

$$\frac{380'}{20} = 19'$$

Der Massstabteil beträgt aber 20′, also ist die Angabe des Nonius gleich:

$$20' - 19' = 1'$$

d. h. mit Hilfe des Nonius können an diesem Instrumente einzelne Minuten abgelesen werden.

---

**Aufgabe 27.** An dem soeben besprochenen Instrumente wurde ein Winkel bestimmt. Der Nullpunkt des Nonius steht zwischen:

$$27^0\,20'$$

und:

$$27^0\,40'$$

Ferner sieht man, dass der 8. Strich des Nonius mit dem 30⁰-Strich übereinstimmt. Welches war der eingestellte Winkel?

**Antwort.** Da die Angabe des Nonius gleich 1′ ist, so ist der gewonnene Winkel gleich:

$$27^0\,20' + 8 \cdot 1'$$

d. h.:

$$27^0\,28'$$

---

**Aufgabe 28.** Man gebe den allgemeinen Gang, den man beim Ablesen eines Kreisinstrumentes mit Nonius zu befolgen hat, an.

**Auflösung.** Man bringt zunächst den Nullpunkt des Nonius auf den Nullpunkt der Kreisteilung. Es wird dann ein Strich des Nonius mit einem solchen der Kreisteilung übereinstimmen. Hierauf sieht man, wieviel Noniusteile wievielen Kreisteilungsteilen entsprechen, und berechnet hieraus die Angabe des Nonius.

Ist sodann ein Winkel abzulesen, so wird zu der dem Nullpunkte des Nonius vorangehenden Kreisteillesung so oftmals die Angabe des Nonius hinzugefügt, als derjenige Noniusteil anzeigt, welcher mit einem Kreisteilungsteil übereinstimmt. Vergl. Erkl. 37.

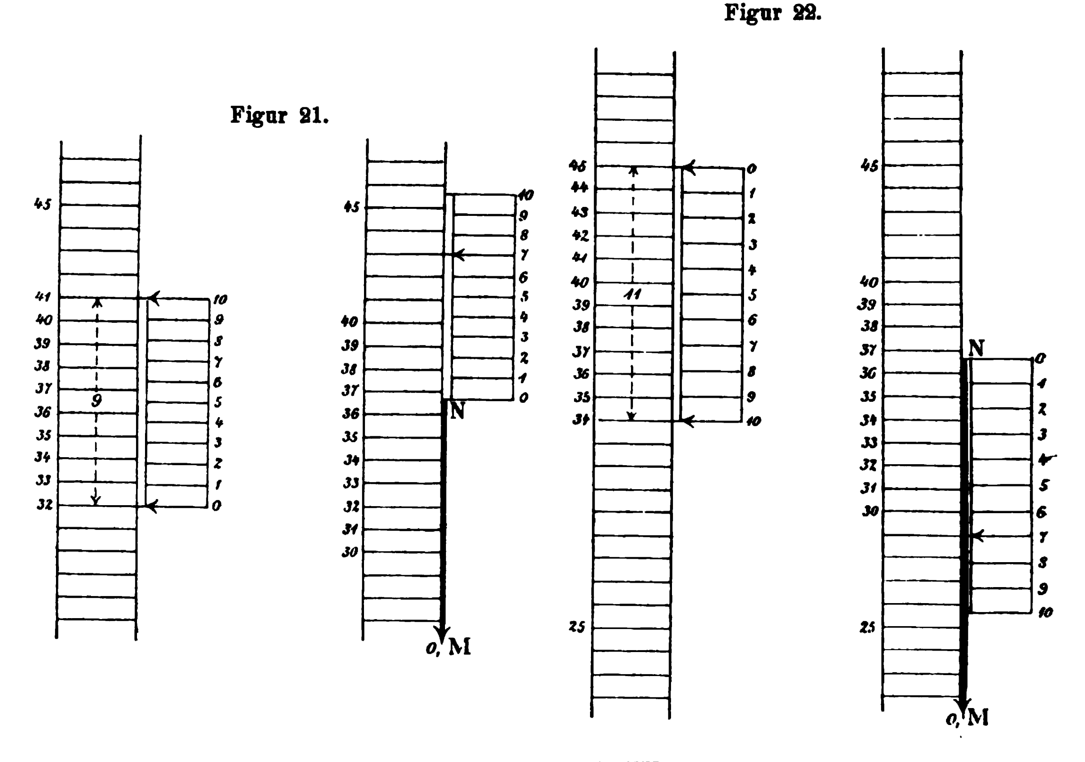
**Erkl. 87.** Es kann vorkommen, dass kein Strich des Nonius vollkommen mit einem Strich des Massstabes zusammenfällt, sondern dass es zwei zu sein scheinen. Dann untersucht man, ob zu beiden Seiten der vermuteten Treffpunkte zwischen den gleich wievielten Teilstrichen gleiche Abstände auftreten. Ist dieses der Fall, so nimmt man einen Teil Mitte der Lesung an. (Z. B. hätte man bei der vorhergehenden Aufgabe gefunden, dass entweder der 8. oder der 9. Strich des Nonius mit einem Kreisteilungsstrich übereinstimmt, so wäre die Lesung 8,5 also der Winkel:

27° 28′ 5)

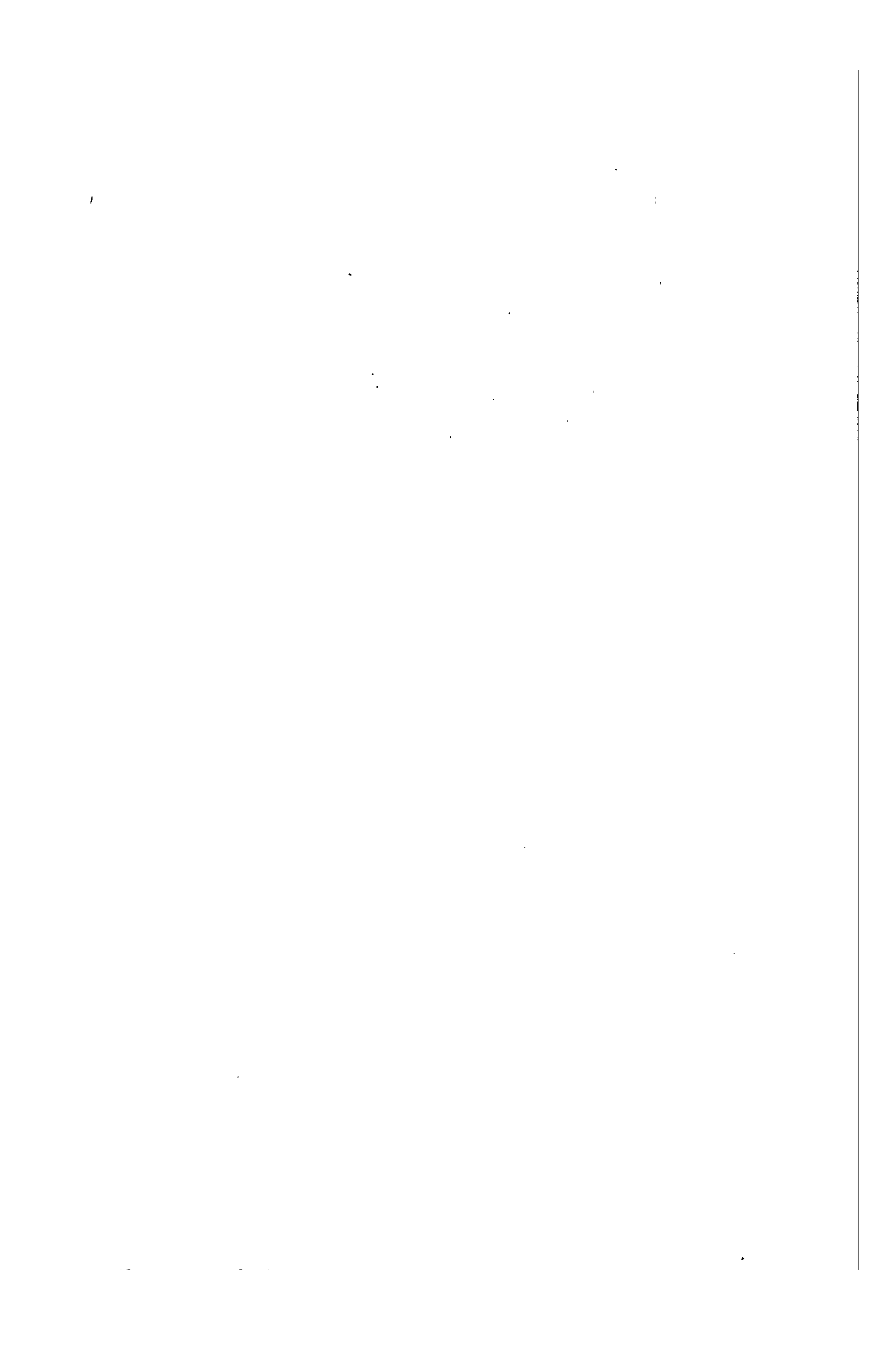
Wenn nicht, so entscheidet man sich für jenen Teil, dem kleinere Abstände folgen oder vorangehen.

## 9. Ungelöste Aufgabe.

Man bestimme an nachfolgenden Nonien (vergl. Figur 21 und 22) die Ablesung und die Art des Nonius.



Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

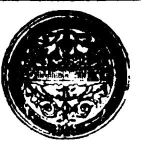


1275. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Vermessungskunde (Geodäsie). Forts. v. Heft 1274. — Seite 33—48. Mit 27 Figuren.





# Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

**Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten**

erläutert durch

**viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,**

aus allen Zweigen

der **Rechenkunst,** der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — **aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie**; des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's**; der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar-** u. **Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

**zum einzig richtigen und erfolgreichen**

**Studium,** zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

**Dr. Adolph Kleyer,**

Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

# Vermessungskunde

## (Geodäsie.)

Nach **System Kleyer** bearbeitet von **Dr. W. Láska.**

Fortsetzung von Heft 1274. — Seite 33—48. Mit 27 Figuren.

**Inhalt:**



**Stuttgart 1894.**

Verlag von Julius Maier.

**Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.**

# PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch **alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die **gehabten Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen** in **allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, **Dr. Kleyer,** Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

**Stuttgart.** **Die Verlagshandlung.**

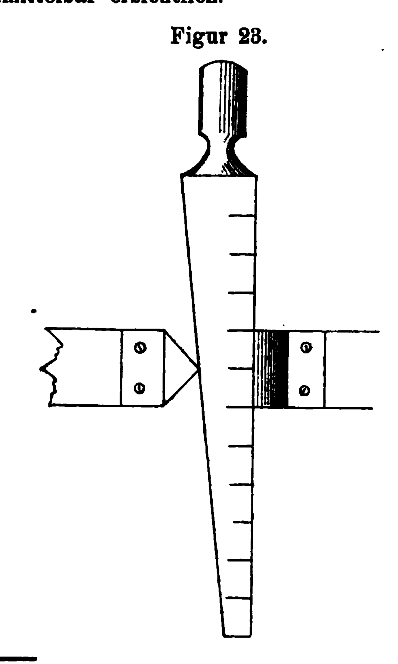
## 10. Ueber den Messkeil und die Messschraube.

**Frage 23.** Was versteht man unter einem Messkeil?

**Antwort.** Unter einem Messkeil versteht man einen gewöhnlich aus Glas oder Stahl verfertigten Keil, der an seinen Seitenflächen die seine Dicke in Millimetern bezeichnende Skala trägt. Die Länge ist im Verhältnis zur oberen Dicke wie etwa 10 zu 1. Die Genauigkeit der Messung schwankt zwischen 0,1 und 0,01 mm.

Die Anwendung ist aus der Figur 23 unmittelbar ersichtlich.

Figur 23.



**Erkl. 88.** „Die Erfahrung lehrt, dass es für genaue Messungen gerader Linien nicht gut ist, die aneinander zu reihenden Massstäbe sich dicht berühren zu lassen, weil dadurch leicht eine Verschiebung des einen oder anderen bewirkt werden kann. Auf Grund dieser Erfahrung hat Reichenbach (Georg von, geb. 1772 zu Durlach, gest. 1826 zu München, berühmter Mechaniker) vorgeschlagen: erstens die metallenen Massstäbe an ihren Enden in scharfe Kanten auslaufen zu lassen, welche senkrecht zu einander stehen; zweitens diese Stäbe bei der Messung so in die gerade Linie zu legen, dass sich immer eine lotrechte und eine wagrechte Kante gegenüberstehen, ohne sich zu berühren; und drittens den Abstand beider Kanten durch einen dazwischen geschobenen Keil, dessen Dicke an jeder Stelle bekannt ist, zu messen.“ Nach dieser Notiz von Bauerfeind ist Reichenbach der Erfinder des Messkeils.

---

**Frage 24.** Wann wird der Messkeil angewandt?

**Antwort.** Der Messkeil wird in der Praxis wohl sehr selten angewandt und nur dann, wenn es sich um sehr genaue Messungen handelt.

---

**Frage 25.** Wie wird der Messkeil angewandt?

**Antwort.** Um die Anwendung des Messkeils am bequemsten darzuthun, wollen wir einen speziellen Fall betrachten. Ein Messkeil, dessen obere Seite $= b$ und dessen untere $= d$ (vergl. Figur 24) wurde zwischen zwei Massstäbe gelegt und sank bis zur Höhe $H$ unter.

Der Messkeil habe ferner die Länge $h$. Sodann besteht die Entfernung der beiden Massstäbe offenbar aus zwei Teilen. Einem

**Erkl. 89.** Was die Genauigkeit anbetrifft, die man mit einem genau gearbeiteten Messkeil erreichen kann, so ist zu bemerken, dass dieselbe eine ziemlich hohe ist.

Wir können ja $h$ bis auf 0,2 mm mit dem blossen Auge sicher schätzen. Dann wird, wenn wir das nebenstehende Beispiel anwenden, für $h = 60{,}2$

$$A' = 2{,}5 + \frac{602}{1000}\, 7{,}5 = 7{,}15 \text{ mm}$$

Daraus sehen wir, dass:

$$A' - A = 0{\cdot}015$$

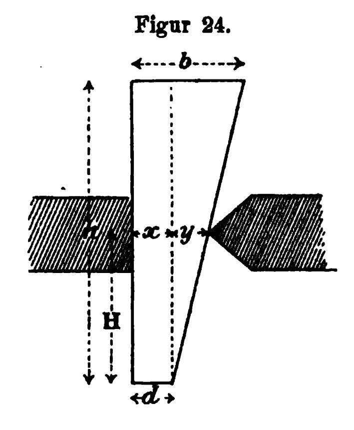
so dass wir Abstände hieraus bestimmen können, die um weniger als 0,02 mm von einander verschieden sind.

Auch wenn man bloss auf 0,5 mm abliest, wird:

$$A' - A = 0{,}0375$$

also jedenfalls kleiner als 0,04 mm.

Figur 24.




Teile $x$, welcher gleich ist $d$ und einem Teile $y$, der aus der Proportion:

$$b - d : y = h : H$$

zu berechnen ist; es wird demnach der Abstand gleich:

$$A = d + \frac{H}{h}(b - d)$$

War z. B. $d = 2{,}5$ mm und $b = 10$ mm, ferner $h = 100$ m und $H = 60$ mm, so wird:

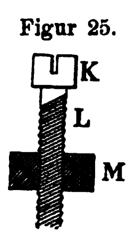
$$A = 2{,}5 + \frac{60}{100} \cdot 7{,}5 = 7 \text{ mm}$$

Was nun die Prüfung der Messkeile anbelangt, so ist zunächst darauf zu sehen, ob die Messflächen genau plan sind und zweitens ob die Teilung richtig ist. Die Richtigkeit der Teilung kann durch Abmessung mit einem Zirkel hinreichend genau geprüft werden. Schwieriger ist die Prüfung wegen Geradheit der Flächen. Man bedarf dazu einer plan parallel geschlissenen Glasfläche, auf welche der Keil gelegt wird. Indessen sind die Keile, von einer renommierten Firma bezogen, schon auf ihre Richtigkeit geprüft.

## Frage 26. Was ist eine Schraube?

**Erkl. 40.** Die Schraube soll Archytas aus Tarent, ein Zeitgenosse von Plato (400 vor Chr.) erfunden haben.

Figur 25.




**Erkl. 41.** Wir nennen eine Drehung Rechtsdrehung oder auch positive Drehung, wenn sie im Sinne des Uhrzeigers geschieht. Im anderen Falle entsteht eine Linksdrehung oder eine negative Drehung. Alle Schrauben gehen bei der Rechtsdrehung in den Instrumententeil hinein. Dem Anziehen der Schraube steht das Lüften (Oeffnen) derselben gegenüber. Bei dieser Definition wird vorausgesetzt, dass alle Drehungen vom Mittelpunkte des Schraubenkopfes aus gedacht werden.

**Antwort.** Die Schraube ist eine schiefe Ebene, welche auf die Mantelfläche eines Cylinders gewickelt ist. Man unterscheidet je nach der Verwendung:

Mikrometerschrauben,
Korrektionsschrauben,
Stellschrauben,
Klemmschrauben,
Befestigungsschrauben.

Eine jede Schraube (vergl. Figur 25) besteht aus einem

Schraubenkopf ($K$),
Schraubenkörper ($L$),
Schraubenmutter ($M$).

Denkt man sich einen Schnitt durch die Mitte der Schraube geführt (vergl. Figur 26), so erhält man eine Reihe von Dreiecken, deren Basis ($AB$) die sogen. G a n g h ö h e ist und deren Höhe ($CD$) die G a n g t i e f e darstellt. Der Winkel:

$$\alpha = \sphericalangle ACB$$

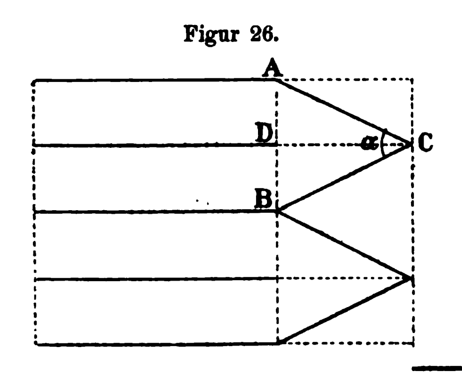
stellt die G a n g f o r m dar.

Ist die Ganghöhe gleich der Gangtiefe, so ist:

$$\alpha = 53^0\,8'$$

Nach den Normen des ersten Mechanikertages vom Jahre 1889 (vergl. Zeitschrift für Instrumentenkunde 1889, Novemberheft) wird

Figur 26.




dieser Winkel allgemein zur Einführung empfohlen.

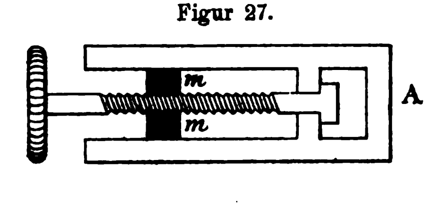
Die Ganghöhe einer Schraube bestimmt man am einfachsten und für die gewöhnliche Verwendung hinreichend genau durch Aufdrücken der Schraube auf ein Papier und Anlegen eines Massstabes. Hat man gefunden, dass z. B. 20 Striche am Papier = 25 mm gleichen, so wird die Ganghöhe gleich:

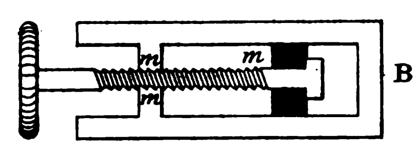
$$\frac{25}{20} = \frac{5}{4} \text{ mm.}$$

---

**Frage 27.** In welcher Weise wirkt die Schraube?

Figur 27.




**Antwort.** Man unterscheidet zweierlei Arten der Schraubenwirkung, je nachdem die Schraubenmutter längs des Schraubengewindes fest oder beweglich ist (vergl. Figur 27; A: die Schraubenmutter *m* ist beweglich, B: die Schraubenmutter *m* ist fest). Bei einer Schraube mit fester Mutter (B) geht die Bewegung des verschiebbaren Teiles im Sinne der Schraubendrehung, also mit der Schraube; ist die Mutter beweglich, dann erfolgt ihre Bewegung gegen die Schraube.

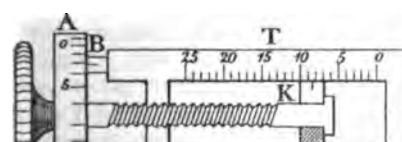
Hier interessiert uns vorzüglich die Mikrometerschraube; von den anderen Schrauben wird dort die Rede sein, wo sie als Bestandteile eines Instrumentes vorkommen.

---

**Frage 28.** Was ist eine Mikrometerschraube?

**Antwort.** Unter einer Mikrometerschraube wird eine sehr fein gearbeitete Schraube verstanden, welche mit einem Mechanismus verbunden ist, der ihre Bewegung an einer Teilung sichtbar macht.

Figur 28.

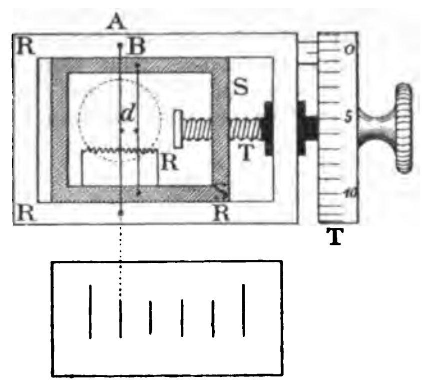



Um das Wesen der Mikrometerschraube klar zu machen, betrachten wir die Figur 28, welche eine Mikrometerschraube darstellt, die zur Bestimmung von Drahtstärken (bis auf 0,01 mm genau) dient. Die Ganghöhe der Schraube beträgt 1 mm, der Schraubenkopf *A* ist in eine 100teilige Trommel umgewandelt. Eine Trommelumdrehung schiebt den Index *K* um 1 mm und ändert die Distanz *i* um dieselbe Grösse. Der feste Index *B* zeigt den jeweiligen Stand der Schraube an.

Der Gebrauch ist einfach. Man bringt den Gegenstand zwischen *BB* und dreht die Trommel *A*, solange es geht. Darauf liest man an der Teilung *T* die ganzen Millimeter und an der Teilung der Trommel die Hundertel-Millimeter ab.

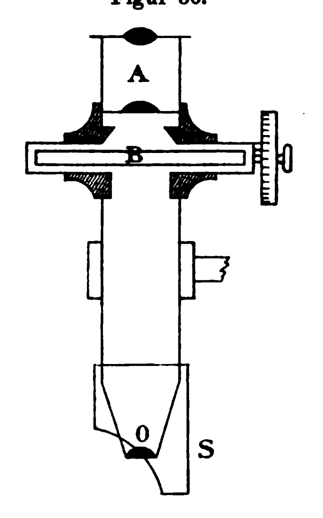
**Frage 29.** Was ist ein Schraubenmikroskop?

Figur 29.




**Erkl. 42.** Die Schraube als Mittel zur Ablesung kleiner Gleichungen wurde von Hooke (1665), einem berühmten Zeitgenossen Newtons, eingeführt. Das Fadenkreuz wurde zuerst von Adrien Auzout († 1691) in ausgedehnter Weise verwendet. Seine Erfindung gehört der Mitte des 17. Jahrhunderts. Das Schraubenmikroskop wurde gegen das Ende des vorigen Jahrhunderts von Ramsden in der gegenwärtigen Form gefertigt.

Figur 30.




**Antwort.** Das Schraubenmikroskop ist eine Verbindung der Mikrometerschraube mit einem optischen Vergrösserungssystem (gewöhnlich Mikrometer). Das Schraubenmikroskop besteht demnach:

a) aus der Mikrometervorrichtung,

b) aus dem Vergrösserungssystem.

Die Mikrometervorrichtung (vgl. Fig. 29) besteht aus einem beweglichen Rahmen $s\,s$ (Schlitten genannt), der mit einem Faden $B$ (oder seltener mit einem Fadenkreuz) versehen ist. Dieser Schlitten ist mittelst der Mikrometerschraube $T$ in dem Rahmen $R$ beweglich, welcher einen Faden (oder häufiger ein Fadenkreuz) trägt. Durch die Mikrometerschraube also wird im vorliegenden Falle die Fadendistanz:

$$AB = d$$

gemessen. Die Fäden des Mikrometers müssen genau in die Bildebene des Okulars fallen. Dort decken sie sich mit dem Bilde des zu messenden Objektes (gewöhnlich Teilung eines Kreises).

Um die vollen Umdrehungen der Schraube zählen zu können, ist im Gesichtsfelde ein Rechen $R$ angebracht. Dieser Rechen ist nichts anderes als ein genau gearbeiteter Schnitt durch die Mitte der Schraube. Die Entfernung zweier Zahnspitzen entspricht genau der Ganghöhe der Schraube, also einer vollen Umdrehung der Schraube selbst. Man zählt also die vollen Umdrehungen am Rechen und ihre aliquoten Teile an der Trommel ab.

Die Figur 30 zeigt das Schraubenmikroskop im Durchschnitt. $A$ ist das Okular, $B$ die Mikrometervorrichtung, wie sie oben beschrieben wurde, $O$ das Objektiv und $S$ ein Lichtschirm, welcher durch Lichtreflexion die abzulesende Teilung beleuchtet.

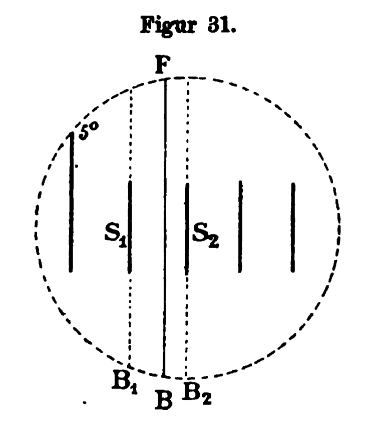
---

**Frage 30.** Wie gebraucht man ein Schraubenmikroskop?

**Antwort.** Das Schraubenmikroskop wird wie folgt gebraucht. Man bestimmt sich zunächst den Wert einer Trommelumdrehung in folgender Weise: Angenommen, das Mikroskop sei über einer Limbusteilung, die von 10′ zu 10′ geht, angebracht. Man bringe

**Bemerkung.** Soll das Schraubenmikroskop zur Ausmessung von Längen dienen, so wird eine möglichst genau geteilte Millimeterskala in analoger Weise behandelt. Man muss aber, da die Längenmassstäbe gewöhnlich nicht so genau geteilt sind wie die Kreisumfänge, an möglichst vielen Stellen die Untersuchung wiederholen.

Figur 31.




**Bemerkung.** Führt man eine derartige Untersuchung durch und zwar an möglichst vielen Orten der Teilung, die sich womöglich gleichmässig über die Teilung erstrecken, so stellt der Mittelwert einen Pars (Teil) der Trommel dar. Es muss nun angenommen werden, dass weder die Schraube mathematisch genau gearbeitet, noch die untersuchte Teilung fehlerfrei ist.

Um sich eine Uebersicht der vorhandenen Fehler zu verschaffen, bilde man die Differenzen der Einzelbestimmungen gegen das Mittel. Ergibt sich ein periodisches Anwachsen der Abweichungen, dann müssen Tafeln entworfen werden, welche die Grösse der Fehler angeben.

Diese Tafeln müssen bei genauen Messungen immer berücksichtigt werden.

den beweglichen Faden mit einem Teilungsstrich zur Koinzidenz und lese den Stand der Trommel ab ($A$). Hierauf drehe man die Trommel so lange, bis der bewegliche Faden den benachbarten Teilstrich deckt und lese wieder den Stand der Trommel ab ($A'$). Nehmen wir an, es seien $n$ volle Umdrehungen der in 100 Teile geteilten Trommel hiezu notwendig gewesen, dann werden

$$n \cdot 100 + (A' - A)$$

Trommelpartes entsprechen einem Weg des beweglichen Fadens um 10'; wir haben also:

$$\frac{10'}{n \cdot 100 + (A' - A)}$$

als den Wert eines Pars der Trommel.

Dieser Wert bleibt solange konstant, solange die Entfernungen des Objektivs und der Limbusteilung vom Okular sich nicht ändern.

Hat man einmal den Wert eines Skalenteiles der Trommel bestimmt, so wird das Mikroskop in folgender Weise zur Ablesung gebraucht:

Hat man irgend ein Objekt am Fernrohr eingestellt, so gibt der feste Faden im Mikroskop seine Richtung an. Nehmen wir wie oben die Teilung von 10' zu 10' an, und ferner, dass die Figur 31 dem Mikroskopbilde entspreche. $F$ sei der feste Faden. Wir sehen, dass die Richtung:

$$> 5^0\,10', \text{ aber } < 5^0\,20'$$

ist. Nehmen wir an, wir hätten den Wert eines Trommelpars zu 1'' gefunden. Dann bringen wir den beweglichen Faden zuerst mit dem Striche $S_1$ der Teilung zur Koinzidenz und lesen den Stand der Trommel $B_1$; sodann bringen wir den beweglichen Faden mit dem festen zur Koinzidenz und lesen den Stand $B$ ab; endlich bringen wir den beweglichen Faden mit dem Striche $S_2$ zur Koinzidenz und lesen den Stand $B_2$ ab, dann ist der Wert der Richtung gleich:

$$5^0\,10' + (B - B_1) \cdot 1''$$

oder:

$$5^0\,20' - (B_2 - B) \cdot 1''.$$

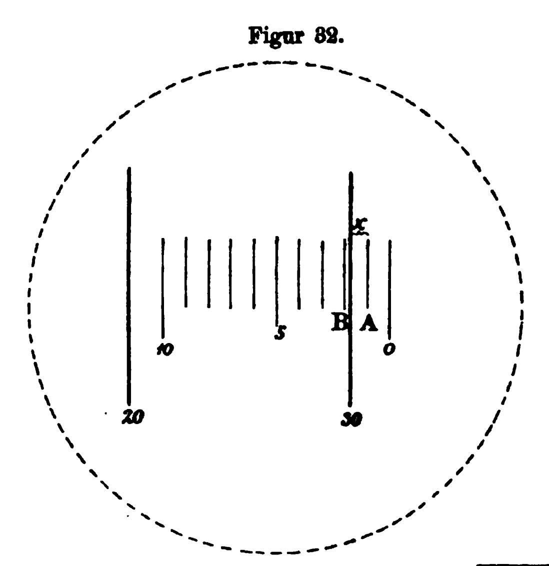
Dabei werden in den Differenzen $B_2 - B$ und $B - B_1$ die etwaigen Vollumdrehungen der Schraube mitgezählt.

---

**Frage 31.** Was ist ein Schätzmikroskop?

**Antwort.** Wird die Mikrometervorrichtung eines Schraubenmikroskops durch eine auf Glas eingeätzte Teilung ersetzt, so entsteht ein Schätzmikroskop. Der mit $O$ bezeichnete Strich der Glasteilung (vergl. Figur 32) gibt die Visierrichtung an. In der Figur ist ein Teil einer Teilung von 10'

Figur 32.




zu 10′ gezeichnet (Striche 30, 20). Das Intervall von 10′ wird durch die Glasteilung in 10 Teile geteilt, die gezählt werden, während man das Stück $x$ zwischen 0 und 30 abschätzt. Die Ablesung würde lauten:

30′0
+ 1′0 (= $OA$ in der Figur)
+ 0′8 (= $x$ in der Figur)

also:
31,8′, d. i. 31′ 48″

Das Schätzmikroskop ist zwar nicht so genau wie das Schraubenmikroskop, aber man arbeitet damit rasch.

**Frage 32.** Was versteht man unter dem Abstimmen eines Mikroskops?

**Antwort.** Es geschieht, dass die eine volle Schraubenumdrehung nicht genau einem Intervall der Limbusteilung entspricht oder dass die Glasteilung des Schätzmikroskops nicht genau (0 bis 10) dem Intervall (20 bis 30) der Limbusteilung gleicht. Man sagt dann, das Mikroskop sei nicht abgestimmt. Um dasselbe abzustimmen, muss die Objektivröhre gegen den Massstab passend verschoben werden.

Ist einmal die Abstimmung gelungen, dann darf das Objektiv nicht mehr angerührt werden, denn sonst geht die Abstimmung verloren. Man gebe daher seine Instrumente mit Mikroskopen niemand in die Hand.

**Bemerkung.** Es ist klar, dass die Abstimmung nur für ein bestimmtes Auge gilt. Soll daher ein Instrument von mehreren Personen mit verschiedener Sehweite gebraucht werden, so muss dasselbe für die normale Sehweite abgestimmt werden, und ein jeder Beobachter muss, wenn seine Sehweite von der normalen abweicht, eine passende Brille tragen.

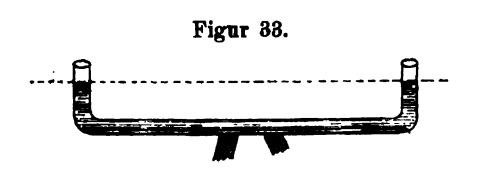
## 11. Ueber die Libelle.

**Frage 33.** Was ist eine Libelle?

**Antwort.** Die Libelle (Wasserwage, Niveau) ist ein Instrument, welches zur Bestimmung der horizontalen Lage und zur Messung kleiner Winkel dient und darauf beruht, dass die freien Flüssigkeitsoberflächen stets bestrebt sind, horizontale Niveaus zu bilden (vergl. Erkl. 43).

Man unterscheidet Dosen- und Röhrenlibellen.

Figur 33.



**Erkl. 48.** Das Wort Libelle stammt vom lateinischen libra, libella Wage. Die Libelle des Altertums bestand aus zwei kommunizierenden Röhren, an welchen Horizontalmarken angebracht waren (vergl. Figur 33).

Der Erfinder der Röhrenlibelle ist nach R. Wolf, Handbuch der Astronomie, Melch. Thévenot,

der sie um 1660 erfunden und 1666 in dem Werke: Machine nouvelle pour la conduite les eaux, pour les bâlimens etc., Paris, 8⁰, beschrieben hat. Um diese Zeit (28. Nov. 1666) war sie aber bereits dem Mechaniker Chapotot in Paris und in England auch Hooke bekannt.

---

**Frage 34.** Woraus besteht eine Dosenlibelle?

Figur 34.



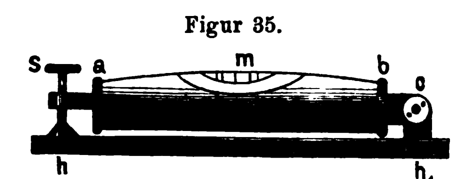

**Antwort.** Eine Dosenlibelle besteht aus einem Gefäss von Messing mit einer eben abgeschliffenen Grundfläche, welches oben mit einem Glasdeckel versehen ist, welcher innen nach einem Kugelradius von 0,5 bis 1 m abgeschliffen ist. Dieses Gefäss wird mit Alkohol so weit gefüllt, dass bei horizontaler Lage des Bodens nur ein kleiner Kugelabschnitt frei bleibt, die sogen. Luftblase. Oben auf dem Glase ist noch ein Kreis eingeritzt, welcher die Stellung der Luftblase angibt für den Fall, dass der Boden der Libelle horizontal steht. Dieser Kreis führt den Namen Mittelmarke (vergl. Figur 34).

Die Dosenlibelle dient nur zur genäherten Horizontalstellung, während die zu beschreibende Röhrenlibelle zu präziser Horizontalstellung, auch zur Messung sehr kleiner Neigungswinkel verwendet werden kann.

---

**Frage 35.** Woraus besteht die Röhrenlibelle?

Figur 35.




**Antwort.** Die Röhrenlibelle besteht aus einem gebogenen Glasrohr (vergl. Figur 35) von möglichst grossem Biegungsradius. Dieses Rohr ist mit Weingeist gefüllt und zwar so, dass wie bei Dosenlibellen eine Luftblase zurückbleibt, und auf einer Unterlage aus Messing befestigt. Das Libellenrohr ist oben mit einer in das Glas eingeätzten Einleitung versehen, die gewöhnlich von 0 nach beiden Seiten hin von der Mitte ausgeht nach dem Schema:

$$-4, -3, -2, -1, 0, 1, +2, +3, +4, +\cdots$$

Beträgt z. B. die Länge der Luftblase sechs solche Teile und steht das eine Ende bei $+3$, das andere bei $-3$, so ist die Unterlage der Libelle genau horizontal, vorausgesetzt, dass die Libelle richtig ist. Um sich von der Richtigkeit der Libelle, soweit es für unsere Zwecke nötig ist, zu überzeugen, lege man sie auf irgend eine Fläche, so dass sie auf bestimmte Zahlen einspielt, z. B.:

$$+2 \qquad -4$$

sodann lege man die Libelle um, so dass das eine Ende genau in die frühere Lage des anderen kommt und umgekehrt. Dann muss; falls die Libelle richtig ist, die Blase wieder so stehen, und zwar:

**Erkl. 44.** Obschon die Libellen, die in den Handel kommen, in der Regel schon rektifiziert sind, so wollen wir dennoch einiges über die Rektifikation sagen. Gesetzt, wir hätten die I. Stellung:

Ost $a \quad -4 \qquad +2 \quad b$ West

so steht der Mittelpunkt der Blase offenbar bei dem Teile:

$$\frac{1}{2}(-4+2) = -1$$

Und würde die Umlegung folgendes Bild liefern:

Ost $b$ $+0$ $+6$ $a$ West

so wissen wir, dass bei der zweiten Lage der Mittelpunkt:

$$\frac{1}{2}(0+6) = +3$$

steht. Die Differenz beträgt also:

$$+3-(-1) = +4$$

Skalenteile. Um diese wegzuschaffen und auf Null zu bringen, drehen wir die Schraube so lange, bis in dieser zweiten Lage der Nullpunkt auf $+2$ steht, welches genau die Hälfte der Differenz ist, dann haben wir:

Ost $b$ $-2$ $+2$ $a$ West

und wenn wir die Libelle umlegen:

Ost $b$ $-2$ $+2$ $a$ West

wodurch die Libelle rektifiziert ist. Weiteres über die Libelle wird bei dem Nivellierinstrument gesagt, woselbst auch die verschiedenen Befestigungsarten namhaft gemacht werden.

$+2$ $-4$

wenn die Zahlen in derselben Richtung gezählt werden. Also z. B. seien die beiden Enden der Libelle $a$ und $b$, und die Richtung Ostwest-Richtung, und wir zählen nach Ost negativ und nach West $+$ vom Nullpunkte aus, dann wird die erste Stellung:

Ost $a$ $-4$ $+2$ $b$ West

und die zweite:

Ost $b$ $-4$ $+2$ $a$ West

d. h. durch das Umlegen der Libelle, darf die Lage der Luftblase gegen die Richtungen Ost und West nicht geändert werden. Ist dieses nicht der Fall, so muss mit Hilfe der Schraube $S$ (vergl. Figur 35) die Libelle rektifiziert werden (siehe Erkl. 44).

Der Abstand der Luftblasenmitte von der Nullmarke heisst der **Ausschlag**. In dem besprochenen Falle war der Ausschlag offenbar:

$$\frac{1}{2}(-4+2) = -1$$

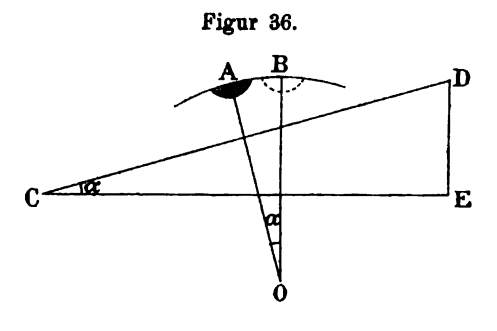
d. h. die Luftblasenmitte stand um einen Teil gegen Ost von der Nullmarke.

**Frage 36.** Was versteht man unter der Empfindlichkeit der Libelle.

**Antwort.** Unter der Empfindlichkeit der Libelle versteht man den einer Ausschlagänderung von 1 Strich der Libellenteilung entsprechenden Neigungswinkel der Grundfläche gegen die Horizontale. Unter dem Ausschlag versteht man im allgemeinen den Abstand der Blasenmitte von dem Nullpunkt der Glasteilung.

**Frage 37.** Wie wird die Empfindlichkeit der Libelle bestimmt?

Figur 36.




**Antwort.** Das Prinzip der Bestimmung der Empfindlichkeit einer Libelle besteht im folgenden:

Man nehme an, dass die Libelle nach der Erkl. 44 rektifiziert ist. Alsdann wird sie auf eine geneigte Fläche vom bekannten Neigungswinkel gestellt. Die Blasenmitte wandert nun (vergl. Figur 36) von $A$ nach $B$, d. h. um $p$ Striche.

Es entsprechen also:

$p$ Striche dem $\sphericalangle\,\alpha$

Der Winkel $\alpha$ kann leicht bestimmt werden aus dem rechtwinkligen $\triangle\,CDE$, woselbst ist:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{DE}{CE}$$

oder da $\alpha$ sehr klein ist:

$$\alpha'' = \frac{DE}{CE} \cdot \frac{1}{\sin 1''}$$

**Bemerkung.** Die Funktion der Libelle muss öfters untersucht werden. Dieses gilt insbesondere für ältere Libellen. Es ist eine sehr oft gemachte Erfahrung, dass die Libellen mit der Zeit ganz unbrauchbar werden. Damit ist aber, wenn dieses bei der Feldarbeit ohne erkennbaren Grund stattfindet, stets ein erheblicher Zeitverlust verbunden, wenn nicht gar die Wiederholung der ganzen Arbeit.

Damit wird die Empfindlichkeit in Bogensekunden der Libelle gleich:

$$\frac{1}{p}\;\frac{DE}{CE}\;\frac{1}{\sin 1''}$$

Die Empfindlichkeit der gewöhnlichen Libellen bei kleineren Theodoliten beträgt etwa 30″, bei sehr feinen Libellen auf Nivellierinstrumenten 5″. Die feinsten Libellen der astronomischen Instrumente haben eine Empfindlichkeit von 1″. Alle diese Werte beziehen sich auf eine Strichlänge von 3 mm. Ist die Empfindlichkeit bekannt, dann kann man die Neigung, d. h. den Winkel $\alpha$ der vorhergehenden Erörterung bestimmen, man braucht bloss die Verschiebung der Blasenmitte, in Strichen ausgedrückt, mit der Empfindlichkeit zu multiplizieren.

## II. Mittel zur optischen Vergrösserung der Gegenstände.

**Frage 38.** Welche Mittel besitzt man, um naheliegende Gegenstände zu vergrössern?

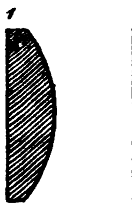
**Antwort.** Um nahe Gegenstände zu vergrössern, benützt man Lupen und Mikroskope.

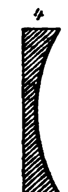
**Frage 39.** Was ist eine Lupe?

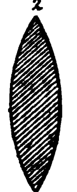
**Antwort.** Die Lupe oder das Vergrösserungsglas ist eine aus Glas gefertigte Linse, deren Begrenzung durch nahezu kugelige Flächen gebildet wird.

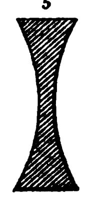
**Frage 40.** Welche Arten der Lupen unterscheidet man in Bezug auf die Grenzflächen?

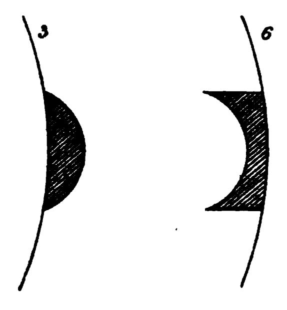
Figur 37.










**Antwort.** Man unterscheidet konvexe und konkave Linsen. Die konvexen können wieder (vergl. Figur 37)

1) plan-konvex
2) bi-konvex
3) konkav-konvex
} Die konvexe Fläche hat einen kleineren Radius

sein, ebenso können die konkaven

4) plan-konkav
5) bi-konkav
6) konvex-konkav
} Die konkave Fläche hat einen kleineren Radius

sein.

Die Figur 37 zeigt mit gleicher Zählung die einzelnen typischen Formen im Durchschnitt, so dass eine weitere Beschreibung nicht nötig ist.

**Frage 41.** Welches sind die Hauptelemente der geometrischen Figur der Linse.

Figur 38.

**Antwort.** Die Hauptelemente der geometrischen Figur der Linse sind:

1) Die geometrischen Mittelpunkte, d. h. die Mittelpunkte der beiden die Linse begrenzenden Kugelflächen ($M_1 M_2$, siehe Figur 38).

2) Die Scheitelpunkte, d. h. die Schnittpunkte ($A_1 A_2$) der die beiden Mittelpunkte verbindenden Achse der Linse, mit den Linsenflächen.

3) Die Linsendicke, d. h. der Abstand der beiden Scheitelpunkte von einander, d. h. die Länge $A_1 A_2$.

---

**Frage 42.** Wie wirkt eine brechende Fläche?

Figur 39.

**Erkl. 45.** Ein optisches Gesetz lautet: geht ein Strahl aus einem Mittel in ein anderes verschieden dichtes Mittel über, so wird er gebrochen. Seien $\alpha$ der Winkel, den der eintretende Strahl mit der Normale auf die Grenzfläche der beiden Medien bildet, und $\beta$ der Winkel des Austrittsstrahls, so ist:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_1}{n_2}$$

wobei $n_1$ den Brechungsindex des ersten und $n_2$ den Brechungsindex des zweiten Mittels bezeichnet.

**Erkl. 46.** Ein Satz aus der Optik lautet: der ursprüngliche und der gebrochene Strahl liegen in einer Ebene. Vergl. Klimpert, Lehrbuch der Optik.

**Antwort.** Sei $F$ (vergl. Figur 39) eine brechende Kugelfläche mit dem Radius $R$ und dem Mittelpunkt $M$.

Fällt nun ein Strahl $S$ auf die Kugeloberfläche, so wird er gebrochen und da das Glas ein dichteres Medium ist als die Luft, nach dem Gesetze der Brechung zum Einfallslote also so, dass (vergl. Figur 39 und Erkl. 40):

$$\sphericalangle \alpha > \sphericalangle \beta$$

für Luft und Glas ist genähert:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{3}{2}$$

In dieser Formel ist das Grundgesetz der Dioptrik ausgesprochen und alle Entwicklungen, die wir vornehmen, beruhen auf ihr.

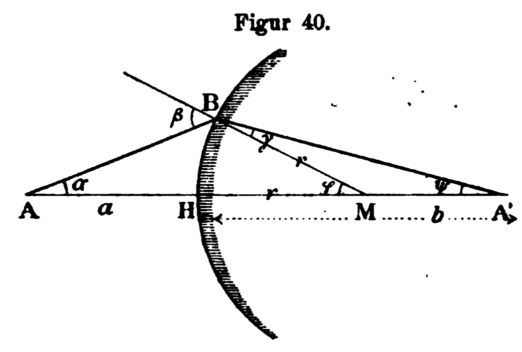
Betrachten wir nun einen Strahl, der von einem Achsenpunkte, etwa $A$, ausgeht, unter einem Winkel $\alpha$ (vergl. Figur 40). Derselbe trifft die brechende Fläche in $B$ unter einem Winkel $\beta$ und wird unter einem Winkel $\gamma$ gebrochen, wobei:

$$\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{n_1}{n_2} = n$$

und trifft (vergl. Erkl. 46) die Achse in einem Punkte $A'$. Um die Lage dieses Punktes kennen zu lernen, müssen wir die Strecke $HA' = b$ bestimmen.

Wir haben aus dem $\triangle AMB$ ($M$ der Mittelpunkt der brechenden Fläche, $AH = a$ die Entfernung des Punktes von der Fläche, $HM = r$ der Radius der brechenden Fläche) nach dem Sinussatze:

Figur 40.




**Bemerkung.** Die nebenstehend betrachteten Fälle stellen die Verhältnisse bei dem Durchgang eines Strahls durch eine bi-konvexe Linse getrennt dar. Man beachte wohl, dass sie nur genäherte Formeln enthalten und auch nur für homogenes Licht gelten.

**Erkl. 47.** Man hat, wenn man ausmultipliziert:

$$nab - nar = ab + rb$$

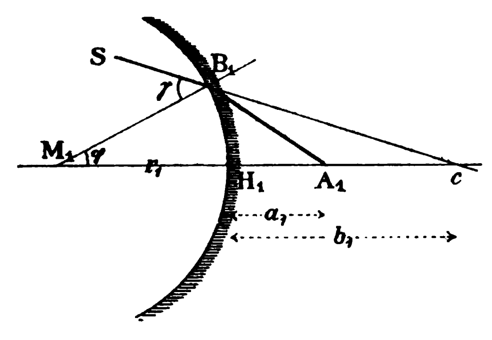
also durch $abr$ dividiert:

$$\frac{n}{r} - \frac{n}{b} = \frac{1}{r} + \frac{1}{a}$$

also:

$$\frac{1}{a} + \frac{n}{b} = \frac{1}{r}(n-1)$$

Figur 41.




**Bemerkung.** Bei den Vernachlässigungen, die wir uns erlaubt haben, kann man noch ohne weiteres die Dicke der Linse vernachlässigen, sodann wird:

$$n\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b_1'}\right) = 0$$

Es handelt sich ja in der Praxis zumeist darum, nur eine Uebersicht der Erscheinungen zu erhalten. Anders wird aber die Sache, wenn es sich um die Konstruktion von grossen Objektivgläsern handelt. Dann müssen strenge Formeln gebraucht werden. Ihre Entwicklung erfordern indess unsere Zwecke nicht.

$$\frac{\sin(180^0 - \beta)}{\sin\varphi} = \frac{AM}{AB} = \frac{a+r}{AB}$$

und im $\triangle MBA'$:

$$\frac{\sin(180^0 - \varphi)}{\sin\gamma} = \frac{A'B}{MA'} = \frac{AB}{b-r}$$

so dass wir also haben, wenn wir multiplizieren:

$$\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = n = \frac{(a+r)\cdot A'B}{AB(b-r)}$$

Da $\alpha$ immer bei einer praktischen Anwendung ein kleiner Winkel ist, so kann man sich erlauben:

$$AB = AH = a$$
$$A'B = A'H = b$$

zu setzen, so dass man hat:

$$n = \frac{(a+r)\,b}{a\,(b-r)}$$

oder (vergl. Erkl. 47):

$$\text{I} \ldots \frac{1}{a} + \frac{n}{b} = \frac{1}{r}(n-1)$$

Betrachten wir jetzt einen anderen Fall. Ein Strahl $SB$ treffe ein Fläche vom Radius $r_1$ (vergl. Figur 41), auf der konkaven Seite. Dann ist im $\triangle M_1 A_1 B_1$:

$$\frac{\sin(180 - \beta)}{\sin\varphi} = \frac{M_1 A_1}{B_1 A_1} = \frac{a_1 + r}{A_1 B_1}$$

und im $\triangle M_1 B_1 C$:

$$\frac{\sin\varphi}{\sin(180 - \gamma)} = \frac{B_1 C}{M_1 C} = \frac{b_1'}{r_1 + b_1'}$$

so dass wir haben analog wie oben:

$$n = \frac{(a_1 + r_1)\,b_1'}{A_1 B_1 \cdot (r_1 + b_1')}$$

oder wenn man sich erlaubt:

$$B_1 A_1 = a_1$$

zu setzen:

$$n = \frac{(a_1 + r_1)\,b_1'}{a_1\,(r_1 + b_1')}$$

oder:

$$\text{II} \ldots \frac{1}{a_1} - \frac{n}{b_1'} = \frac{1}{r_1}(n-1)$$

Betrachten wir nun den Durchgang durch eine bi-konvexe Linse, so sehen wir, dass er nur eine Kombination der von uns getrennten Fälle darstellt. Durch Addition der Formel I und 2 folgt:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a} + n\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b_1'}\right) = (n-1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right)$$

oder einfacher:

$$\text{III} \ldots \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a} = (n-1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right)$$

Mit Hilfe dieser Formel können wir alle Verhältnisse bei den Linsen studieren.

**Frage 43.** Wie verändert sich diese allgemeine Formel bei den verschiedenen Arten der Linsen?

**Bemerkung.** Wir nennen den Radius positiv, wenn er einer konvexen Fläche, dagegen negativ, wenn er einer konkaven Fläche angehört. Der Radius einer ebenen Fläche ist natürlich $\infty$ gross, daher sein reciproker Wert $= 0$.

**Bemerkung.** Nachdem die allgemeine Formel nur die Radien um den Abstand des leuchtenden Punktes enthält, so ist der Abstand für den Schnittpunkt mit der Achse eine konstante Grösse, d. h. alle von einem Punkte ausgehende Strahlen vereinigen sich wieder in einem Punkte, der das Bild des ersteren genannt wird. Dieser Satz ist keineswegs streng richtig, denn wir haben uns gewisse Vernachlässigungen erlaubt, um die Hauptformel III, auf welcher er beruht, beweisen zu können. Doch genügt er für die praktischen Bedürfnisse.

**Antwort.** 1) Bei der plan-konvexen Linse. Wir haben $r_1 = \infty$, so dass also:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a} = (n-1)\frac{1}{r}$$

2) Bei der konkav-konvexen Linse ist $r_1$ negativ und $r_1 > r$, also haben wir:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a_1} = (n-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)$$

3) Bei der plan-konkaven ist $r_1 = \infty$ und $r$ negativ, also:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a_1} = -(n-1)\frac{1}{r}$$

4) Bei den bi-konkaven haben wir $r_1$ und $r$ negativ, also:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a} = -(n-1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right)$$

Wir wollen nun den Punkt im Abstande $a$ das Objekt, und den Punkt im Abstande $a_1$ das Bild nennen. Beide zusammen bezeichnen wir mit dem Namen der konjugierten (d. h. zugeordneten) Punkte.

---

**Frage 44.** Was ist ein Brennpunkt?

**Erkl. 48.** Setzt man also in der Formel III:

$$a = \infty$$

so wird:

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right)$$

wobei $f$ die Entfernung des Brennpunktes von der Linse bezeichnet. Sie wird die Brennweite genannt. Besonders einfach gestaltet sich die Sache bei einer bi-konvexen Linse, für die $r = r_1$ ist. Da für Glas und Luft:

$$n = \frac{3}{2}$$

so folgt:

$$f = r$$

d. h. die Brennweite ist gleich dem Radius.

**Erkl. 49.** Zunächst wird:

$a_1$ positiv oder negativ,

je nachdem:

$$a \gtrless f$$

Man erhält im ersteren Falle hinter der Linse ein Bild, im letzteren aber nicht, da sich das Bild vor der Linse befindet auf der Seite des Objektes. Im ersteren Falle spricht man von einem physischen oder reellen Bilde, im letzteren von einem geometrischen oder virtuellen Bilde.

**Antwort.** Der Brennpunkt ist der Vereinigungspunkt paralleler Strahlen. Da die von einem sehr weit (unendlich weit) liegenden Objekte kommenden Strahlen auch nahezu parallel (genau parallel) sind, so kann man sagen, dass das Bild eines sehr weit liegenden Gegenstandes sich im Brennpunkte befindet. Für die Brennweite gilt (vgl. Erkl. 48) die Formel:

$$\text{IV} \ldots \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\right)$$

oder auch wegen III:

$$\text{V} \ldots \frac{1}{a} + \frac{1}{a_1} = \frac{1}{f}$$

woraus man wieder:

$$\text{VI} \ldots a_1 = \frac{af}{a-f}$$

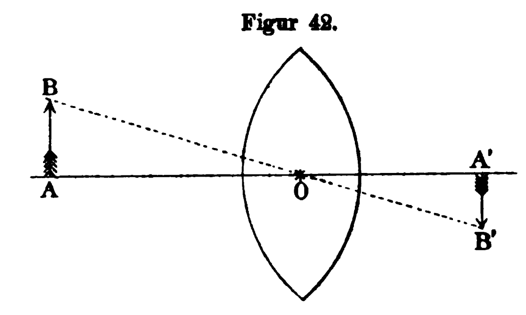
erhalten kann. Aus dieser Formel lassen sich mehrere wichtige Schlüsse ziehen (vgl. Erkl. 49).

Man darf aber nicht vergessen, dass diese Gleichungen nur für Gegenstände gelten, die sich in der Nähe der optischen Achse der Linse befinden.

Schreiben wir die Formel VI wie folgt:

$$a_1 = a \cdot \frac{f}{a-f}$$

Figur 42.




so gibt der Ausdruck:

$$\text{VII} \ldots \frac{a_1}{a} = \frac{f}{a-f}$$

das Verhältnis der Grössen $a_1$, $a_2$, also auch das Verhältnis der Grössen zwischen Bild und Gegenstand, und wird daher das Vergrösserungsverhältnis genannt. Denn sei (vergl. Figur 42):

$$OA = a, \quad OA' = a_1,$$

so ist:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AO}{OA'}$$

wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke $AOB$ und $A'OB'$.

---

**Frage 45.** Wie wirkt eine einfache bi-konvexe Linse?

Figur 43.

**Bemerkung.** Da die deutliche Sehweite für verschiedene Augen verschieden ist, so wird auch eine und dieselbe Linse für die verschiedenen Beobachter verschieden vergrössern. Wenn also eine bestimmte Vergrösserung angegeben wird, so versteht man oft darunter jene für die normale Sehweite von 25 cm. Die Linse vergrössert also nicht das Objekt, sondern sie gestattet dem menschlichen Auge, sich dem Gegenstande zu nähern bis auf die durch die Linsenbrennweite bestimmte Grenze.

**Bemerkung.** Die deutliche Sehweite kann ziemlich genau wie folgt bestimmt werden. Man mache mit einer Nadel in ein Kartenblatt zwei etwa $1\frac{1}{2}$ mm von einander abstehende Löcher, halte das Kartenblatt dicht vor das Auge und betrachte durch die Oeffnungen die Nadel $N$ (vergl. Figur 44). Man wird im allgemeinen zwei Bilder derselben sehen ($N'N''$); nur dann, wenn der Abstand vom Kartenblatt gleich ist der deutlichen Sehweite, ein einziges Bild derselben.

**Antwort.** Wird eine Konvexlinie einem Gegenstande so genähert, dass der Gegenstand in den Brennpunkt zu liegen kommt, also am deutlichsten gesehen wird, dann erscheint das Bild dem Auge unter demselben Winkel durch die Linse, als wenn es aus dem Mittelpunkte der Linse ohne diese gesehen würde (denn $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \beta$; vgl. Fig. 43). Der Gegenstand erscheint also so oftmal vergrössert, als die Brennweite der Linse in der Sehweite des Auges enthalten ist. Die Brennweite einer Linse bestimmt man aber für praktische Zwecke hinreichend genau, wenn man die Sonnenstrahlen durch die Linse vereinigen lässt. Bestimmt man sich noch die jedem eigene Sehweite, so kann man sodann für jede Linse die Vergrösserung bestimmen.

Wir wollen nun die Wirkung einer solchen Linse etwas eingehender auf Grund unserer Formeln untersuchen. Da das Auge einen Gegenstand nur dann deutlich sieht, wenn er sich in der deutlichen Sehweite befindet, so wird das Auge, wenn es auch durch eine Lupe hindurchsieht, den Gegenstand in der deutlichen Sehweite $d$ erblicken. Sei also $e$ die Entfernung des Auges von der Linse und $a_1$ die Entfernung des Bildes von der Linse (nicht des Gegenstandes), so muss (vergl. Figur 45):

$$d = e + a_1$$

Wir haben also:

$$a_1 = d - e$$

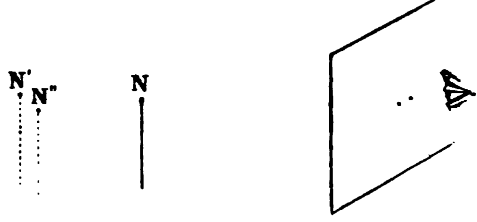
Daher das Vergrösserungsverhältnis:

$$\frac{a_1}{a} = \frac{d-e}{a}$$

also (vergl. Erkl. 50):

$$\frac{a_1}{a} = (d-e)\frac{1}{f} + 1 \cdots$$

Figur 44.




**Erkl. 50.** Wir haben:

$$-\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a}=\frac{1}{f}$$

also, da $a_1 = d - e$:

$$\frac{1}{a}=+\frac{1}{d-e}+\frac{1}{f}$$

also:

$$\frac{a_1}{a}=1+\frac{d-e}{f}$$

**Bemerkung.** Bei der Bestimmung der Vergrösserung, ausgenommen kleine Vergrösserungen, kommt es zumeist nicht auf eine Einheit an, denn die Sehweite des Auges ist auch keine konstante Grösse und deshalb werden die Vergrösserungszahlen gewöhnlich bei grösseren Vergrösserungen auf 5 bis 10 abgerundet. Man spricht nie von einer 32fachen, sondern einfach von einer 30fachen Vergrösserung.

**Ist das Auge dicht bei der Linse, so wird:**

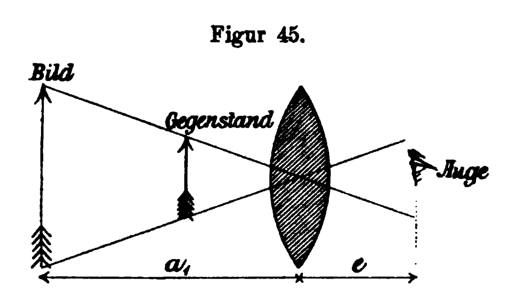
$$e = 0$$

**also:**

$$\frac{a_1}{a}=\frac{d}{f}+1$$

**d. h. die Vergrösserung um 1 grösser als der Quotient aus der Sehweite in die Brennweite. Wir sehen, dass die oben mitgeteilte Regel nur eine genäherte ist. Hält man das Auge möglichst nahe der Linse, so wird die obige Formel nahezu erfüllt.**

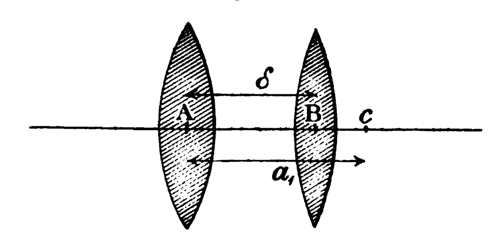
Figur 45.




## Frage 46. Wie wirken zwei Lupen, die miteinander verbunden sind?

**Bemerkung.** Wendet man mehrere Lupen an, so müssen ihre Brennpunkte in einer Geraden liegen oder, was dasselbe ist, ihre optische Achsen zusammenfallen. Man sagt, das Linsensystem sei **zentriert**. Ist das Linsensystem nicht zentriert, so erscheint das Licht eines Sternes nie als ein Punkt, sondern mit Ausläufern versehen (vergl. Figur 50 und 51).

Figur 46.




**Antwort.** Da dem Gegenstande ein bestimmtes Bild zukommt (und nur diese Fälle betrachten wir), so kann man, wie in der Dioptrik bewiesen wird, zwei hintereinander gereihte Lupen ideell durch eine einzige ersetzen.

Sei $F$ die Brennweite einer Kombination aus zwei Linsen, so gilt, wenn dieselben einander berühren, die Beziehung:

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}$$

Um dieses einzusehen und zugleich die allgemeine Formel für zwei sich nicht berührende Linsen zu erhalten, sei:

$$\frac{1}{f_1}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a}$$

$$\frac{1}{f_2}=\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b}$$

Dabei sind $f_1$ und $f_2$ die Brennweiten der Linsen für sich.

Nehmen wir an, die Linse $A$ (vgl. Fig. 46) entwerfe das Bild eines Achsenpunktes in $c$, so ist:

$$a_1 = AC$$

**Erkl. 51.** Wir haben:

$$\frac{1}{b_1} = \frac{1}{f_2} + \frac{1}{a_1 - \delta} = \frac{1}{f_2} + \frac{1}{\frac{af_1}{a-f_1} - \delta}$$

$$= \frac{1}{f_2} + \frac{a - f_1}{af_1 - \delta(a - f_1)}$$

denn es ist nach Gleichung VII, Seite 45:

$$a_1 = \frac{af_1}{a - f_1}$$

Sind die Strahlen parallel, so ist:

$$a = f_1$$

also:

$$\frac{1}{b_1} = \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_1}$$

was zu beweisen war.

für die Linse $A$ und zugleich:

$$b = -BC = -(a_1 - \delta)$$

für die Linse $B$; wir haben also:

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{b_1} - \frac{1}{a_1 - \delta}$$

oder:

$$\frac{1}{b_1} = \frac{1}{f_2} + \frac{1}{a_1 - \delta}$$

woraus (vergl. Erkl. 51) für Parallelstrahlen:

$$b_1 = \frac{f_2(f_1 - \delta)}{f_1 + f_2 - \delta}$$

folgt. Für einander berührende Linsen ist:

$$\delta = 0$$

also:

$$b_1 = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2}$$

oder:

$$\frac{1}{b_1} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

---

## Frage 47. Wie gross ist die Vergrösserung einer Linsenkombination?

**Bemerkung.** Um recht grosse Vergrösserungen zu finden, wendet man statt einer einzigen stark gekrümmten Linse mehrere hintereinander geschichtete Einzellinsen an, weil man so eine kleinere sphärische Aberration erhält, d. h. die Bilder werden weniger entstellt.

**Antwort.** Um die Vergrösserung einer Linsenkombination zu finden, beachten wir, dass das Bild der einen Linse zugleich ein Objekt der zweiten Linse ist. Die zweite Linse vergrössert oder verkleinert, je nach ihrer Beschaffenheit, dieses Objekt, als ob sie allein da wäre.

Sei also $m_1$ die Vergrösserung der ersten, $m_2$ jene der zweiten Linse, beide einzeln gedacht für gleiche Stellung des Auges, so ist die Gesamtvergrösserung gleich:

$$M = m_1 \cdot m_2$$

Dieser Satz gilt für beliebig viele Linsen.

**Anmerkung 4.** Wir haben bisher die Verhältnisse des Lichtdurchganges durch eine Linse unter der speziellen Voraussetzung der axialen Strahlen behandelt. Lassen wir diese Einschränkung fallen, so gelten die von uns entwickelten Formeln nur genähert, dennoch aber so, dass sie im grossen und ganzen erhalten bleiben. Wir wollen dieselben als Fehler der Linsen und optischen Instrumente betrachten.

---

## Frage 48. Was versteht man unter der sphärischen Abweichung einer Linse?

**Bemerkung.** Die sphärische Abweichung, auch sphärische Aberration, ist nur den Linsen eigentümlich, die durch Kugelflächen begrenzt werden. Bei den parabolisch geschliffenen Linsen kann sie zum grossen Teil aufgehoben werden. Man spricht dann von einer aplanatischen Linse.

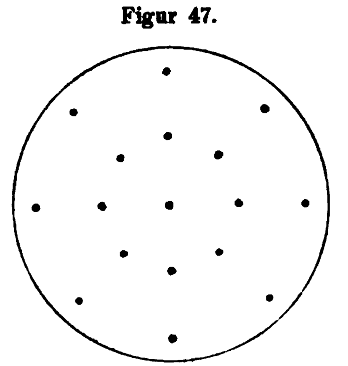
**Antwort.** Unter der sphärischen Abweichung einer Linse versteht man diejenige Bildverzerrung, die durch die am Rande eintretenden Lichtstrahlen verursacht wird. Es ist uns nicht möglich, die mathematische Theorie dieser Erscheinung zu geben, es soll nur bemerkt werden, dass die sphärische Aberration einer Funktion von der Gestalt:

$$\varphi = -\frac{1}{2n(n-1)} \frac{e^2}{r}$$

entspricht, wobei:

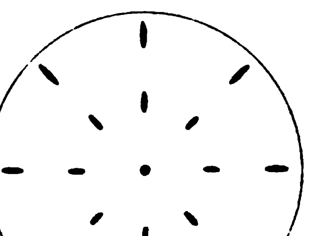
$$n = \frac{n_1}{n_2}$$

Figur 47.



Das Bild einer Punktanzahl, beobachtet durch eine Linse ohne sphärische Aberration und

Figur 48.



durch eine mit bedeutender sphärischer Aberration.

*e* der Durchmesser der Linsenöffnung (also = der Linse) und

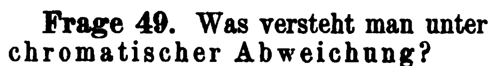
*r* der Krümmungshalbmesser der brechenden Fläche.

Aus dieser Formel sehen wir, dass wir die sphärische Aberration zum Teil aufheben können:

1) wenn wir den Durchmesser der Linse verkleinern, d. h. ein Diaphragma vor oder hinter die Linse setzen;

2) wenn wir Linsen von möglichst kleiner Krümmung verwenden.

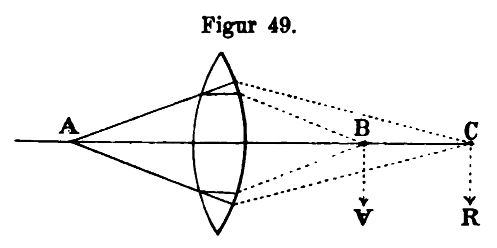
Darum haben wir, um eine grosse Vergrösserung zu erhalten, nicht etwa eine Linse mit bedeutender Krümmung angewendet, sondern mehrere von geringer Krümmung aneinander geschichtet.



**Frage 49.** Was versteht man unter chromatischer Abweichung?

**Erkl. 52.** Das weisse Licht ist aus den verschiedensten prismatischen Farben zusammengesetzt und wird durch ein Prisma in ein sog. Spektrum zerlegt. Lässt man einen Lichtstrahl, etwa das Sonnenlicht, auf ein Prisma fallen, so sieht man, dass die roten Strahlen am wenigsten und die violetten am meisten gebrochen werden Da nun jeder Teil einer Linse ein solches Prisma darstellt, so sieht man leicht ein, dass das Bild farbig erscheinen muss.

Figur 49.




**Antwort.** Unter chromatischer Abweichung versteht man jenen Farbenrand, den man an Objekten sieht, wenn dieselben durch eine einfache Linse betrachtet werden. Er entsteht durch die ungleiche Brechung der Lichtstrahlen in der Linse (vergl. Erkl. 52).

Gehen von einem Punkte *A* der Achse (vergl. Figur 49) Lichtstrahlen aus, so werden sie verschiedenartig gebrochen. Die violetten sammeln sich bei *B*, die roten bei *C*. Auf der Strecke *BC* sind die Vereinigungspunkte der einzelnen Strahlen nach den Spektralfarben angeordnet. Dieses gilt für eine bi-konvexe Linse. Umgekehrtes findet bei einer bi-konkaven statt, woraus folgt, dass man durch Vereinigung einer bi-konvexen Linse mit einer bi-konkaven den Chromatismus aufheben kann. Solche Linsen werden achromatische genannt.

Die Linsen der neueren Instrumente sind durchweg achromatisch.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

**Der ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert, um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft.

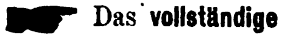
5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

---



Das **vollständige**

## Inhaltsverzeichnis

### der bis jetzt erschienenen Hefte

kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

---

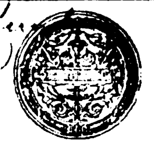
**Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.**

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

1278. Heft. | Preis des Heftes 25 Pf. | Vermessungskunde (Geodäsie). Forts. v. Heft 1275. — Seite 49—64. Mit 24 Figuren.







Vollständig gelöste

# Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten
erläutert durch
**viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,**
aus allen Zweigen
der **Rechenkunst,** der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus **allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie;** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's;** der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
**zum einzig richtigen und erfolgreichen**
**Studium,** zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

**Dr. Adolph Kleyer,**
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in **Frankfurt a. M.**
unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

# Vermessungskunde
## (Geodäsie).

Nach **System Kleyer** bearbeitet von **Dr. W. Láska.**

Fortsetzung von Heft 1275. — Seite 49—64. Mit 24 Figuren.

**Inhalt:**



**Stuttgart 1894.**
Verlag von Julius Maier.

**Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.**

# PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie,** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues,** des **konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form,** mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch **alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen** in **allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

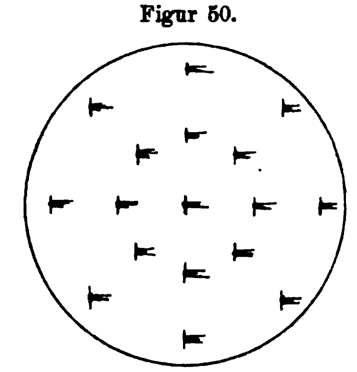
Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. **Kleyer,** Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

**Stuttgart.** **Die Verlagshandlung.**

**Bemerkung.** Achromatische Linsen kamen erst am Ende des vorigen Jahrhunderts allgemein in Gebrauch.

**Frage 50.** Was versteht man unter dem Zentrierungsfehler?

Figur 50.



Das Punktsystem der Figur, betrachtet durch ein nicht zentriertes Linsensystem.

Figur 51.





Vergrösserte Bilder von leuchtenden Punkten bei zentrischen Abweichungen.

**Antwort.** Ist das System sphärischer Flächen, welche ein Instrument ausmachen, nicht zentriert, d. h. befinden sich sämtliche Brennpunkte nicht in einer Linie, so entsteht ein Zentrierungsfehler. Derselbe äussert sich dadurch, dass von den Bildern nach einer Seite hin sehr starke Strahlen ausgehen, und oft auch nach mehreren, je nach den vorhandenen exzentrischen Linsen. Man erhält nie scharfe Bilder, selbst in wenig zentrierten Objektiven erscheint ein Stern wie eine Ellipse mit einem hellen Brennpunkte (vgl. Figur 50 und Figur 51).

Der Zentrierungsfehler kann durch einen guten Mechaniker oder vom Optiker selbst behoben werden, indem er zwischen die Einzellinsen Staniolblätter einschiebt oder mit den eigens zu diesem Zwecke vorhandenen Schrauben operiert. Eine Selbstberichtigung raten wir niemanden.

**Frage 51.** Welches sind die wesentlichen Bestandteile eines Fernrohrs?

**Erkl. 53.** Man nennt das dem Auge zugekehrte Glas immer das Okular, d. h. das Augenglas, das dem Objekte zugekehrte Glas Objektiv; natürlich wird vorausgesetzt, dass das Fernrohr regelrecht gebraucht wird.

**Antwort.** Die wesentlichsten Bestandteile eines Fernrohrs sind:

a) das Objektiv,

b) das Okular.

(vergl. Erkl. 53).

Dasjenige Glas, welches bestimmt ist, die vom Objekte kommenden Strahlen aufzufangen, wird das Objektiv genannt. Die vom Objektiv gesammelten Strahlen werden durch das Okularglas vergrössert. Es muss immer, wenn der Gegenstand deutlich gesehen werden soll, der jeweilige Brennpunkt des Okulars mit dem Brennpunkte des Objektivs zusammenfallen.

**Frage 52.** Welche Arten von Fernröhren unterscheidet man?

**Antwort.** Man unterscheidet drei Arten der Fernröhre:

a) das Galileische,

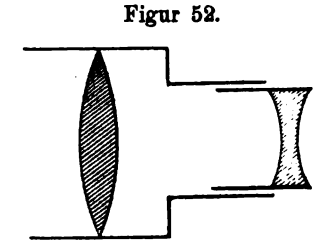
b) das Keplersche oder astronomische,

c) das terrestrische Fernrohr.

**Frage 53.** Wie ist das Galileische Fernrohr beschaffen?

**Antwort.** Das Galileische Fernrohr besteht aus einer bi-konvexen Linse als Objektiv und einer bi-konkaven als Okular (vergl. Figur 52). Dasselbe wird zumeist bei einfacheren Theatergläsern gebraucht. In der Geodäsie dient es nur als Rekognoszierungsinstrument; es verträgt nur schwache Vergrösserungen, und da das Auge nicht das reelle, sondern nur das geometrische Bild sieht, so lässt sich in einem solchen Fernrohr kein Fadenkreuz anbringen, weswegen es auch nicht in der Vermessungskunde angewendet wird. Ein Vorzug eines solchen Fernrohrs ist das grosse und helle Gesichtsfeld.

Figur 52.



**Bemerkung.** Den Namen trägt dieses Fernrohr nach Galilei, der es um 1610 zum erstenmal zu astronomischen Beobachtungen anwandte. Es wurde etwa 1608 in Holland erfunden, von wem, darüber ist man noch nicht im Klaren. Daher wird es oft auch das holländische Fernrohr genannt.

---

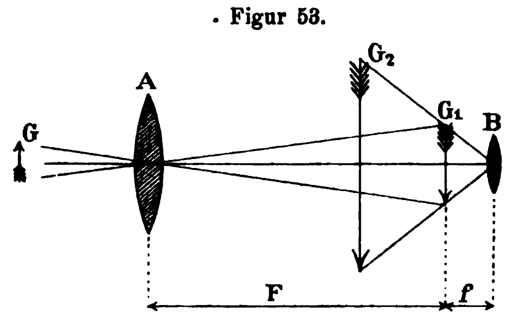
**Frage 54.** Wie ist das astronomische Fernrohr beschaffen?

**Antwort.** Das astronomische Fernrohr besteht im wesentlichen aus zwei bi-konvexen Linsen, von denen die mit grösserer Oeffnung (Durchmesser) und längerer Brennweite $F$ als Objektiv $A$ und die mit sehr kleiner Brennweite $f$, $B$ als Okular dient.

Vom Gegenstande $G$ (vergleiche Fig. 53) entwirft das Objektiv ein Bild $G_1$; dasselbe wird vom Okular $B$ zu $G_2$ vergrössert und erscheint in der verkehrten Lage.

Da durch das Okular das wirkliche physische Bild betrachtet wird, so kann bei diesem Fernrohr ein Fadenkreuz in die Brennweite der Okularlinse eingespannt werden, welches zugleich mit dem Objekte scharf im Gesichtsfeld zu sehen ist.

Figur 53.




**Bemerkung.** Das astronomische Fernrohr wurde von Kepler zuerst angegeben. Statt der einfachen Linse $B$ verwendet man oft zusammengesetzte Okulare, von denen wir weiter unten sprechen. Auch die Objektivlinse ist zumeist eine achromatische, aus einer bi-konvexen und einer bi-konkaven bestehende Kombination.

---

**Frage 55.** Wie ist das terrestrische Fernrohr beschaffen?

**Antwort.** Das terrestrische Fernrohr unterscheidet sich vom astronomischen dadurch, dass zwischen das Objektiv und das Okular eine bi-konvexe Linse eingeschaltet ist, welche den Zweck hat, das vom Objektiv kommende Bild umzukehren. Das Auge sieht im terrestrischen Fernrohr die Gegenstände nicht verkehrt, sondern aufrecht.

**Bemerkung.** Als Erfinder des terrestrischen Fernrohrs gilt Schyrlaeus, ein Dominikanermönch, der es um die Mitte des 17. Jahrhunderts konstruierte.

**Anmerkung 5.** Wir haben bisher die Okulare als einfache Linsen angenommen, solche werden aber in der Wirklichkeit nie angewendet. Man wendet vielmehr Linsenkombinationen an, die von der chromatischen und sphärischen Abweichung nahezu frei sind.

---

**Frage 56.** Welche sind die wichtigsten Okulare?

**Antwort.** Die wichtigsten in der Geodäsie angewandten Okulare sind:

a) das **Huygens-Campanische Okular**,

b) das **Ramsdensche Okular**.

---

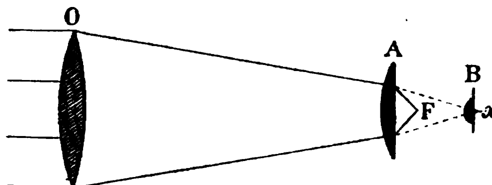
**Frage 57.** Welches ist die Einrichtung und welche sind die wichtigsten Eigenschaften des Huygensschen Okulars?

**Antwort.** Das Huygenssche Okular besteht aus zwei plan-konvexen Linsen, deren ebene Flächen dem Auge zugekehrt sind.

Die Linse $A$, die dem Objektiv zugekehrt ist, heisst die **Kollektivlinse**. Sie verkürzt die Brennweite der vom Objektiv kommenden Strahlen ($x$ der Brennpunkt vom Objektiv allein, $F$ der Brennpunkt von Objektiv und Kollektiv). Das Bild steht hart in der Mitte zwischen den Linsen $A$, $B$ (vergl. Figur 54a). Soll ein Fadenkreuz angebracht werden, so muss dasselbe auch an dieser Stelle stehen, die gewöhnlich durch ein Diaphragma kenntlich gemacht ist.

Dadurch, dass das Licht gezwungen ist, noch durch eine Linse hindurchzugehen, werden die Gegenstände zwar weniger hell gesehen, dafür erreicht man aber durch Verkürzung der Brennweite infolge der Kollektivlinse ein grösseres Gesichtsfeld.

Figur 54a.




**Bemerkung.** Das Okular kann durch eine einfache Linse ersetzt gedacht werden, welche natürlich nie realisiert werden kann. Diese Linse führt den Namen der **Aequivalentlinse** und ihre Brennweite die **Aequivalentbrennweite**; ihre Brennweite ist nach den in Frage 46 mitgeteilten Formeln:

$$F = \frac{f - f_1}{f + f_1}$$

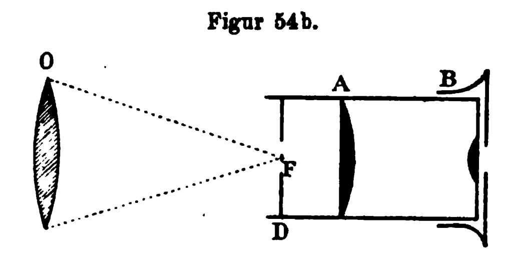
wenn $f$ und $f_1$ die Brennweiten der Einzellinsen sind.

---

**Frage 58.** Welches ist das Wesen des Ramsdenschen Okulars?

**Antwort.** Das Okular von Ramsden besteht aus zwei plan-konvexen Linsen, deren konvexe Seiten gegen einander gekehrt sind.

Figur 54b.




**Bemerkung.** Bezüglich der Blenden oder Diaphragmen mögen hier einige Bemerkungen folgen. Die Diaphragmen dienen dazu, um die Randstrahlen, die von den Linsen kommen, abzuhalten. Die Linsen sind nämlich an den Rändern weniger gut gearbeitet. Nur einige neuere, sehr genau gearbeitete Okulare können ohne ein Diaphragma gebraucht werden. Man hüte sich, das Diaphragma zu verschieben, da durch dessen Verschiebung das Bild wesentlich verschlechtert werden kann.

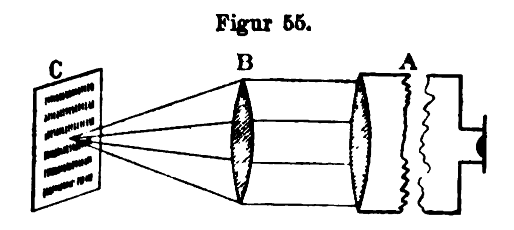
Das Kollektivglas wendet seine plane Seite dem Objektiv zu.

Bei dem Ramsdenschen Okular steht das Kollektiv nicht innerhalb wie bei dem Huygensschen, sondern ausserhalb der Brennweite des Objektivs. Man erhält also, da die Kollektivlinse hier als Lupe wirkt, eine grössere Vergrösserung als beim Huygensschen, dafür aber wird das Gesichtsfeld kleiner.

Ein Fadenkreuz, sowie das Diaphragma stehen ausserhalb der beiden Linsen (vergl. Figur 54b). $D$ = Diaphragma, $O$ Objektiv, $A$ Kollektivlinse, $B$ Okularlinse.

**Frage 59.** Wie wird die Brennweite einer Lupe am genauesten bestimmt?

Figur 55.



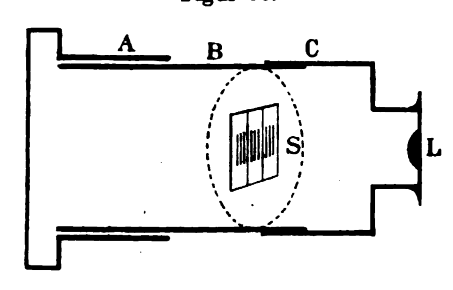

**Erkl. 54.** Denn ist das Fernrohr auf $\infty$ eingestellt, so kann man durch dasselbe nur solche Gegenstände sehen, von welchen nur parallele Strahlen ins Fernrohr gelangen. Sollen aber von $C$ nur parallele Strahlen in $A$ gelangen, so muss $C$ im Brennpunkte von $B$ liegen, weil der Brennpunkt der Vereinigungspunkt paralleler Strahlen ist.

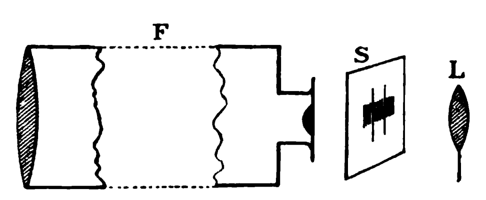
**Antwort.** Um die Brennweite einer Lupe sehr genau zu bestimmen, nehmen wir ein Fernrohr und richten es auf einen unendlich weit entfernten Gegenstand. Gegenstände von 500 m Entfernung können schon als unendlich weit angenommen werden. Sodann stellen wir das Fernrohr $A$, ohne etwas an demselben zu ändern, vor die Lupe $B$ und sehen nach, in welcher Entfernung von der Lupe ein vorgehaltenes Blatt Papier $C$ gelesen werden kann. Sind die Buchstaben am deutlichsten, so steht $C$ im Brennpunkte von $B$ (vergl. Erkl. 54; Methode von Maskelyne; vergl. Figur 55).

**Frage 60.** Wie wird die Vergrösserung eines Fernrohrs bestimmt?

**Antwort.** Um die Vergrösserung eines Fernrohrs zu bestimmen, bedient man sich am besten des Dynameters von Ramsden. Dasselbe besteht aus drei in einander einschiebbaren Röhren $A$, $B$, $C$ (vgl. Figur 56), von denen die erste eine Lupe $L$, die zweite eine Teilung $S$ auf Milchglas in 0,01 mm trägt und die dritte dazu dient, um das Ganze bequem am Okular des Fernrohrs befestigen, bezw. halten zu können.

Figur 56.




Um mit Hilfe des Dynameters die Vergrösserung bestimmen zu können, stellt man das Fernrohr auf unendlich ein; sodann hält man das Dynameter vor dem Okular und verschiebt es so lange, bis auf der Glasskala das Bild des Objektivs als ein scharfrandiger Kreis erscheint. Dann ist die Vergrösserung des Fernrohrs gleich dem Quotienten aus dem Durchmesser des Objektivs in den Durchmesser seines Bildes.

Ist z. B. der Objektivdurchmesser gleich 33 mm und das Bild auf der Glasplatte = 0,3 mm, so ist die Vergrösserung:

$$\frac{33}{0,3} = 110$$

**Bemerkung.** Man kann auch ohne Dynameter mit Hilfe einer Lupe *L* und einer auf Oelpapier aufgetragenen Millimeterteilung *S* (vergl. Figur 56) die Vergrösserung des Fernrohrs in analoger Weise bestimmen.

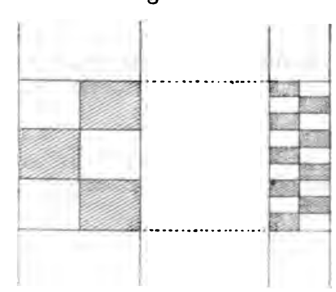
**Frage 61.** Gibt es noch andere Methoden zur Bestimmung der Vergrösserung eines Fernrohrs?

**Bemerkung.** Man kann sich z. B. zweier Nivellierlatten bedienen, die man in nicht allzugrosser Entfernung nebeneinander stellt. Visiert man die eine im Fernrohr und schaut auf die andere mit blossem Auge, und sieht man, dass etwa drei Teile (cm) im Fernrohr neun Teilen der Wirklichkeit (vergl. Figur 57) entsprechen, so ist die Vergrösserung:

$$\frac{9}{3} = 3 \text{ mal.}$$

**Antwort.** Es gibt noch viele andere Methoden, die aber zumeist nicht so einfach angewendet werden können oder andererseits nicht hinreichend genau sind.

Figur 57.



# III. Instrumente zur Horizontalaufnahme.

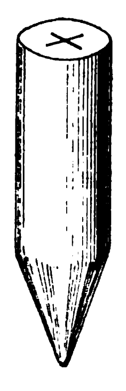
## 1. Mittel zur Punktbezeichnung.

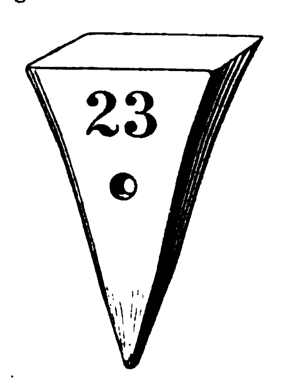
**Frage 62.** Welche Mittel stehen zur Punktbezeichnung zur Verfügung?

**Antwort.** Als Mittel zur zeitweisen Punktbezeichnung dienen die Baken (Fluchtstäbe, Stangen) und Holzpflöcke.

**Frage 63.** Wie müssen die Holzpflöcke beschaffen sein, die man zur Punktbezeichnung verwendet?

Figur 58.






**Antwort.** Man braucht entweder 8 dm lange, 2 bis 3 cm starke runde, oben quer abgesägte, unten zugespitzte Holzpflöcke (vergl. Figur 58), oder solche, die einem etwa 2 cm breiten, 4 cm langen und 10 bis 12 cm hohen Keil gleichen (vergl. Figur 58). Die ersteren für jene Punkte, über welche ein Winkelinstrument aufgestellt werden soll, die letzteren nur als vorübergehende Endpunkt-Bezeichnungen der Abscissen oder Ordinaten. Die breite Fläche dient zur Aufnahme der Nummer. Dieselbe wird mit blauer Ingenieurkreide angeschrieben. Gewöhnlich sind die letzteren Holzpflöcke durchlöchert, damit man bequem jede beliebige Menge (an einen Faden angebunden) mitnehmen kann.

---

**Frage 64.** Was ist eine Bake?

**Erkl. 55.** Benützt man die Baken, so muss sowohl der Landmesser als auch jeder der Messgehilfen mit einem Lot zur Senkrechtstellung derselben versehen sein.

**Antwort.** Eine Bake ist eine aus möglichst festem und trockenem Holze verfertigte, etwa 2 m lange und 2 bis 3 cm dicke, runde Stange, die an ihrem unteren Ende einen Schuh mit einer Stahlspitze trägt.

Die Baken werden von halb bis viertel Meter weiss und rot angestrichen. Das obere Ende soll immer hell sein. Der eiserne Schuh, etwa 2 bis 3 cm lang, soll nach oben zwei Lappen haben, welche das Holz von zwei Seiten noch über der Höhlung des Schuhes umfassen.

---

**Frage 65.** Wozu dient eine Bake?

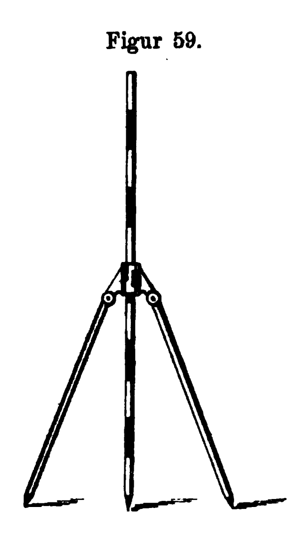
**Erkl. 56.** So würde z. B. eine Bake unter Hecken und kleinen Gebüschen und ähnlichem schwer aufzufinden sein.

**Antwort.** Die Bake dient zur Punktbezeichnung für die Dauer der Messung. Man versieht oft die Baken auch mit Fähnchen aus roter und weisser Leinwand. Diese Messfähnchen dienen zur Charakterisierung von Punkten, für welche die einfachen Baken weniger geeignet sind (vergl. Erkl. 56).

---

**Frage 66.** Wie wird die Bake gebraucht?

**Antwort.** Um die Bake zu gebrauchen, fasst man sie beim Einsetzen über ihrem Schwerpunkte (etwa in $^2/_3$ ihrer Höhe) mit dem Daumen und Zeigefinger und lässt sie selbst die lotrechte Lage suchen, worauf man sie niederfallen lässt, damit sie sich in den Boden einbohrt. Durch etwas Nachhilfe wird sodann der Stab festgestellt.



Figur 59.

Noch besser ist es aber, wenn man eigene Ständer für Baken besitzt, da es unmöglich ist, überall die Bake genügend sicher in den Boden einzubohren. Solche Ständer (vergl. Figur 59) ersparen oft, insbesondere in den Städten auf hartem Pflaster, einen Gehilfen. Man ist dann auch sicher, dass die Bake einmal zentrisch über den Punkt steht und sodann unverändert ihre lotrechte Stellung einhält, so dass man von der Willkür des Gehilfen unabhängig wird.

---

**Frage 67.** Worauf hat man beim Gebrauche der Baken zu sehen.

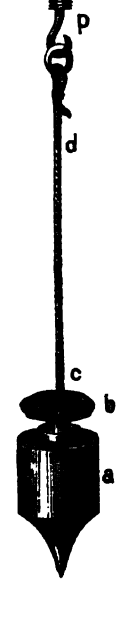
**Antwort.** Beim Gebrauche der Baken muss man besonders auf zweierlei sehen: 1) dass sie genau über demjenigen Punkt stehen, den sie bezeichnen sollen, 2) dass sie senkrecht über ihm stehen. Vom Senkrechtstehen kann man sich eventuell auch mit Hilfe eines Senkels überzeugen. Man hält zu diesem Zwecke den Senkel in einiger Entfernung von der Bake in der ausgestreckten Hand und visiert über den Faden desselben am besten den Raum der Bake tangierend nach dem Stabe hin. Dieses muss jedoch von zwei auf einander senkrecht stehenden Richtungen aus geschehen.

Kann man die untere Spitze der Bake anvisieren, so wird man diese lieber zum Ziel wählen, um der unliebsamen Senkrechtstellung zu entgehen.

---



Figur 60.




**Frage 68.** Was ist ein Senkel oder Bleilot?

**Antwort.** Der Senkel oder das Bleilot ist ein aus einem massiven Körper (Blei) hergestellter Cylinder, dessen unteres Ende in eine zentrische Spitze ausgeht. Derselbe gibt auf einen Faden aufgehängt die lotrechte Richtung an. Die untere Spitze ist, um Beschädigungen weniger ausgesetzt zu werden, aus Stahl, die äussere Umhüllung aus Messing (vergl. Figur 60).

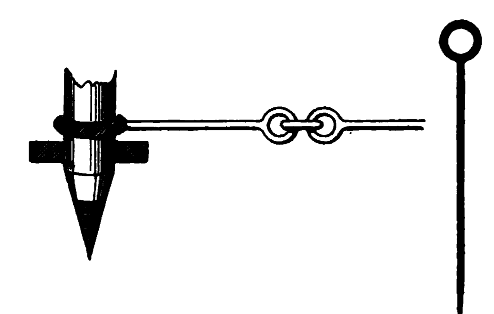
---

## 2. Mittel zur Längenmessung.

**Frage 69.** Was ist eine Messkette?

**Erkl. 57.** Als Kettenstab dient eine Bake mit etwas kräftigem Querstift am Fuss.

Figur 61.



**Antwort.** Die Messkette ist eine Kette aus starkem Eisendraht, gewöhnlich ca. 20 m lang mit Gliedern von 2 dm Länge. Diese sind durch Ringe mit einander verbunden. Die zwei letzten Glieder enden mit starken Ringen, durch die Kettenstäbe geschoben werden können (vergl. Figur 61). Zu jeder Kette gehören gewöhnlich zwei solche Kettenstäbe. Ausserdem sind zu jeder Kette mehrere Kettennägel (Markiernägel, Zähler, Kettenstäbchen) erforderlich.

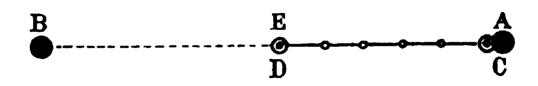
Diese sind aus Stahldraht und 3 bis 4 dm lang: unten sind sie zugespitzt und oben haben sie ein Oehr (vergl. Figur 61).

---

**Frage 70.** Wie wird die Kette gebraucht?

**Erkl. 58.** Die Messkette ist bei der neueren Preussischen Kataster-Vermessung ausser Gebrauch gesetzt.

Figur 62.




**Antwort.** Um mit Hilfe einer Kette eine durch zwei Baken $A$ und $B$ bezeichnete Linie zu messen, verfährt man wie folgt:

Einer der Gehilfen steckt seinen Kettenstab in $A$ fest und lässt den zweiten Gehilfen in der Richtung der Linie $AB$ die Kette ausspannen. Ist dieses geschehen, so wird neben dem Endpunkte ein Markierstäbchen eingesteckt, welches als Anfangspunkt der neuen Messung gilt (vergleiche Figur 62 $A$, $B$, Baken, $C$, $D$, Kettenstäbe, $E$ Markierstäbchen).

Die Ketten sind in der neueren Zeit fast ganz aus dem Gebrauch gekommen, indem sie von den ungleich genaueren Stahlmessbändern verdrängt wurden.

---

**Frage 71.** Was ist ein Stahlmessband?

**Bemerkung.** Man benützt nur die Messbänder aus Stahl oder Messing. Die früher benützten leinenen Messbänder sind durchaus zu verwerfen. Es beträgt nämlich der Längenunterschied zwischen einem ganz trockenen und einem nassen Messband von 25 m Länge etwa 5 cm. Hieraus kann man leicht schliessen, wie ungenau eine Abmessung mit denselben sein muss.

**Antwort.** Das Stahlmessband ist ein aus gehärtetem Stahl verfertigtes Band von 10 oder 20 m Länge, 15 bis 20 mm Breite und 0,5 mm Dicke. Dasselbe ist gewöhnlich durch eingeschlagene Messingnägel in Meter und durch Löcher in Decimeter abgeteilt. Die Centimeter werden geschätzt.

Die für den Feldgebrauch bestimmten Messbänder dürfen höchstens bei

20 m um $\pm 3 \cdot 5$ mm

10 „ „ $\pm 2 \cdot 4$ „

von dem angegebenen Mass abweichen.

**Frage 72.** Wie wird das Messband gebraucht?

Figur 63.

E

B

**Bemerkung.** Als Markiernägel können gewöhnlich über 1 dm lange und entsprechend dicke Nägel gebraucht werden.

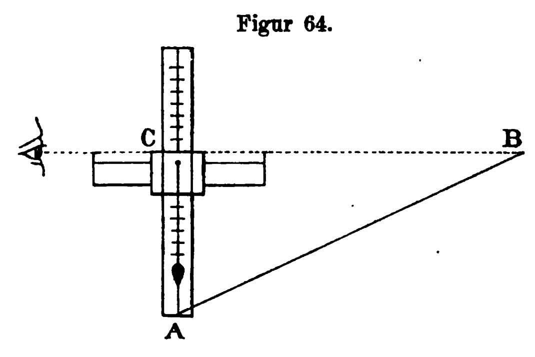
**Antwort.** Um mit einem Messband eine Strecke abzumessen, bezeichnet man die Endpunkte, wenn sie nicht anders sichtbar sind, durch vertikal stehende Baken. Sodann wird das eine Ende des Messbandes so an die Bakenspitze $B$ angelegt (vergl. Figur 63), dass dieselbe in den kreisförmigen Ausschnitt der messingnen Handhabe am Ende des Messbandes zu liegen kommt. Der Gehilfe hält das andere Ende und spannt das Messband ungefähr in der Richtung der zu messenden Linie. Man sieht nun nach, ob die ideale Verlängerung die Bake des Endpunktes schneidet. Ist dieses nicht der Fall, so gibt man dem Gehilfen ein verabredetes Zeichen oder ruft ihm zu, das Ende des Messbandes um hand- oder fingerbreit oder sehr wenig nach rechts oder links zu legen. Zu diesem Zwecke hebt der Gehilfe das Ende des Messbandes ein wenig, erteilt dem ganzen Messband durch einen Ruck eine wellenförmige Bewegung und verlegt so das ganze Messband in die angegebene Richtung. Liegt einmal das Messband in der verlangten Richtung, so wird das Ende durch einen Markiernagel bezeichnet. Dieser wird am besten mit einem Hammer, den der Gehilfe in der Tasche trägt, eingeschlagen.

Dieser dient zum Ausgangspunkt für die Wiederholung dieses Verfahrens. Gehen die ganzen Längen nicht auf, so werden Meter und Decimeter direkt abgelesen und Centimeter geschätzt.

---

**Frage 73.** Wie wird mit dem Messband eine geneigte Gerade gemessen?

Figur 64.




**Antwort.** Soll mit dem Messbande eine geneigte Gerade gemessen werden, z. B. die Entfernung $AB$ (vergl. Figur 64), so muss das sogenannte Gefälle derselben bestimmt werden. Dazu dient der Gefällmesser. Derselbe besteht aus einer Latte mit eingetragener Teilung, über welcher ein verschiebbares Visierbrett befestigt ist. Ein Senklot ermöglicht die Horizontalstellung derselben. Durch den Gefällsmesser wird die Höhendifferenz $AB$ gemessen. Die Teilung auf der Latte geht von Centimeter zu Centimeter. Nehmen wir nun an, wir hätten gefunden:

$$CA = h$$
$$AB = l$$

so wird:

$$CB = \sqrt{l^2 - h^2}$$
$$= l\sqrt{1 - \left(\frac{h}{l}\right)^2}$$

Die Grösse:

$$\frac{h}{l}$$

wird das Gefälle genannt. Da dasselbe nur eine kleine Grösse sein darf, so ist (vergl. Erkl. 59):

$$CB = l\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{h}{l}\right)^2\right]$$

oder:

$$CB = l - \frac{1}{2}\cdot\frac{h^2}{l}$$

Es gilt als Regel: Nur bei genauen Messungen ist diese Korrektion anzubringen, sobald:

$$\frac{h}{l} > \frac{1}{30}$$

Die Messung auf diesem Wege ist nicht gestattet, sobald:

$$\frac{h}{l} > \frac{1}{3}$$

und muss durch Staffelmessung (s. d.) ersetzt werden.

**Erkl. 59.** Wir haben, indem wir die Wurzel ziehen:

$$\sqrt{1-\left(\frac{h}{l}\right)^2} = 1 - \frac{1}{2}\frac{h^2}{l^2} + \frac{1}{4}\frac{h^4}{l^4} - \cdots$$

da aber $\frac{h}{l}$ sehr klein ist, so kann man die höheren Glieder vernachlässigen und man erhält:

$$\sqrt{1-\left(\frac{h}{l}\right)^2} = 1 - \frac{1}{2}\frac{h^2}{l^2}$$

---

**Frage 74.** Was ist eine Messlatte?

**Antwort.** Die Messlatte (Messrute, Messstab, Lachterstab) ist eine gewöhnlich aus Fichtenholz verfertigte, prismatische oder ovale Stange von 5 m Länge und 2 bis 4 cm Dicke. An den Enden ist sie mit Eisen beschlagen. Sie wird von Meter zu Meter verschieden gefärbt (weiss und rot). Die weitere Teilung in Decimeter pflegt man durch eingeschlagene Nägel zu kennzeichnen.

---

**Frage 75.** Wie wird eine Messlatte gebraucht?

**Antwort.** Man pflegt für gewöhnlich zwei Messlatten zu gebrauchen. Gut ist es, wenn jede Messlatte einen Träger hat; man braucht also bei Lattenmessungen zwei Gehilfen (siehe Figur 65).

Soll eine Linie $AB$ gemessen werden, so legt der erste Gehilfe seine Latte $a$ an den einen Endpunkt der abgesteckten Linie $AB$, etwa $A$, und bringt das vordere Ende in die Richtung der zu messenden Strecke. Der zweite Gehilfe legt sodann die zweite Latte $b$ sachte an, wobei der erste seine Latte festhält. Ist dieses geschehen, so hebt der erste Gehilfe seine Latte auf, aber so, dass dadurch die Lage der zweiten nicht geändert wird, zählt laut Eins und geht geschwind vor, um seine Latte an $b$ anzulegen. Ist dieses geschehen, so hebt der zweite die Latte $b$, zählt laut Zwei und geht nun vor. So werden die Latten fortfahrend aneinander

Figur 65.

A a b a B

**Erkl. 60.** Bei genaueren Messungen werden vierkantige Latten gebraucht, die längs einer ausgespannten Schnur gelegt werden.

gelegt, ohne dass man sie vertauscht. *A* zählt immer die ungeraden, *B* die geraden Legungen, wodurch zugleich ein Verzählen verhindert ist.

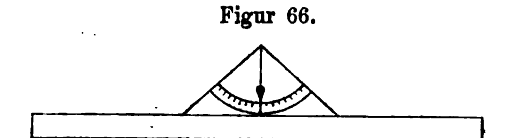
**Frage 76.** Ist diese Art der Lattenlegung überall verwendbar?

**Antwort.** Diese Art der Lattenlegung ist nur auf ebenem Boden verwendbar. Ist der Boden nicht eben, so muss ein anderes Verfahren eingeschlagen werden.

**Frage 77.** Kann die Lattenmessung auch auf geneigtem Boden stattfinden?

**Antwort.** Die Lattenmessung kann auch auf geneigtem Boden stattfinden, man muss aber jedesmal die gemessene Strecke auf den Horizont reduzieren. Zu diesem Zwecke befindet sich auf der Latte ein Gefällsmesser, der im Prinzip aus einem Senklot und einer Teilung von Grad zu Grad besteht. Siehe Figur 66. Sei $l$ sodann die Länge der Latte und $\alpha$ der Neigungswinkel, so wird die auf den Horizont reduzierte Fläche (s. Figur 67):

Figur 66.



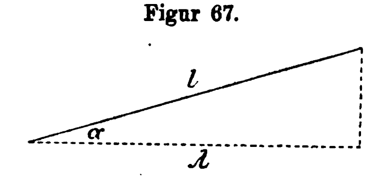
$$\lambda = l \cos \alpha$$

Man hat also:

$$l - \lambda = l(1 - \cos \alpha)$$

Setzt man $l = 5$, 10,20 m, so ergibt sich nachstehende Tabelle:

Figur 67.




| $\alpha$ | $l - \lambda$ | | |
|---|---|---|---|
| | $l = 5$ m | $l = 10$ m | $l = 20$ m |
| | m | m | m |
| 1° | 0·00 | 0·00 | 0·00 |
| 2° | 0·00 | 0·01 | 0·01 |
| 3° | 0·01 | 0·01 | 0·03 |
| 4° | 0·01 | 0·02 | 0·05 |
| 5° | 0·02 | 0·04 | 0·08 |
| 6° | 0·03 | 0·06 | 0·11 |
| 7° | 0·04 | 0·07 | 0·15 |
| 8° | 0·05 | 0·10 | 0·20 |
| 9° | 0·06 | 0·12 | 0·25 |
| 10° | 0·08 | 0·15 | 0·30 |
| 11° | 0·09 | 0·18 | 0·37 |
| 12° | 0·11 | 0·22 | 0·44 |
| 13° | 0·13 | 0·25 | 0·51 |
| 14° | 0·15 | 0·29 | 0·59 |
| 15° | 0·17 | 0·34 | 0·68 |

Das Schema einer derartigen Messung auf sehr diversem Boden ist:

**Messung mit 5 m Latten.**

| Latte | $\alpha$ | $l - \lambda$ | Länge | Produkte |
|---|---|---|---|---|
| 1 bis 5 | 2° | 0·00 | 5 | 0·00 |
| 6 „ 7 | 4° | 0·01 | 1 | 0·01 |
| 7 „ 10 | 6° | 0·03 | 4 | 0·12 |
| 10 „ 15 | 8° | 0·05 | 5 | 0·25 |

— 0·38
+ 75
74·62

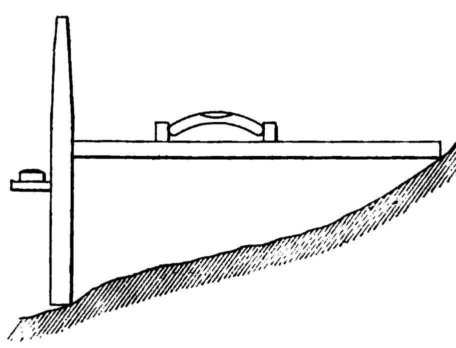
**Frage 78.** Was ist über die Messung eines unebenen Terrains zu beachten?

**Bemerkung.** Ueber indirekte Messung (mittelbare Messung) vergleiche 3. b), Seite 5.

**Antwort.** Man muss beachten, womöglich die Messung eines unebenen Terrains zu umgehen. Es ist viel rationeller, die Entfernung zweier Punkte, die durch ein unebenes Terrain getrennt sind, auf indirektem Wege zu messen. Dieses gilt insbesondere, wenn grosse Genauigkeit erfordert wird. Man messe auf unebenem Boden lieber weniger Längen und mehr Winkel als umgekehrt, und die Längen nur dort, wo das Terrain ein ebenes ist. Wir werden auf diesen Gegenstand noch bei der Koordinatenvermessung zurückkommen.

**Frage 79.** Was versteht man unter Staffelmessung?

Figur 68.



**Antwort.** Ist die Neigung der zu messenden Strecke gross, so wendet man die Staffelmessung an, welche darin besteht, dass man die Latte mit der Libelle horizontal stellt, von dem freischwebenden Endpunkt herablotet auf den freischwebenden Endpunkt der nächstliegenden Latte.

Für Staffelmessungen wurde ein eigener Apparat konstruiert, der eine grössere Sicherheit gewährt, als das Loten aus freier Hand gestattet.

Derselbe besteht aus einer Messlatte, die oben mit einer Röhrenlibelle versehen ist und aus einem eingeteilten, senkrecht stehenden Stabe mit einer Dosenlibelle, an welchen das freie Ende des Messstabes angelehnt wird. Die Art und Weise der Handhabung braucht wohl nicht weiter auseinandergesetzt zu werden (siehe Figur 68).

## 3. Ueber die Genauigkeit der Längenmessungen.

**Frage 80.** Wie gross ist der mittlere Fehler einer Längenmessung?

**Bemerkung.** Ueber den Begriff des mittleren Fehlers vergleiche Bobecks Lehrbuch der Ausgleichsrechnung.

**Antwort.** Sei $\mu$ der mittlere Fehler einer Anlage des Massstabs, so ist der mittlere Fehler für $n$ Anlagen:

$$m = \mu \sqrt{n}$$

**Erkl. 61.** Jordan gibt in seinem Taschenbuch für Geometrie folgende kleine Tafel für die mittleren Fehler:

| Gemessene Länge | Mittlere Fehler einer Messung | |
|---|---|---|
| | mit Latten | mit Kette |
| m | m | m |
| 10 | 0·011 | 0·034 |
| 50 | 0·025 | 0·076 |
| 100 | 0·035 | 0·107 |
| 150 | 0·043 | 0·131 |
| 200 | 0·049 | 0·151 |
| 250 | 0·055 | 0·169 |
| 300 | 0·061 | 0·185 |

Es muss indess hervorgehoben werden, dass die mitgeteilten Formeln und Zahlen nur für mit grösster Genauigkeit gemessene Strecken gelten, wobei angenommen wird, dass man eine jede Strecke doppelt gemessen hat.

oder, da $n$ proportional der gemessenen Länge, auch:

$$m = \mu' \sqrt{l}$$

wobei, wenn $l = n\alpha$:

$$\mu' = \frac{\mu}{\sqrt{\alpha}}$$

wird. Es stellt sodann $\mu'$ den mittleren Fehler einer Längeneinheit dar.

Die Grösse $\mu'$ beträgt nach Jordan für verschiedene Messungsarten 0,003 bis 0,008, so dass wir folgende Tafeln haben.

Der mittlere Fehler beträgt:

für Lattenmessung . . . $m = 0{,}003 \sqrt{l}$

für Stahlbandmessung . . $m = 0{,}005 \sqrt{l}$

für Kettenmessung . . . $m = 0{,}008 \sqrt{l}$

Bezüglich der Genauigkeit der Feldmesslängenmessungen bestimmt die Preussische Anweisung IX vom 25. Oktober 1881, dass die zulässige Abweichung $a$ zweier unabhängiger Messungen (hin und her) der Länge $l$ für Latten und Stahlbänder höchstens folgende Beträge annehmen dürfe:

I. auf ebenem Boden . . . $a = 0{,}01 \sqrt{4l + 0{,}005 l^2}$

II. auf mittlerem Boden . . $a = 0{,}01 \sqrt{6l + 0{,}0075 l^2}$

III. auf unebenem Boden . . $a = 0{,}01 \sqrt{8l + 0{,}01 l^2}$

Die Vermessungsanweisung IX enthält auch pag. 33 und folgende die Werte von $a$ in Tafeln geordnet.

## 4. Der Theodolit.

**Frage 81.** Was ist ein Theodolit?

**Antwort.** Der Theodolit ist ein Messinstrument, welches dem Wesen nach aus zwei geteilten Kreisen besteht, von welchen der eine horizontal, der andere dagegen vertikal aufgestellt ist. Ausserdem ist dieses Instrument mit einer Visiervorrichtung (Fernrohr) und mit Mitteln zum Horizontal- und Vertikalstellen (Libellen) versehen. Dazu kommen noch Behelfe für feine Bewegungen des Fernrohrs (Schrauben).

**Bemerkung.** Der Name Theodolit ist unbekannten Ursprungs (vergl. Poggendorfs Annalen, 193. Bd., und Dienglers Journal, 116. Bd.; ferner: Zeitschrift für Vermessungskunde 1880, p. 55, 1883, p. 321). Es scheint, dass der Name eine Verschmelzung eines arabischen Wortes ist mit dem englischen Artikel the.

**Frage 82.** Welches ist das Prinzip der Konstruktion eines Theodolits?

**Antwort.** Das konstruktive Prinzip des Theodolits besteht im folgenden (vgl. Fig. 69):

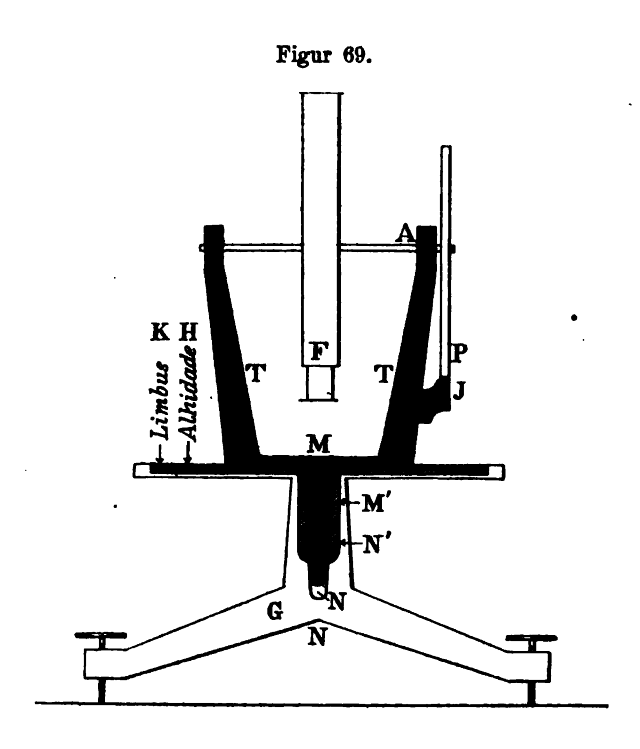
Eine feste Unterlage $G$ ist mit einer konischen Bohrung versehen, welche zwei gegen einander drehbare Achsen ($MN$ die Alhidadenachse und $M'N'$ die Limbusachse) trägt. Jede dieser Achsen ist mit einer geteilten Kreisscheibe ($H$ Alhidade, $K$ Limbus)

**Bemerkung.** Der Theodolit ist am Anfange dieses Jahrhunderts allgemein in Gebrauch gekommen. Der Erfinder dieses Instruments ist nicht bekannt, ebensowenig ist die Ableitung des Wortes Theodolit aufgeklärt. In früherer Zeit bediente man sich zur Winkelmessung zunächst des Sextanten, sodann kamen gegen das Ende des vorigen Jahrhunderts Vollkreise in Gebrauch, welche nicht die horizontale, sondern die wirklichen Winkel zu messen gestatteten. Dadurch war man aber gezwungen, die Winkel auf den Horizont zu reduzieren.

verbunden. Die Alhidadenscheibe ist mit einem gabelförmigen Träger $T$ versehen, welcher am obern Ende eine Horizontalachse $A$ trägt, die mit einem Fernrohr $F$ und einem Vertikalkreis $P$ fest verbunden ist. Der Limbuskreis $K$, sowie der Vertikalkreis $P$ sind voll geteilt. Der Alhidadenkreis besitzt nur zwei diametral stehende Nonien. Der Nonius des Vertikalkreises befindet sich auf einer Erweiterung $J$ des Trägers $T$.

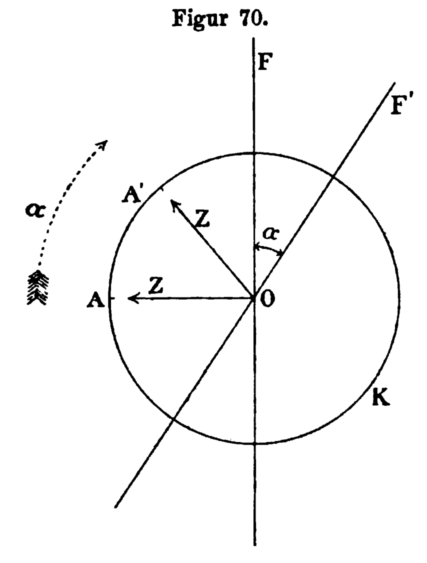
Je nachdem der Limbus beweglich oder fest mit der Unterlage $G$ verbunden ist, unterscheidet man repetierende oder einfache Theodolite.

Figur 69.

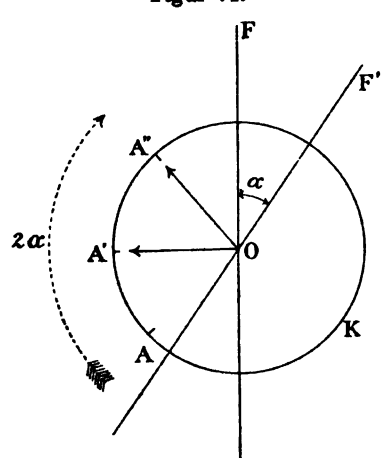



**Bemerkung.** In früherer Zeit befestigte man auch noch an das Gestell $G$ ein sogenanntes Versicherungsfernrohr. Es war dieses ein gewöhnliches Fernrohr mit einem Fadenkreuz, welches zur Kontrolle des Fernrohrstandes diente. Die neueren Instrumente werden aber so solid gebaut, dass eine etwaige Verrückung absolut unmöglich ist, vorausgesetzt natürlich, dass das Instrument regelrecht behandelt wird. Die geringen Verschiebungen, die durch die Drehung des Limbus oder Alhidade entstehen, eliminiert man am besten, wenn man die Winkel in doppelter Richtung misst, d. h. einmal durch eine Rechtsdrehung, das anderemal durch eine Linksdrehung.

Figur 70.




Figur 71.




Es sei (vergl. Figur 70) $K$ der festgeklemmte Limbuskreis. Bei der Fernrohrstellung $F$ zeigt der Zeiger $Z$ eine Ablesung $A$ an. Wird das Fernrohr von $F$ nach $F'$ um einen Winkel $\alpha$ gedreht, so geht der Zeiger von $A$ nach $A'$ und die Differenz der Ablesungen $A' - A$ wird gleich $\alpha$ sein.

Machen wir nun den Limbus $K$ frei von der Unterlage und verbinden ihn fest mit der Alhidade, wobei wir zugleich das Fernrohr wieder in die Richtung von $F$ bringen (vergl. Figur 71). Wird nun $K$ von $H$ losgelöst und mit der Unterlage fest verbunden (auf welche Weise dieses bewerkstelligt wird, ist vorderhand Nebensache) und das Fernrohr von $F$ nach $F'$ gebracht, so wandert der Zeiger $Z$ von $A'$ nach $A''$ wieder, so dass:

$$A'' - A' = \alpha$$

ist. Nun hatten wir aber früher:

$$A' - A = \alpha$$

Demnach wird:

$$(A'' - A') + (A' - A) = 2\alpha$$

oder:

$$A'' - A = 2\alpha$$

d. h. der Zeiger $Z$ steht von $A$ um den Winkel $2\alpha$ ab. So fortfahrend können wir den Abstand zwischen $A$ und dem Zeiger einem beliebigen Vielfachen des Winkels $\alpha$ gleich machen.

---

**Frage 83.** Welche Arten der Theodolite werden sonst auch unterschieden?

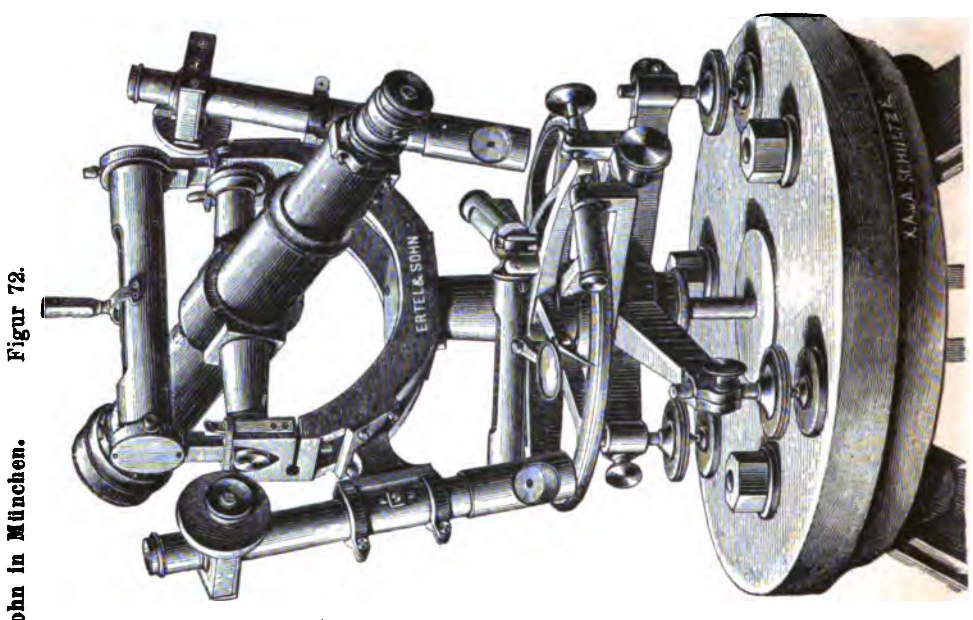
**Antwort.** Man unterscheidet noch, je nach der Fernrohrlage, Theodolite mit z e n t r i s c h e m und e x z e n t r i s c h e m Fernrohr; ferner, je nach der Fernrohrbeschaffenheit, Theodolite mit g e r a d e m oder g e b r o c h e n e m Fernrohr.

So ist Figur 72 ein zentrischer Theodolit mit geradem Fernrohr,

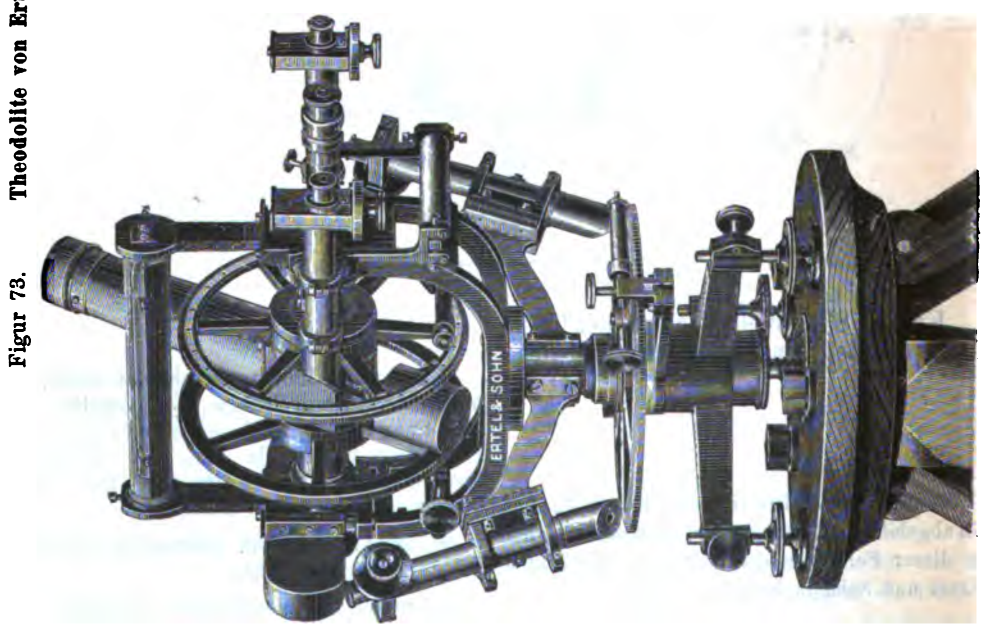
Figur 73 ein zentrischer Theodolit mit gebrochenem Fernrohr,

Figur 74 ein exzentrischer Theodolit mit geradem Fernrohr.

**Bemerkung.** Die in den Figuren 72 und 73 abgebildeten Theodolite ersten Ranges werden in dieser Form von der berühmten Werkstätte Ertel und Sohn in München gebaut.




Figur 72.




Figur 73.

Theodolite von Ertel & Sohn in München.

**Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.**

**Der ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert, um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft.

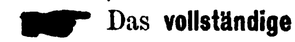
5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

---

 Das **vollständige**

## Inhaltsverzeichnis

### der bis jetzt erschienenen Hefte

kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

---

**Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.**

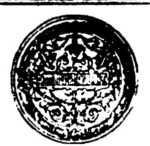
Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

1279. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Vermessungskunde (Geodäsie).
Forts. v. Heft 1278. — Seite 65—80.
Mit 19 Figuren.





Vollständig gelöste

# Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten
erläutert durch
**viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,**
aus allen Zweigen
der **Rechenkunst,** der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — **aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie;** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's;** der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar-** u. **Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen etc. etc.**
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
**zum einzig richtigen und erfolgreichen**
**Studium,** zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

**Dr. Adolph Kleyer,**
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

# Vermessungskunde
## (Geodäsie).

Nach **System Kleyer** bearbeitet von **Dr. W. Láska.**

Fortsetzung von Heft 1278. — Seite 65—80. Mit 19 Figuren.

**Inhalt:**



**Stuttgart 1894.**

**Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.**

# PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch **alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

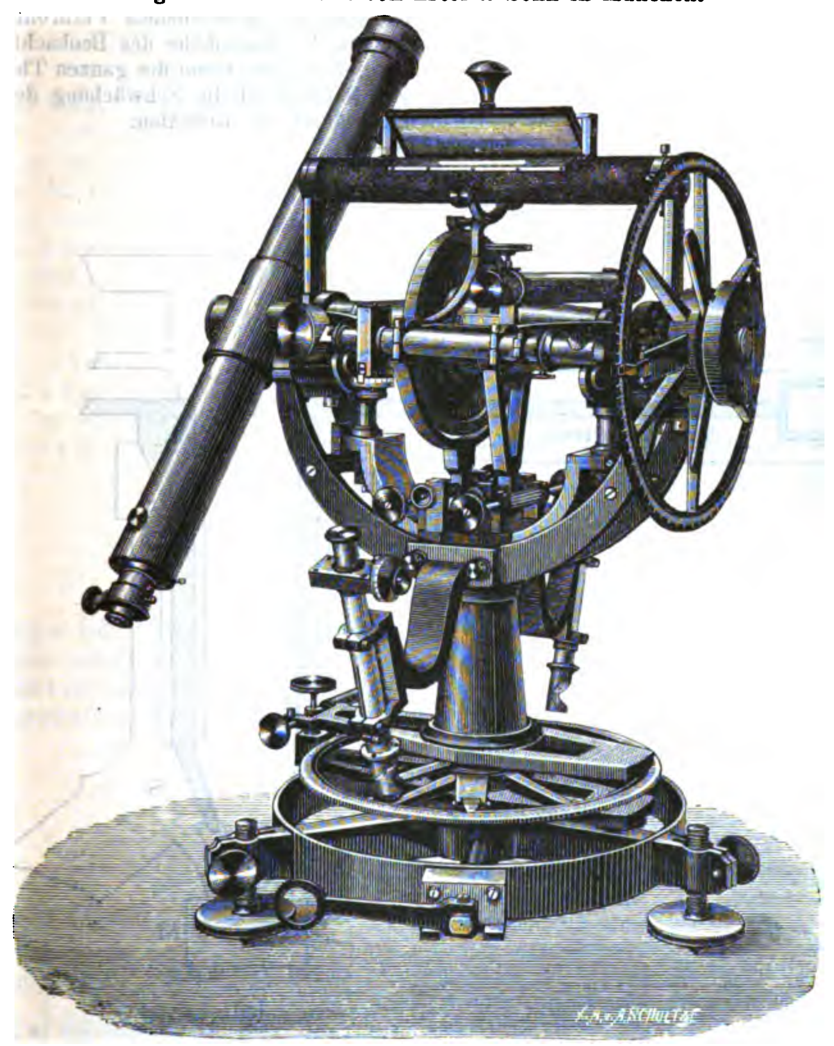
Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen** in **allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. **Kleyer**, Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

**Stuttgart.** **Die Verlagshandlung.**

Figur 74. **Theodolit von Ertel & Sohn in München.**



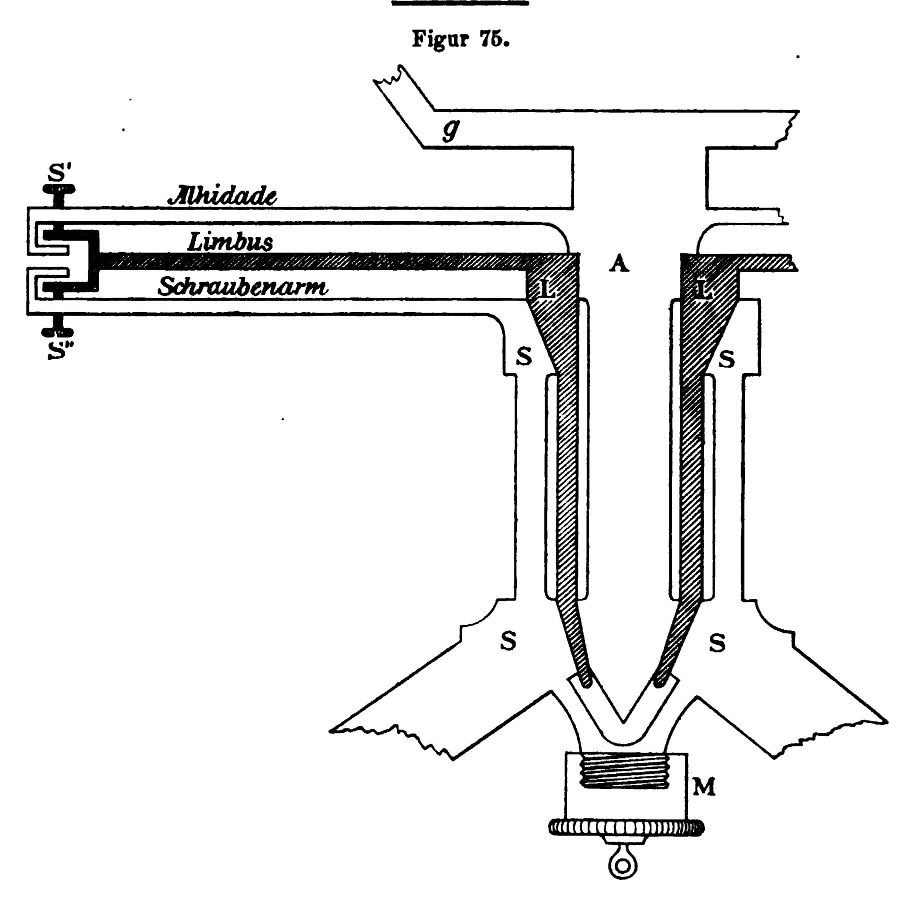
**Frage 84.** Welche Vorteile bieten die verschiedenen Formen?

**Bemerkung.** Für die geodätische Praxis dürfte das zentrisch durchschlagbare Fernrohr die meiste Bequemlichkeit gewähren. Man ist nicht immer gezwungen, in beiden Lagen zu messen, was bei Ueberschlagswinkeln eine Zeitersparnis abgibt. — Das gebrochene Fernrohr wird nur bei grösseren Instrumenten gebraucht; für die geodätische Praxis hat es den Nachteil, dass es die Aufsuchung der Objekte erschwert.

**Antwort.** Vergleicht man die verschiedenen Formen der Theodolite miteinander, so sieht man, dass mit dem einfachen Theodolit nicht so steile Winkel gemessen werden können, wie mit dem exzentrischen und gebrochenen. Dafür muss mit dem exzentrischen der Winkel, ausgenommen freilich, wenn der anvisierte Gegenstand unendlich weit ist, in beiden Fernrohrlagen beobachtet werden. Die vollkommenste Form bietet das gebrochene Instrument, indessen macht das Prisma den ganzen Apparat komplizierter, und auch das Aufsuchen der Visuren ist bei einem gebrochenen Instrument nicht so be-

quem, wie bei einem geraden. Vorteilhaft ist aber bei gebrochenem Fernrohr immer die gleiche Augenhöhe des Beobachters und die gedrängtere Form des ganzen Theodolits. Ein Nachteil ist die Schwächung der Lichtkraft durch die Reflexion.

Figur 75.




**Frage 85.** In welcher Weise werden die Theodolite ausgeführt?

**Antwort.** Was die praktische Ausführung der Theodolite anbetrifft, so ist diese zwar je nach der Werkstätte, aus der die Instrumente stammen, verschieden, aber man kann doch eine typische Form schaffen, welcher sich alle anschliessen.

Die in neuerer Zeit gebauten Theodolite sind gewöhnlich Repetitionstheodolite (vergl. Figur 75) und haben folgende Einrichtung:

Die Stativsäule $S$ (vergl. Figur 75) ist zentrisch durchbohrt. In diese Bohrung passt genau die den Limbus tragende Säule $L$, die ebenfalls durchbohrt ist und die Achse der Alhidade in sich aufnimmt. Beim festen Stativ sind $L$ und $A$ unabhängig von einander drehbar. Mit dem Stativ $S$ ist ein

**Bemerkung.** Ist der Theodolit kein Repetitionstheodolit, dann ist der Limbus fest und mit dem Stativ gewöhnlich aus einem Guss. Die Schraube $S''$ entfällt dann und die Schraube $S'$ wird unten (ähnlich wie $S''$) angebracht.

Bei neueren Instrumenten pflegt man sowohl die Limbus- als auch die Alhidadenachse durch Gegenfedern zu unterstützen, um der gegenseitigen Reibung dieser Achsen vorzubeugen, und den Limbus und die Alhidade beweglicher zu machen.

Schraubenarm fest verbunden, welcher mit Hilfe der Schraube $S''$ den Limbus festzustellen gestattet. Dann ist nur noch die Alhidade drehbar. Sie kann auch mit Hilfe der Schraube $S'$ mit dem Limbus fest verbunden werden. Man hat also folgendes:

I. $S''$ und $S'$ lose; dann kann die Alhidade und der Limbus beliebig und von einander unabhängig gedreht werden.

II. $S''$ fest, $S'$ lose; dann kann nur die Alhidade gedreht werden.

III. $S''$ lose, $S'$ fest; dann dreht sich die Alhidade mit dem Limbus zugleich.

IV. $S''$ und $S'$ fest; dann ist sowohl die Alhidade als auch der Limbus unbeweglich.

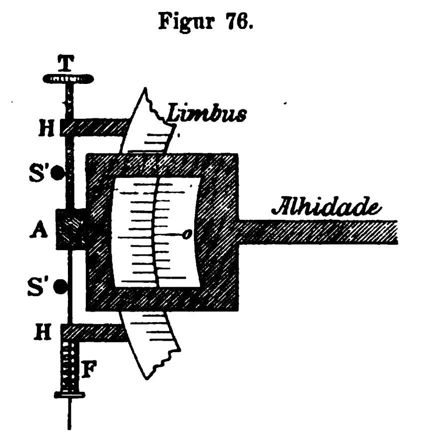
Unterhalb trägt das Stativ noch eine anschraubbare Mütze $M$ mit einer Oese, welche zur Aufnahme der Senkelschnur beim Zentrieren dient. Die Alhidade trägt eine gabelförmige Erweiterung $g$, welche als Träger des Fernrohrs und des Horizontalkreises fungiert.

**Bemerkung.** Die in der Figur 75 gezeichnete Arretierung wird sehr selten angewendet, sie ist aber sehr instruktiv, indem man klar ihre Funktion übersieht. Ueberhaupt möge bei allen schematischen Zeichnungen beachtet werden, dass sie zur Klarstellung des Prinzips dienen sollen. Die Behandlung bleibt dieselbe, die Ausführung wird je nach der Firma verschieden sein. Man kann sich allgemein merken: die obere Schraube arretiert die Alhidade, die untere den Limbus. Eine in neuester Zeit sehr beliebte Art der Arretierung ist jene durch die Achse $S$ (vergl. Figur 75).

---

**Frage 86.** Welche Mittel besitzt man, um möglichst feine Bewegungen des Limbus und der Alhidade, sowie der Horizontalachse zu bewerkstelligen?

Figur 76.



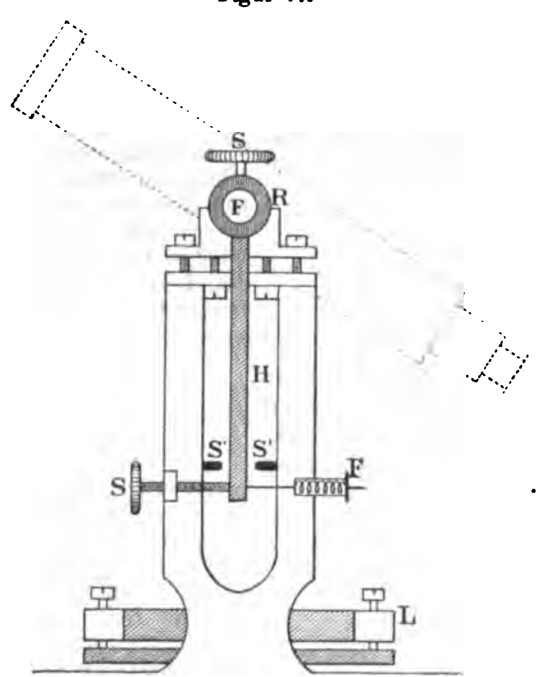

**Antwort.** Zur feinen Bewegung des Limbus, der Alhidade und der Fernrohrachse dienen die Mikrometerschrauben. Wird mittels der Schraube $S'$ (vergl. Figur 75) die Alhidade am Limbus befestigt, so haften auch die Halter $HH'$ (vergl. Figur 76) der Mikrometerschraube $T$ am Limbus fest. Diese Mikrometerschraube drückt die Alhidade $A$ gegen die Federvorrichtung $F$. Wird sie gedreht, so bewegt sich auch die Alhidade. Aehnlich wirkt auch die Mikrometerschraube der Horizontalachse. Hier wird mittels der Schraube $S$ (vergl. Figur 77) die Fernrohrachse $F$ fest an den Ring $R$ gedrückt, welcher einen Hebel $H$ trägt, dessen Ende durch die Mikrometerschraube bewegt wird.

Ist also die Schraube $S'$ lose, dann kann das Fernrohr und der mit ihm verbundene Vertikalkreis beliebig bewegt werden. Wird sie angezogen, dann ist nur eine feine Bewegung möglich, welche durch die Mikrometerschraube bewirkt wird.

Die Hauptbedingung einer guten Mikrometerschraube ist, dass kein „toter Gang“ existiert, d. h. dass nach dem Anziehen der Bremsschraube und ohne Angriff der Mikrometerschraube keine Drehung der Alhidade, resp. des Limbus oder des Fernrohrs möglich ist. Auch muss die Feder $F$ genügend

stark sein, damit auch die Alhidade der Schraube folge. Bei neueren Instrumenten ist durch Stifte ($S'S'$ in den Figuren 76 und 77) dafür vorgesorgt, dass die Elastizitätsgrenze und daher auch die Wirkungsgrenze der Feder nicht überschritten werde. Es kann sich demzufolge z. B. der Hebel $H$ (vergl. Figur 77) nur in dem Zwischenraume von $S'S'$ bewegen.

Figur 77.




**Bemerkung.** Die nachstehende Figur 78 liefert das Bild eines neueren Repetitionstheodolits, wie dieselben vom Mechaniker O. Fennel in Kassel gebaut werden.

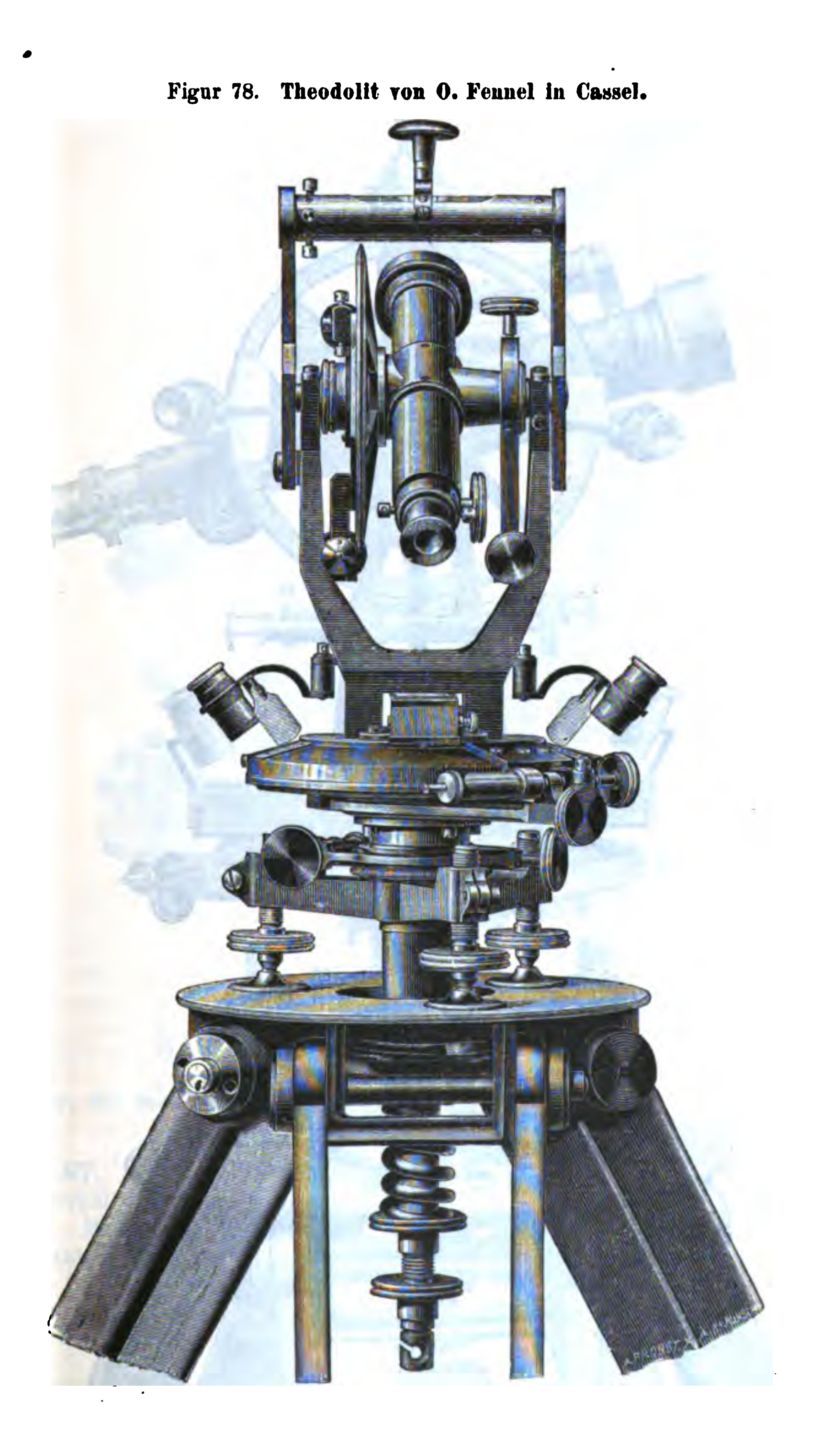
Dieselben werden auch zur ungefähren Orientierung nach den Azimuten mit einer Magnetnadel versehen. Es hat dieses einen grossen Vorteil für die Rechnung, da man nie lange über die Richtung nachdenken muss und daher eine Zeichnung in vielen Fällen erspart.

Die nachstehende Figur 79 zeigt das Instrument von einer andern Seite.

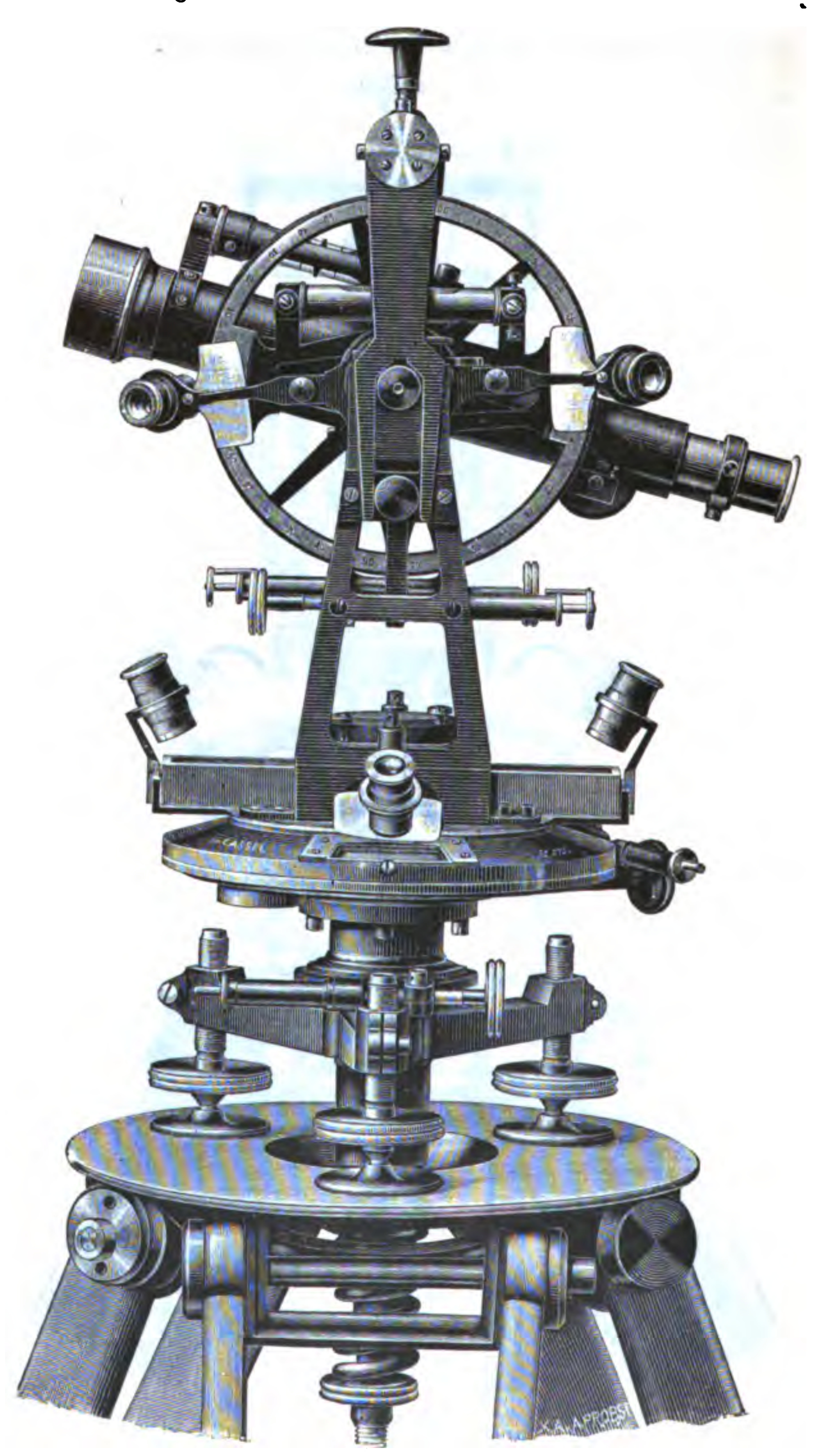
Eine etwas abweichendere Form wird in neuerer Zeit von dem Mechaniker Bamberg in Friedenau bei Berlin in Anwendung gebracht. Die Nonien sind durch Mikroskope ersetzt, das Fernrohr möglichst stark und gross, und die einzelnen Teile sehr massiv (siehe Figur 80).

Die praktische Ausführung der Theodolite sollen die nachfolgenden und vorhergehenden Abbildungen (sämtlich den Katalogen der betreffenden Firmen entnommen) klar machen.

Figur 78. Theodolit von O. Fennel in Cassel.



Figur 79. Theodolit von O. Fennel in Cassel.



Figur 80. Theodolit von C. Bamberg in Friedenau bei Berlin.




## 5. Fehlertheorie des Theodolits.

### a) Fehler, die man durch ein besonderes Vermessungsverfahren unschädlich machen kann.

**Frage 87.** Welche sind die Fehler eines Theodolits, die man durch ein geeignetes Messverfahren unschädlich machen kann?

**Antwort.** Unter die Fehler, die bei geeignetem Messverfahren unschädlich gemacht werden können, zählt man:

I. die Exzentrizität der Alhidade;

II. die Exzentrizität der Visurachse des Fernrohrs;

III. den Indexfehler am Höhenkreis;

IV. die Kollimation.

**Frage 88.** Was versteht man unter Exzentrizität der Alhidade?

**Antwort.** Unter Exzentrizität der Alhidade versteht man jene Gerade, welche den Mittelpunkt des Limbus $L$ mit dem Mittelpunkt der Alhidade $A$ verbindet. Dieser Fehler ändert die Winkelablesung, sobald sie nur an einem Nonius gemacht wird. Denken wir uns die Objekte $OO'$ anvisiert, so erhalten wir den Winkel $OAO'$, für welchen wir den Bogen $M'N'$ ablesen, während vom Zentrum aus (vergl. Figur 81) dem Winkel:

$$OLO' = OAO'$$

die Bogenablesung $MN$ gehört. Der Unterschied der Bogen:

$$MN - M'N'$$

gibt denjenigen Fehler, der durch die Exzentrizität der Alhidade entsteht. Dieser Fehler wird behoben, wenn man die beiden Nonien abliest und das Mittel nimmt. Denn (vergl. Figur 82) es wird für die Visur $B$:

$$\frac{G + G'}{2} = D$$

und für die Visur $A$:

$$\frac{F + F'}{2} = C$$

wenn $G\,G'\,F\,F'\,D\,C$ die Kreislesungen bezeichnet. Nun ist aber:

$$OC \perp OA$$
$$BO \perp OD$$

also auch der Bogen:

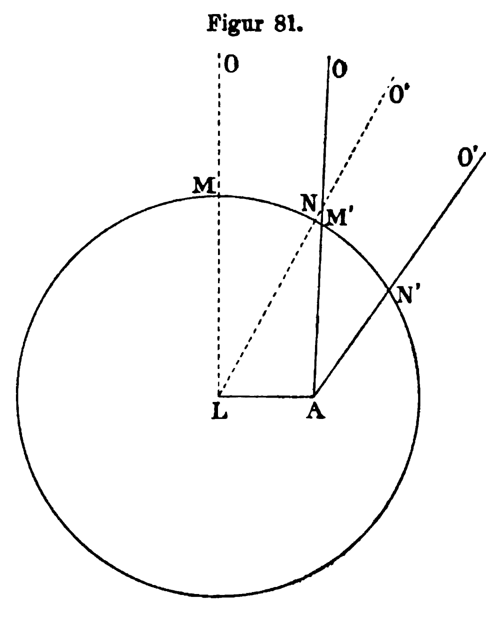
$$CD = EH$$

Aus diesem Grunde sind an allen Horizontalkreisen zwei Nonien angebracht.

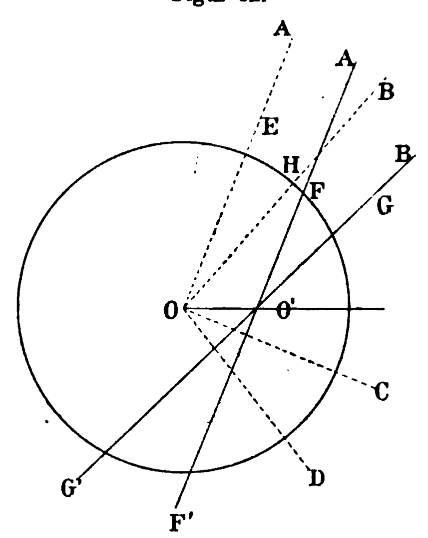
Man muss daher, um von diesem Fehler frei zu bleiben, immer an zwei diametral stehenden Nonien die Ablesung machen und diese zu einem Mittel vereinigen.

Hat man nur einen Nonius, so muss der Winkel in beiden Fernrohrlagen abgelesen werden.

Figur 81.




Figur 82.



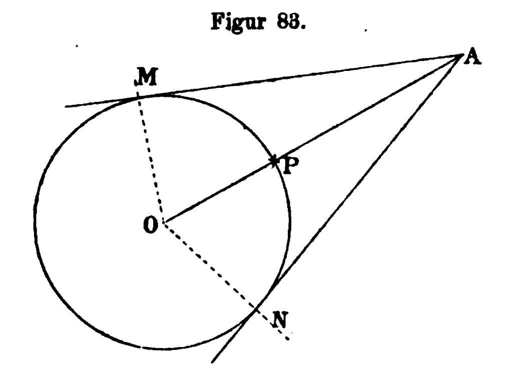

---

**Frage 89.** Was versteht man unter Exzentrizität der Visurlinie?

**Antwort.** Unter der Exzentrizität der Visurlinie versteht man die senkrechte Entfernung der Visurlinie von der Alhidadenachse, d. h. von der Senkrechten im Mittelpunkte des Alhidadenkreises. Der Theodolit mit einem exzentrisch angebrachten Fernrohr

besitzt eine solche absichtliche Exzentrizität der Visurlinie. Den Einfluss dieses Fehlers eliminiert man, wenn man in beiden Fernrohrlagen die Ablesungen macht. Dieser ergibt sich, wenn man beachtet, dass beide Tangenten von einem Punkte an einen Kreis mit der Verbindungslinie dieses Punktes mit dem Zentrum gleiche Winkel einschliessen (vergl. Figur 83). Es wird daher:

Figur 83.




$$\sphericalangle MAO = \sphericalangle OAN$$

und ebenso, weil $\sphericalangle AMO = \sphericalangle ONA = 90^{\circ}$:

$$\sphericalangle MOA = \sphericalangle AON$$

Also am Ablesungskreise:

$$\frac{M+N}{2} = P$$

d. h. um die Richtung $P$ zu bekommen, muss man die Ablesungen beider Fernrohrlagen zu einem Mittel vereinigen. Da nun der Winkel die Differenz zweier Richtungen ist, so gilt für ihn dasselbe Prinzip.

Man kann demnach mit einem exzentrischen Theodolit die Winkel genau so wie mit einem jeden gewöhnlichen messen, wenn man nur in beiden Fernrohrlagen beobachtet.

Da nun eine kleine Exzentrizität der Visurlinie immer möglich ist, auch bei einem zentrischen Fernrohr, so wird man auch bei einem zentrischen Fernrohr dasselbe Verfahren beobachten.

**Bemerkung.** Exzentrische Fernröhren werden nur dort angewendet, wo ziemlich steile Höhenwinkel zu messen sind, oder dort, wo die anvisierten Gegenstände sich unendlich weit vom Beobachter befinden, d. h. in der Astronomie. In der praktischen Feldmesskunde findet man sie seltener in Anwendung, weil, wie schon früher erwähnt wurde, immer die Messung in beiden Lagen erforderlich ist.

---

**Frage 90.** Was versteht man unter dem Indexfehler des Höhenkreises?

Figur 84.

**Antwort.** Unter dem Indexfehler des Höhenkreises versteht man die Abweichung des Noniusnullstriches von der horizontalen Lage der Visurlinie. Visiert man einen Punkt $P$ an, so wird man beim Vorhandensein eines Indexfehlers $i$ statt dessen Höhenwinkel $POH$ (vgl. Figur 84) entsprechenden Bogen am Kreise den Bogen:

$$1) \ldots MN = MR - NR$$

ablesen. Beobachtet man nun in der zweiten Fernrohrlage, so erhält man:

$$M'N' = M'R' + N'R'$$

oder da:

$$N'R' = NR, \quad R'M' = RM$$

auch:

$$2) \ldots M'N' = MR + NR$$

also durch Addition von Gl. 1) in Gl. 2):

$$\frac{MN + M'N'}{2} = MR$$

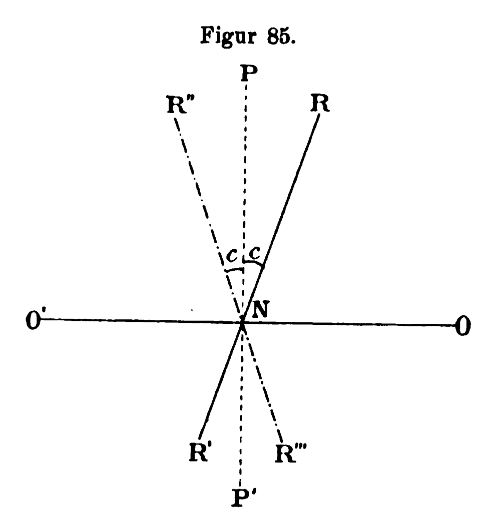
Der Indexfehler des Höhenkreises wird daher eliminiert, wenn man den Höhenwinkel in beiden Fernrohrlagen misst und die Ablesungen zu einem Mittel vereinigt.

**Bemerkung.** Man ersieht hieraus, dass man stets die Ablesung in beiden Lagen vornehmen muss, da man nie sicher ist, dass der Indexfehler, den man einmal abgelesen hat, sich gleich bleibt.

---

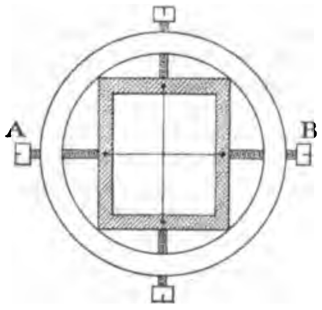
**Frage 91.** Was versteht man unter Kollimationsfehler?

Figur 85.




**Erkl. 62.** Bei jedem Fernrohr, welches ein Fadenkreuz trägt, befinden sich vier Schrauben zur Verstellung des letzteren. Will man z. B. das Fadenkreuz in der Richtung nach $A$ verstellen, so lüftet man die Schraube $A$ und zieht die Schraube $B$ an (vergl. Figur 86).

Figur 86.




**Erkl. 63.** Sei nämlich die Ablesung bei

$$NR = A^0$$

und jene bei $R''$:

$$NR'' = A^0 + \alpha^0$$

so wird (vergl. Figur 85) die wahre Ablesung gleich:

$$NP = A^0 + \frac{1}{2}\alpha^0$$

Man darf also nur die Hälfte des Fehlers abkorrigieren.

**Antwort.** Unter Kollimationsfehler versteht man jenen Winkel, den die Visurachse des Fernrohrs mit der horizontalen Drehachse desselben einschliesst.

Sei (vergl. Figur 85) $OO'$ die horizontale Drehachse des Fernrohrs, $RR'$ dessen Zielachse, sowie $PP \perp OO'$, so ist der Winkel $PNR = c =$ Kollimation desselben. Wird das Fernrohr umgelegt oder durchgeschlagen, so geht es in die Richtung $R''R'''$ über, wobei wieder:

$$R''NP = c$$

Die Kollimation wird am besten durch Umlegen des Fernrohrs in seinen Achsen bestimmt. Das Verfahren ist folgendes:

Man visiert einen Gegenstand an, der mindestens 500 m weit ist, und bringt ihn mit dem Mittelfaden zur Deckung. Hierauf legt man das Fernrohr um. Ist der Gegenstand wieder am Mittelfaden, so ist die Kollimation = 0. Ist er nicht am Mittelfaden, so gibt seine Entfernung von diesem die doppelte Kollimation an. Man hat dann den Horizontalkreis abzulesen, wobei man keine Ablesung $R$ bekommt, hierauf den Mittelfaden auf den Gegenstand zu bringen und wieder abzulesen, wobei man $R''$ erhält. Dann bildet man die Ablesung:

$$\frac{R'' - R}{2}$$

und stellt den Noniusnullpunkt auf diese Ablesung, klemmt fest und bringt nun mittels der Schrauben am Okulare den Gegenstand zur Deckung mit dem Mittelfaden (vergl. Erkl. 63).

Da das Umlegen des Fernrohrs identisch ist mit seinem Durchschlagen, was die Wirkung nämlich anbetrifft, so wird der Kollimationsfehler eliminiert, wenn das Fernrohr in beiden Lagen verwendet wird.

Ist der Kollimationsfehler nicht allzugross, so thut man besser, wenn man immer in beiden Lagen beobachtet, statt den Fehler zu korrigieren. Alle bisher genannten Fehler sind durchaus nicht so konstant, wie man auf den ersten Blick meinen möchte, denn beim Feldgebrauch ist das Instrument oft stark variierenden Temperaturdifferenzen ausgesetzt.

## b) Fehler, die man am Theodolit selbst korrigieren muss.

**Frage 92.** Welches sind die Fehler, die man nicht durch ein besonderes Messverfahren eliminieren kann?

**Antwort.** Unter die Fehler, die man am Theodolit selbst berichtigen muss, werden diejenigen zu zählen sein, welche durch die Nichtparallelität der Libellen- und der Horizontaldrehachse des Fernrohrs mit der Alhidadenebene entstehen, d. h. mit jener Ebene, die senkrecht zur Vertikalachse steht.

---

**Frage 93.** Wie werden diese Fehler beseitigt?

**Antwort.** Handelt es sich um die Beseitigung dieser Fehler, so hat man drei Fälle zu unterscheiden, die durch die konstruktive Befestigung der Libelle am Instrument bedingt werden.

I. Die Libelle steht auf der Drehungsachse des Fernrohrs (Aufsatzlibelle, Reiterlibelle).

II. Die Libelle steht auf dem Fernrohr in dessen Längsrichtung.

III. Die Libelle steht auf der Alhidade.

**Bemerkung.** In der neuesten Zeit werden fast ausnahmslos bei Theodoliten Reiterlibellen angewendet, die Dosenlibellen dienen nur zur ungefähren Einstellung.

---

**Frage 94.** Wie wird im Falle, dass eine Aufsatzlibelle existiert, die Parallelität der Libellen und Fernrohrachsen mit der Alhidadenebene hergestellt?

**Antwort.** Man bringt zuerst die Libelle zum Einspielen, legt sie darauf um. Zeigt sich ein Ausschlag, so wird er zur Hälfte an der Libellen-Korrektionsschraube korrigiert.

Dann ist die Libellenachse parallel mit der augenblicklichen Drehachse des Fernrohrs.

Nun versucht man in der bei Frage 97 gegebenen Ordnung das Instrument horizontal zu stellen. Erreicht man es, dass die Libelle bei der Drehung um 360° an Ort und Stelle bleibt, so ist auch die Alhidadenebene parallel zur Libelle und zum Fernrohr.

Ist man aber nicht im stande, das Instrument auf diese Weise horizontal zu stellen, so ist dieses ein Zeichen, dass die Libellenachse nicht parallel zur Alhidadenebene steht.

Man bringt dann das Fernrohr so in die nahezu horizontale Lage, dass der Ausschlag der Libelle möglichst klein wird, stellt sie parallel zu zwei Stellschrauben des Theodolits und bringt die Libelle zum Einspielen. Hierauf wird die Alhidade um 180° (genähert) gedreht, so dass die Libelle umgelegt erscheint. Der sich ergebende Ausschlag wird zur Hälfte an den Stellschrauben und zur Hälfte an den Achsenlagerschrauben des Instruments (vergl. Erkl. 64) korrigiert.

**Erkl. 64.** Die Einrichtung zur Hebung oder Senkung des Achsenlagers ist unmittelbar an der Figur 87 klar. Um z. B. das Achsenlager zu heben, lüftet man die Schrauben $A$ und $B$ und zieht die Schrauben $C$ und $D$ an.

Figur 87.

Hierauf dreht man das Fernrohr um 90° und bringt mittelst Stellschrauben den ganzen Ausschlag zur Null. Dann muss, falls keine andere Fehlerquelle im Spiele ist, das Instrument genau horizontal stehen und die Libelle in allen Lagen einspielen.

Derartige Korrektionen macht aber jeder gewissenhafte Mechaniker, bevor er ein Instrument abliefert. Die besagten Rektifikationen haben einen mehr akademischen Wert. Bezieht man aber ein Instrument nicht direkt von einer renomierten Firma, sondern aus zweiter Hand, dann bleibt wohl nichts anderes übrig, als sich einmal von dessen Fehlerlosigkeit zu überzeugen.

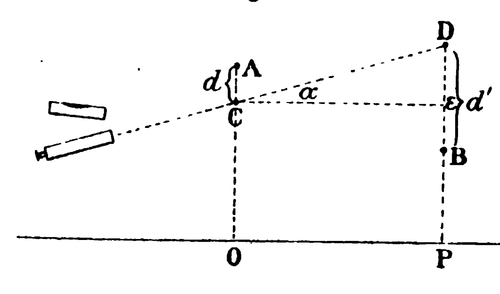
**Bemerkung.** Um sich ein allgemeines Urteil über die Güte eines Instruments zu verschaffen, messe man öfters einen bekannten Winkel. Eine solche Kontrolle ist während eines längeren Gebrauchs absolut notwendig und erspart oft viel Arbeit.

---

**Frage 95.** Wie hat man zu verfahren, wenn die Libelle fest am Fernrohr in dessen Längsrichtung befestigt ist?

**Antwort.** Um zunächst die Richtung der Libellenachse mit der Fernrohrachse in Uebereinstimmung zu bringen, benützt man zwei genau nivellierte Punkte, die etwa 100 m von einander entfernt abstehen. Man stellt sich vor dem ersten etwa 10 m weit auf, bringt die Blase zum Einspielen und bestimmt wie beim Nivellieren die Höhendifferenz $d$.

Figur 88.




Wäre die Neigung der Fernrohrachse gegen die Libellenachse gleich Null, so müsste die

Summe oder Differenz

den Ablesungen der bekannten Höhendifferenz der beiden Punkte gleich sein.

Stehen die beiden Punkte $A$ und $B$ (vergl. Figur 88) hintereinander und sind $h$ und $h'$ ihre bekannten Höhen, sowie $\triangle$ ihre Entfernung, so haben wir (vergl. Figur 88) im $\triangle CDE$ (vergl. Erkl. 65):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{DE}{CE}$$

Nun ist:

$$DE = (PB + BD) - (OA - AC)$$
$$CE = OP = \triangle$$

oder:

$$DE = (h' + d') - (h - d)$$

also:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{(h' - h) + (d + d')}{\triangle}$$

woraus der Winkel $\alpha$ berechnet werden kann. Da $\alpha$ ein sehr kleiner Winkel ist, so kann man setzen (vergl. Erkl. 66):

$$\alpha'' = 206265 \frac{(h' - h) + (d + d')}{\triangle}$$

worauf man $\alpha$ direkt in Bogensekunden erhält. Ist die Empfindlichkeit der Libelle bekannt, so fixiere man bei einem Libellen-

**Erkl. 65.** Ein Satz aus der Trigonometrie lautet: Die Tangente eines der Hypotenuse anliegenden Winkels ist gleich dem Quotienten aus der gegenüberliegenden Kathete in die anliegende. (Vergleiche Kleyers Lehrbuch der Trigonometrie.)

**Erkl. 66.** Ist $\alpha$ ein kleiner Winkel, so kann bekanntlich:

$$\operatorname{tg} \alpha = \alpha'' \sin 1''$$

gesetzt werden. Daraus folgt:

$$\alpha'' = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sin 1''} = 206265 \operatorname{tg} \alpha$$

stande, der dem Winkel $\alpha''$ entspricht, einen Punkt und bringe durch die Korrektionsschraube die Libelle zum Einspielen. Wie man sieht ist diese Methode ein wenig umständlich. Um nun die Libellenachse parallel zur Alhidadenebene zu stellen, verfahre man genau so, wie bei der vorhergehenden Frage.

---

**Frage 96.** Wie hat man zu verfahren, wenn die Libelle fest mit der Alhidade verbunden ist?

**Antwort.** Man stellt zuerst die Achse der Libelle parallel zur Alhidadenebene, wie in der Frage 94 gelehrt worden. Um nun auch die Ueberzeugung zu haben, dass die Horizontalachse des Fernrohrs senkrecht steht zur Alhidadenachse, muss man nachsehen, ob das Fernrohr bei einer vertikalen Drehung sich in der Vertikalebene bewegt. Zu diesem Zwecke führe man das Fernrohr längs einer hohen senkrechten Turmmauerkante und sehe nach, ob die Kante immer am Vertikalfaden bleibt. Oder noch besser, man hänge irgendwo ein recht langes Lot auf, dessen Ende man zur Vermeidung der Schwingungen im Wasser schwimmen lassen kann. Oder man bediene sich eines künstlichen Horizonts von Quecksilber, indem man einen hochgelegenen Punkt direkt anvisiert und nachsieht, ob die Visurebene durch sein Spiegelbild geht. Ist dieses nicht der Fall, dann muss an den entsprechenden Achsenlagerschrauben geschraubt werden (vergl. Erkl. 67 und 64).

**Erkl. 67.** Unter einem künstlichen Horizont wird eine flache, mit Quecksilber gefüllte Schale verstanden, dieselbe vertritt einen genau horizontal liegenden Spiegel und es befinden sich immer Auge, Objekt und Spiegelbild in einer und derselben Vertikalebene. Es möge noch hervorgehoben werden, dass die Methode mit künstlichem Horizont die genaueste von allen ist.

---

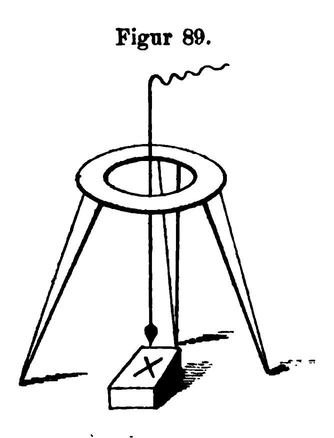
## 6. Gebrauch des Theodolits.

**Frage 97.** Wie wird der Theodolit über einen markierten Punkt aufgestellt?

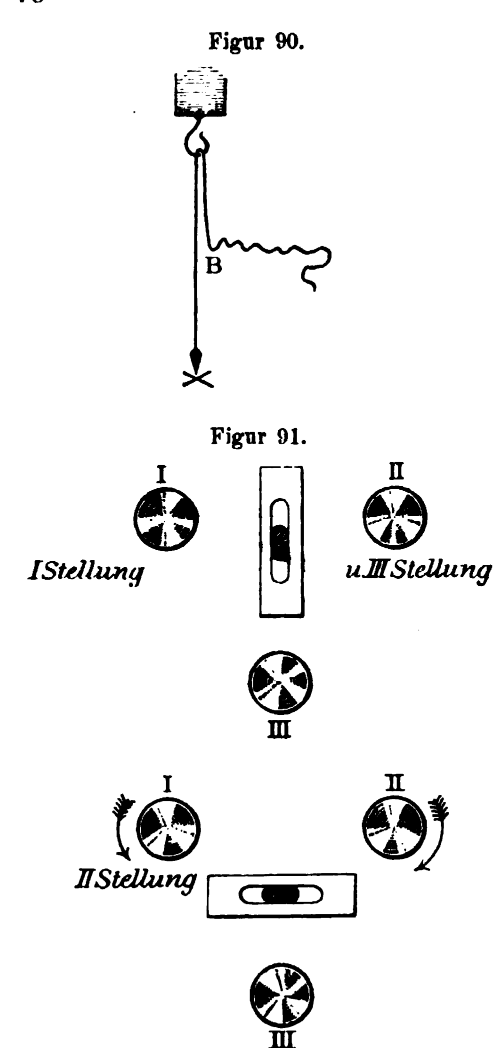
**Antwort.** Um über einen markierten Punkt den Theodolit aufzustellen, verfahre man wie folgt:

I. Das Stativ wird genähert über den Punkt zentriert und zwar so, dass die obere Fläche möglichst horizontal ist. Zu diesem Zwecke nehme man das Senklot, halte es in freier Hand, etwa in der Mitte der Stativöffnung und schiebe das Stativ so lange, bis das über dem markierten Punkt stehende Lot, etwa in der Mitte der Stativöffnung sich befindet (vergl. Figur 89).

Figur 89.



II. Sodann wird der Theodolit auf das Stativ gestellt und das Lot an die Zentriachse des Fernrohrs befestigt, so dass es auf und nieder bewegt werden kann. Während man nun mit einer Hand das Fernrohr hin- und herschiebt, hält man mit der anderen Hand die Schnur des Lotes bei $B$ und senkt erforderlichenfalls das Lot bis zum Boden, um



Figur 90.

Figur 91.

dessen Schwankungen zu vermindern. Ist die Zentrierung vollendet, so wird das Fernrohr an das Gestell angezogen, jedoch nicht zu stark, da man noch mit den Fussschrauben des Theodolit arbeiten muss (vergl. Fig. 90).

III. Um das Instrument horizontal zu stellen, bringe man die Aufsatzlibelle senkrecht zur Verbindungslinie zweier Schrauben I und II (vergl. Figur 91), so dass ihr Ende zur dritten Schraube zu liegen kommt. Durch Schrauben an dieser Schraube wird die Blase zum Einspielen gebracht. Ist dieses geschehen, so dreht man den Limbus so, dass die Libelle eine gegen die frühere senkrechte Stellung einnimmt. Spielt auch jetzt die Libelle ein, so ist das Instrument horizontal aufgestellt. Wenn nicht, so drehe man an den Schrauben I und II gleichmässig, entweder in der Richtung der Pfeile der Figur oder entgegengesetzt, bis die Blase einspielt. Hierauf wird die Libelle noch einmal in die I. Stellung gebracht, und wieder an der Schraube III zum Einspielen gebracht. Bringt man die Libelle wieder in die II. Stellung, so wird sie in der Regel einspielen, wodurch die Horizontalstellung des Instrumentes vollendet ist. Sollte dieses nicht der Fall sein, so muss das Verfahren wiederholt werden, was jedoch bei einiger Uebung sehr selten geschieht.

IV. Nun wird das Fernrohr fest an das Stativ geschraubt und ist zur Messung fertiggestellt. Man nehme jedoch, wenn nicht nötig, die Aufsatzlibelle nicht ab, um die Horizontalstellung stets kontrollieren zu können.

---

**Frage 98.** Welchen Einfluss hat die exzentrische Stellung des Theodolits auf einen gemessenen Winkel?

**Antwort.** Um den Einfluss der ungenauen exzentrischen Stellung des Theodolits auf den gemessenen Winkel beurteilen zu können, nehmen wir an, wir hätten den Winkel $OAB = \alpha$ zu bestimmen, infolge exzentrischer Stellung stand aber das Instrument nicht in $O$, sondern in $O'$ und es wurde der Winkel $\alpha'$ gemessen. Wie gross ist die Differenz:

$$\alpha - \alpha'$$

Wir haben:

$$\alpha + \varepsilon = \alpha' + \varepsilon'$$

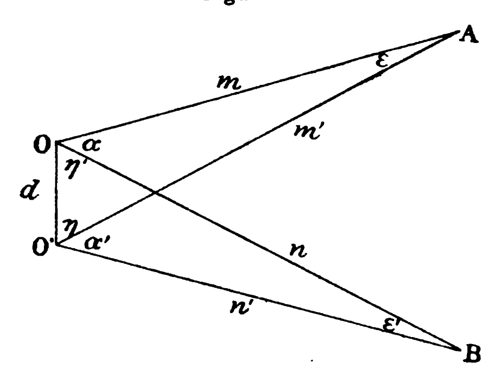
also:

$$\alpha - \alpha' = \varepsilon - \varepsilon'$$

dabei ist $\varepsilon$, $\varepsilon'$ ein kleiner Winkel.



Figur 92.




**Erkl. 68.** Ist $\varepsilon$ ein kleiner Winkel, so kann hinreichend genau:

$$\sin \varepsilon = \varepsilon'' \sin 1''$$

demnach wird:

$$\varepsilon'' = \frac{\sin \varepsilon}{\sin 1''}$$

also:

$$\varepsilon'' = \frac{d}{\sin 1''} \cdot \frac{\sin \eta}{n}$$

**Erkl. 69.** Es wird:

$$\alpha = \alpha' + \frac{d}{\sin 1''}\left(\frac{\sin \eta'}{n} - \frac{\sin \eta}{m'}\right)$$

$$= \frac{0{\cdot}01}{10{\cdot}} \cdot 206265\,(\sin \eta' - \sin \eta)$$

also rund:

$$= 206\,(\sin \eta' - \sin \eta)$$

Wir haben im $\triangle OAB$:

$$\sin \varepsilon = \frac{d}{m} \sin \eta$$

und im $\triangle O'AB$:

$$\sin \varepsilon' = \frac{d}{m} \sin \eta'$$

da $\varepsilon$, $\varepsilon'$ sehr kleine Winkel sind, so wird (vergl. Erkl. 68):

$$(\varepsilon' - \varepsilon)'' = \frac{d}{\sin 1''}\left(\frac{\sin \eta'}{n'} - \frac{\sin \eta}{m}\right)$$

Demnach auch:

$$\alpha = \alpha' + \left[\frac{d}{\sin 1''}\left(\frac{\sin \eta'}{n'} - \frac{\sin \eta}{m}\right)\right]''$$

$d$, $n$ und $m$ sind in gleichem Mass zu nehmen, gewöhnlich in Metern.

Nehmen wir an, es sei:

$$n' = m = 10\,\text{m}$$

$$d = 1\,\text{cm} = 0{\cdot}01\,\text{m}$$

so folgt (vergl. Erkl. 69):

$$\alpha = \alpha' + [206\,(\sin \eta' - \sin \eta)]''$$

Nehmen wir nun ferner an:

$$\eta' = 90^0$$

$$\eta = 0$$

so folgt:

$$\alpha = \alpha' + 206'' = \alpha' + 3'\,26$$

Dieses ist aber schon ein bedeutender Fehler. Man sieht hieraus, wie vorsichtig man beim Zentrieren verfahren muss, sobald kürzere Distanzen vorliegen. Besonders da das Zentrieren keineswegs eine so leichte Sache ist, wie man sich vorstellen würde.

---

**Frage 99.** Wie wird ein Winkel mit einem Theodolit gemessen?

**Antwort.** Um einen Winkel mit dem Theodolit zu messen, verfahre man wie folgt:

Das Instrument wird nach Frage 97 zentrisch über dem Scheitelpunkte des zu messenden Winkels aufgestellt und horizontal gestellt. Sodann visiert man das eine Objekt $A$ ungefähr beim offenen Alhidadenkreis, klemmt fest und bringt mittels der Alhidadenschraube das Objekt zur Deckung mit dem Mittelfaden. Hierauf werden die Grade, Minuten, Stunden, an den Kreisen abgelesen. Nach der Ablesung wird der Alhidadenkreis frei gemacht. Nun gehe man in der Richtung von **rechts nach links** auf das Objekt $B$ und bestimme ebenso die Ablesung bei $B$.

Hierauf wird das Fernrohr durchgeschlagen und der Alhidadenkreis um 180° gedreht. Nun wird zuerst der Punkt $B$ und dann, indem man von **links nach rechts** geht, der Punkt $A$ abgelesen.

Die Anordnung und Schematisierung ergibt sich aus nachfolgendem Beispiel:

**Bemerkung.** Da bei diesem Verfahren der Vertikalkreis seine Lage (z. B. rechts gegen links oder umgekehrt) ändert, so spricht man auch von der ersten und zweiten Kreislage. Der Grund für die nebenstehende Art und Weise der Winkelmessungen ist in der Fehlertheorie des Theodolits ausführlich dargethan. Hier werden nur die dort angegebenen Methoden zur Fehlerelimination zusammengefasst.

### A. Feldskizze.

Datum und Ort:
Beobachter:
Instrument:
Standpunkt:

| | | | Non. I | Non. II |
|---|---|---|---|---|
| I. Kreislage | *A* . . | 116° 52′ | 40″ | 55″ |
| | *B* . . | 267 40 | 45 | 45 |
| II. Kreislage | *B* . . | 87 41 | 0 | 10 |
| | *A* . . | 296 52 | 40 | 35 |

### B. Ausrechnung.

| Standpunkt | Lesung | | Nonien | | | | Summe | Mittel | Winkel | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | I. Kreislage | | II. Kreislage | | | | | | | |
| | ° | ′ | I | II | I | II | ″ | ″ | | ° | ′ | ″ |
| *A* | 116 | 52 | 40 | 55 | 40 | 35 | 170 | 42·5 | | | | |
| *B* | 267 | 40 | 45 | 45 | 60 | 70 | 220 | 55·0 | | | | |
| | | | | | | | | | *AB* | 150 | 48 | 1·25 |

**Frage 100.** Wie wird die Repetitionsmessung ausgeführt?

**Antwort.** Die Repetitionsmessung geschieht in folgender Weise:

1) Man stellt bei festgeklemmtem Limbus das Fernrohr auf den links stehenden Zielpunkt *A* und liest den Wert $a_0$ ab (vergl. Erkl. 70).

2) Man stellt bei unverändertem Limbus das Fernrohr auf den rechts stehenden Zielpunkt *B* und liest den Wert $a_1$ ab.

3) Man dreht den Limbus samt der Alhidade wieder auf den Punkt *A* und liest $a_0'$ ab.

4) Man stellt bei festgeklemmtem Limbus [der Lage bei 3)] den Punkt *B* ein und liest den Wert $a_1'$ ab.

Dieses Verfahren wird wiederholt, etwa $n$ mal (vergl. Erkl. 71). Dann ist:

$$a_1 - a_0 = A_1$$
$$a_1' - a_0' = A_2$$
$$a_1'' - a_0'' = A_3$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_1^{(n-1)} - a_0^{(n-1)} = A_n$$

Sodann erhält man, indem man summiert und beachtet, dass:

$$a_0 = a_1'$$
$$a_0' = a_1''$$
$$a_0'' = a_1'''$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_1 - a_0^{n-1} = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots A_n$$

**Erkl. 70.** Allgemein als positiv gilt die Drehung im Sinne des Uhrzeigers, nach welcher auch alle Winkelinstrumente eingeteilt sind. Demnach wachsen die Zahlen der Teilung von links nach rechts.

**Erkl. 71.** Man hat also das Schema:

$$(B)\quad(A)$$
$$a_1 \cdots a_0$$
$$\vdots$$
$$(B)\, a_1' \cdots a_0'\, (A)$$
$$\vdots$$
$$(B)\, a_1'' \cdots a_0''\, (A)$$
$$\vdots$$
$$(B)\, a_1''' \cdots a_0'''\, (A)$$

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

| 1280. Heft. | Preis des Heftes 25 Pf. | Vermessungskunde (Geodäsie). Erster Teil. Forts. v. Heft 1279. — Seite 81—96. Mit 14 Figuren und 3 Tafeln. |
|---|---|---|



# Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung



— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
**Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten**
erläutert durch
**viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,**
aus allen Zweigen
der **Rechenkunst,** der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus **allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
**zum einzig richtigen und erfolgreichen**
**Studium** zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von


**Dr. Adolph Kleyer,**
Mathematiker, vereidetor königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in **Frankfurt a. M.**


unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

# Vermessungskunde
## (Geodäsie).
### Erster Teil.

Nach **System Kleyer** bearbeitet von **Dr. W. Láska.**

Fortsetzung von Heft 1279. — Seite 81—96. Mit 14 Figuren und 3 Tafeln.

**Inhalt:**

Gebrauch des Theodolits. — Genauigkeit der Winkelmessungen. — Über die Bussole. — Der Messtisch. — Aufgaben über die Messtischbehandlung.


**Stuttgart 1894.**
Verlag von Julius Maier.

**Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.**

# PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie,** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues,** des **konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form,** mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch **alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

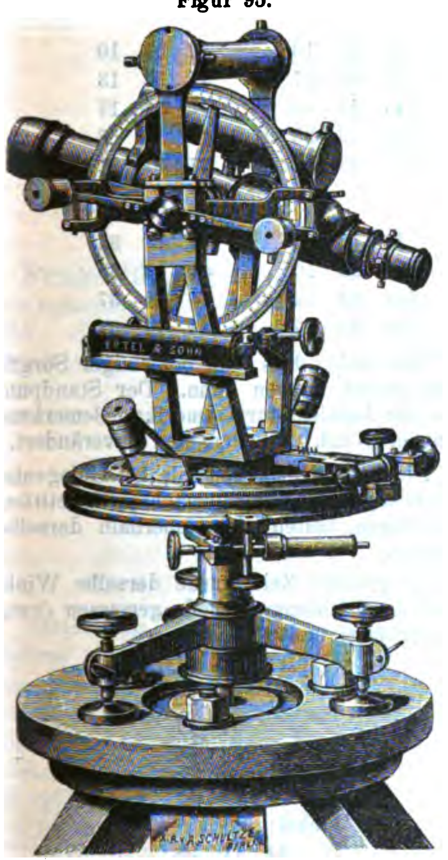
Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. **Kleyer,** Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

**Stuttgart.** **Die Verlagshandlung.**

**Erkl. 72.** Wird bei der Messung der Nullpunkt überschritten, so muss 360° mitgenommen werden. Ist dieses $m$ mal geschehen, dann haben wir:

$$\frac{a_1 - a_0^{n-1} + m \cdot 360^0}{n} = A$$

**Repetitionstheodolit von Ertel & Sohn.**
Figur 93.




Nimmt man das arithmetische Mittel des $A$, und setzt man:

$$A_1 + A_2 + \cdots A_n = nA$$

so folgt (vergl. Erkl. 72):

$$\frac{a_1 - a_0^{n-1}}{n} = A$$

Der auf diese Weise beobachtete Wert von $A$, entspricht also $n$ einzelnen Beobachtungen. Die Repetition ist also nichts anderes als ein Substrat für $n$ einzelne Beobachtungen.

Nehmen wir nun an, es seien Teilungsfehler am Limbus vorhanden, etwa:

$$\varDelta a_1 \text{ bei } a_1$$
$$\varDelta a_0^{n-1} \text{ bei } a_0^{n-1}$$

so folgt:

$$\frac{a_1 + \varDelta a_1 - a_0^{n-1} - \varDelta a_0^{n-1}}{n} = A$$

oder:

$$\frac{a_1 - a_0^{n-1}}{n} + \frac{\varDelta a_1 - \varDelta a_0^{n-1}}{n} = A$$

Durch die Repetition werden also die Teilungsfehler im Verhältnis der Repetitionen unschädlich gemacht.

Nimmt man nun an, dass durch die Zusammenfassung von $A_1 A_2 \cdots$ zu einem arithmetischen Mittel auch die Beobachtungsfehler vermindert werden, was in der Regel zutrifft, so sieht man, dass die Repetitionsmessung äusserst empfehlenswert ist.

**Bemerkung.** Bei der Repetition kommt es hauptsächlich darauf an, dass das Instrument während der ganzen Operation unverrückt bleibe.

---

**Frage 101.** Besitzt die Repetitionsmessung auch Nachteile?

**Bemerkung.** Die Repetition wurde im Jahre 1752 von Tobias Mayer, Vater des Geodäten Johannes Tobias Mayer, in Göttingen eingeführt. Man hat sie in früherer Zeit fast allgemein angewendet; später ist sie unverdienter Weise fast ausser Anwendung gekom-

**Antwort.** Man hat gefunden, dass bei der Repetitionsmessung auch ziemlich regelmässige Fehler entstehen, welche durch Reibung zwischen dem Limbus und der Alhidade bedingt sind. Dieselben häufen sich an, besonders bei minder guten Instrumenten. Sie können aber unschädlich gemacht werden, wenn man beim letzten Absatz die Messung in gleicher Tourenzahl in

men, indem man bei der Repetition ein Mitdrehen des Fernrohrs befürchtete. Allein bei den neueren Instrumenten ist dieser Uebelstand vollkommen ausgeschlossen.

entgegengesetzter Richtung wiederholt. Geschieht diese Wiederholung beim durchschlagenen Fernrohr, so stellt die Repetitionsmessung wohl die genaueste Art und Weise der Winkelmessung dar, die wir besitzen.

Um dieses zu belegen, teile ich meine eigene Messung (aus der Vermessung der Stadt Pisek in Böhmen 1891) mit:

Das Instrument war ein Repetitionstheodolit von Ertel u. Sohn in München (älterer Arbeit), 10″ durch Nonien angebend:

(II Nonien).

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | △ Putim | 124° | 20′ | 35″ | | | | | | |
| | △ Pisek | 172 | 14 | 45 | 47 | 54 | 10 | 47 | 54 | 10 |
| | 2*w* | 220 | 9 | 2 | 95 | 48 | 27 | 47 | 54 | 13 |
| | 3*w* | 268 | 3 | 8 | 143 | 42 | 33 | 47 | 54 | 11 |
| | 4*w* | 315 | 57 | 8 | 191 | 36 | 33 | 47 | 54 | 8 |
| | 5*w* | 3 | 51 | 30 | 239 | 30 | 55 | 47 | 54 | 11 |
| ferner: | | | | | | | | | | |
| | △ Pisek | 3 | 51 | 30 | | | | | | |
| | △ Cizova | 48 | 3 | 5 | 44 | 11 | 35 | 44 | 11 | 35 |
| | 2*w* | 92 | 14 | 40 | 88 | 23 | 10 | 44 | 11 | 35 |
| | 3*w* | 136 | 26 | 22 | 132 | 34 | 52 | 44 | 11 | 37 |
| | 4*w* | 180 | 37 | 57 | 176 | 46 | 27 | 44 | 11 | 37 |

**Bemerkung.** Bei der Richtungsmethode, die wir im II. Teil ausführlich behandeln, wird das Fernrohr, nachdem die Winkelmessung vollendet ist, durchgeschlagen und die Winkelmessung im entgegengesetzten Sinne wiederholt.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| I. | Putim | 344 | 10 | 27 | 30 |
| | | | 10 | 32 | |
| | Pisek | 32 | 4 | 57 | 52 |
| | | | 4 | 47 | |
| | Cizova | 76 | 16 | 22 | 20 |
| | | | 16 | 17 | |
| II. | Putim | 264 | 20 | 7 | 55 |
| | | | 19 | 42 | |
| | Pisek | 312 | 14 | 0 | 6 |
| | | | 14 | 12 | |
| | Cizova | 356 | 25 | 52 | 55 |
| | | | | 57 | |
| III. | Putim | 31 | 28 | 52 | 52 |
| | | | 28 | 52 | |
| | Pisek | 79 | 22 | 47 | 50 |
| | | | 22 | 52 | |
| | Cizova | 123 | 34 | 30 | 37 |
| | | | 34 | 45 | |

Man sieht, dass man bei einiger Sorgfalt sehr genau messen kann. Der Standpunkt war der Aussichtsturm Amerika. Bemerkung: Starker Wind. Libellenstand unverändert.

Die zahlreichen, von mir bei Gelegenheit der besagten Messung gemachten Repetitionsmessungen halten sich innerhalb derselben Grenze.

Zu gleicher Zeit wurde derselbe Winkel nach der Richtungsmethode gemessen (vergl. Bemerkung) und gefunden:

Winkel: Putim — Pisek

| | | |
|---|---|---|
| 47 | 54 | 22 |
| | 54 | 11 |
| | 53 | 58 |
| 47° | 54′ | 10″ |

Winkel: Pisek — Cizova

| | | |
|---|---|---|
| 44 | 11 | 28 |
| | 11 | 49 |
| | 11 | 47 |
| 44° | 11′ | 31″ |

Die mit Rücksicht auf das angewandte Instrument übereinstimmenden Resultate zeigen recht deutlich die volle Gleichwertigkeit beider Methoden.

Nimmt man das Mittel aus beiden Bestimmungen, auf 1″ abgerundet, so folgt:

Winkel: Putim — Pisek
47° 54′ 10″

Winkel: Pisek — Cizova
$44^0\ 11'\ 33''$

Dieses Beispiel zeigt auch, mit welcher Genauigkeit man einen Winkel mit einem 10″ angebenden Theodolit messen kann.] E]

## 7. Genauigkeit der Winkelmessungen.

**Frage 102.** Was ist über die Genauigkeit der Winkelmessungen zu merken?

**Antwort.** Das Hauptprinzip, welches bei den Winkelmessungen zu beachten ist, besagt: dass die Winkelgenauigkeit bei demselben Instrumente von der Winkelgrösse unabhängig ist. Während bei den Längenmessungen die Genauigkeit um so kleiner wird, je länger die Strecke ist, ist die Genauigkeit bei der Winkelmessung von der Grösse des Winkels unabhängig.

---

**Frage 103.** Kann man mit einem Instrumente, welches bloss Minuten angibt, einen Winkel bis auf Sekunden genau messen?

**Antwort.** Fasst man die Frage theoretisch auf, so kann die Möglichkeit nicht abgesprochen werden. Denn nehmen wir an, wir hätten einen Winkel von 1′ 33″ mit einem Minuten angebenden Theodolit zu messen. Dabei haben wir $a$ mal 1′ und $b$ mal 2′ bekommen, also ist das Resultat:

$$\frac{a\cdot 1' + b\cdot 2'}{a+b}$$

Dieses Resultat soll aber geben 1′ 33″, also wird:

$$a\cdot 1' + b\cdot 2' = (a+b)\cdot 1'\,33''$$

Es entsteht nun die Frage, gibt es zwei ganze Zahlen $a$ und $b$, die diese Gleichung befriedigen? Gewiss, denn bringt man sie auf die Form:

$$a(60'' - 93'') + b(120'' - 93'') = 0$$

also:

$$-33''a + 27''b = 0$$

so sieht man sofort, dass sie befriedigt wird durch:

$$a = 27\cdot n$$
$$b = 33\cdot n$$

wobei $n$ eine beliebige ganze positive Zahl bezeichnet.

Man ersieht hieraus, dass man 60 Messungen machen muss, vorausgesetzt, was unwahrscheinlich ist, dass sich darunter eine bestimmte Anzahl von 1′ und eine bestimmte Anzahl von 2′ befindet.

Diese Ueberlegung zeigt klar, dass man praktisch genommen mit einem Winkelinstrument einen Winkel höchstens so genau messen kann, als seine Angabe ist, d. h. z. B. mit

**Bemerkung.** Die nebenstehende Untersuchung zeigt deutlich, dass es bei einem jeden Instrument eine gewisse Genauigkeitsgrenze gibt, über welche man nie hinauskommen kann. Man kann als praktische Regel aufstellen: Stimmen die Einzelwerte der gemessenen Winkel bis auf den doppelten Betrag der Teilungseinheit des Instrumentes überein, so genügt eine beschränkte Anzahl der Wiederholungen (gewöhnlich vier). Wird diese vermehrt, so entspricht die so gewonnene Genauigkeit in der Regel nicht mehr dem Zeitaufwande.

einem 1′ angebenden Fernrohr bis auf 1′ genau. Man darf dabei nicht ausser acht lassen, dass auch andere Fehler auf die Winkelbestimmung einwirken, deren Betrag oft die Ablesung um bedeutendes überragt.

**Erkl. 73.** Ist auch die Uebereinstimmung kein richtiges Kriterium der Richtigkeit, so ist gewiss die Nichtübereinstimmnng ein sicheres Kriterium der Ungenauigkeit. Stimmen die Sätze einer Messung nicht, so muss sofort nachgesehen werden, wodurch die Uebereinstimmung gestört worden ist.

Ein Beispiel einer solchen schlechten Messung geschah mit einem Ertelschen ausgezeichneten Theodolit von 10″ Ablesung. Sie wurde in meiner Abwesenheit von einem stellvertretenden Herrn gemacht bei der Vermessung der Stadt Pisek. Natürlich ist die Messung unbrauchbar.

| | | | | I. Nonius | II. Nonius | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Visur: | Polygonpunkt 28) | 305° | 20′ | 20″<br>10″ | 30″<br>25″ | erste Fernrohrlage |
| | | | | 50″<br>60″ | 80″<br>90″ | zweite Fernrohrlage |
| | 15) | 36 | 40 | 5″<br>10″ | 15″<br>25″ | erste Fernrohrlage |
| | | | | 80″<br>90″ | 60″<br>70″ | zweite Fernrohrlage |
| | 24) | 5 | 51 | 10″<br>70″ | 20″<br>75″ | erste Fernrohrlage |
| | | | | 20″<br>10″ | 25″<br>15″ | zweite Fernrohrlage |

Auf den ersten Blick möchte man meinen, dass hier ein bedeutender Kollimationsfehler vorliegt. Es war dieses aber nicht der Fall, sondern die Libelle war nicht gehörig beachtet. Der Fehler liegt in der veränderlichen Neigung, die nicht korrigiert wurde.

## 8. Ueber die Bussole.

**Frage 104.** Was ist eine Bussole?

**Antwort.** Unter einer Bussole versteht man eine Verbindung einer frei schwebenden Magnetnadel mit einer Kreisteilung, deren Mittelpunkt vertikal unter dem Drehungspunkte der Nadel liegt. Im Princip besteht also die Bussole aus einer Scheibe mit Kreisteilung, welche in der Mitte eine Nadel trägt, die als Träger für die Magnetnadel dient (vergl. Figur 95). Die Bussole wird gewöhnlich fest mit einem Fernrohr verbunden (vergl. Figur 94), welches exzentrisch angebracht ist. Es gibt aber auch Bussolen mit zentrisch angebrachtem Fernrohr (vergl. Figur 96). Die Teilung des Bussolenkreises ist jene der geteilten Kreise. Das mit einer Bussole versehene Fernrohr dient hauptsächlich zur Orientierung nach der Nord-Südrichtung. Von Wichtigkeit sind solche Instrumente in der bergmännischen Geodäsie. Bussolen mit Diopter (vergl. Fig. 97) werden seltener gebraucht.

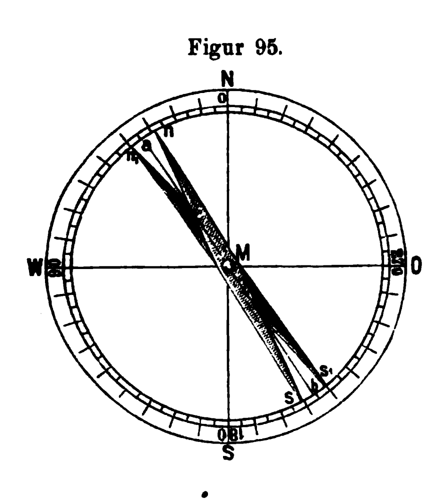
Eine moderne Form gibt Figur 98. Dieselbe stellt ein Bussoleninstrument, wie es von der mechanischen Werkstätte Breithaupt und Sohn in Cassel gebaut wird, dar.


Figur 94.

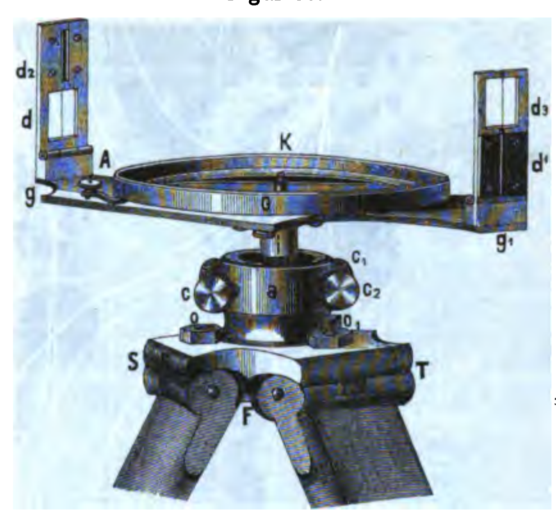



**Erkl. 74.** Bussole stammt vom italienischen bussola = Büchse. Sie wurde in Europa um 1300 bekannt. Angeblich soll Marco Polo sie bei den Chinesen kennen gelernt haben.

Figur 95.

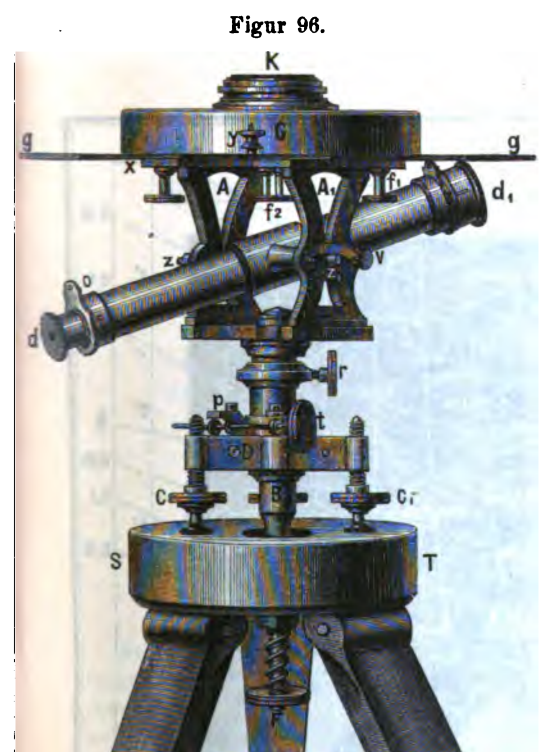


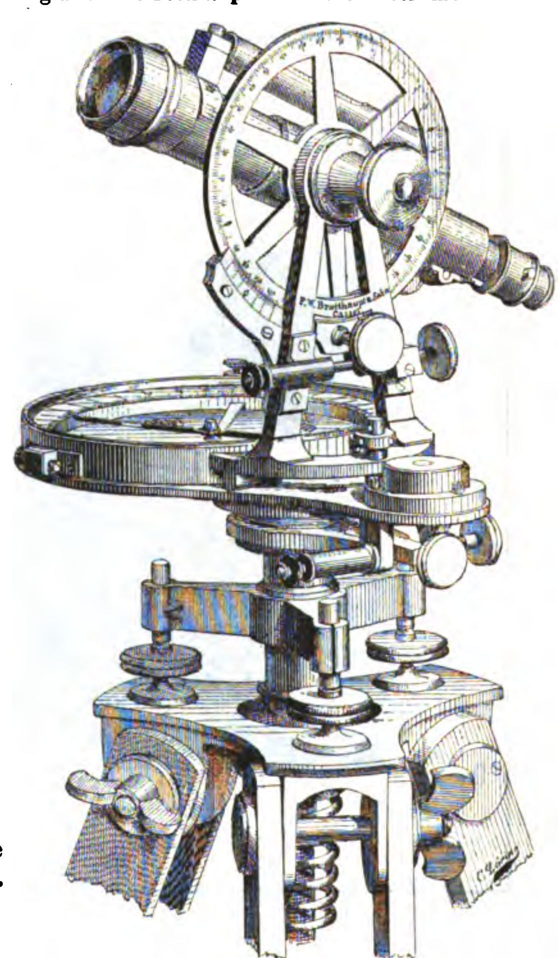

Figur 97.




Figur 98. Breithaupts Bussoleninstrument.

Figur 96.

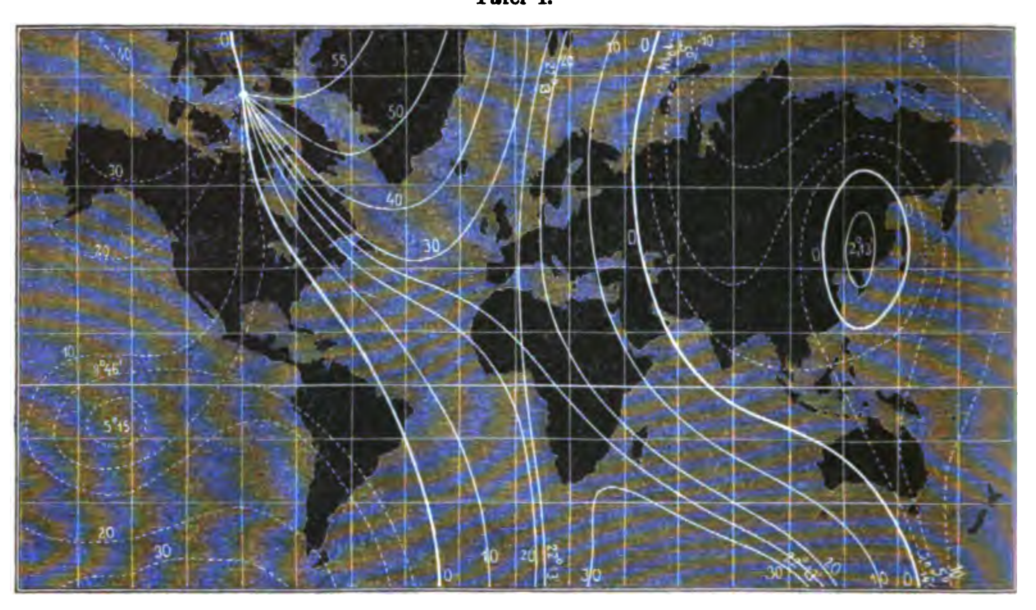


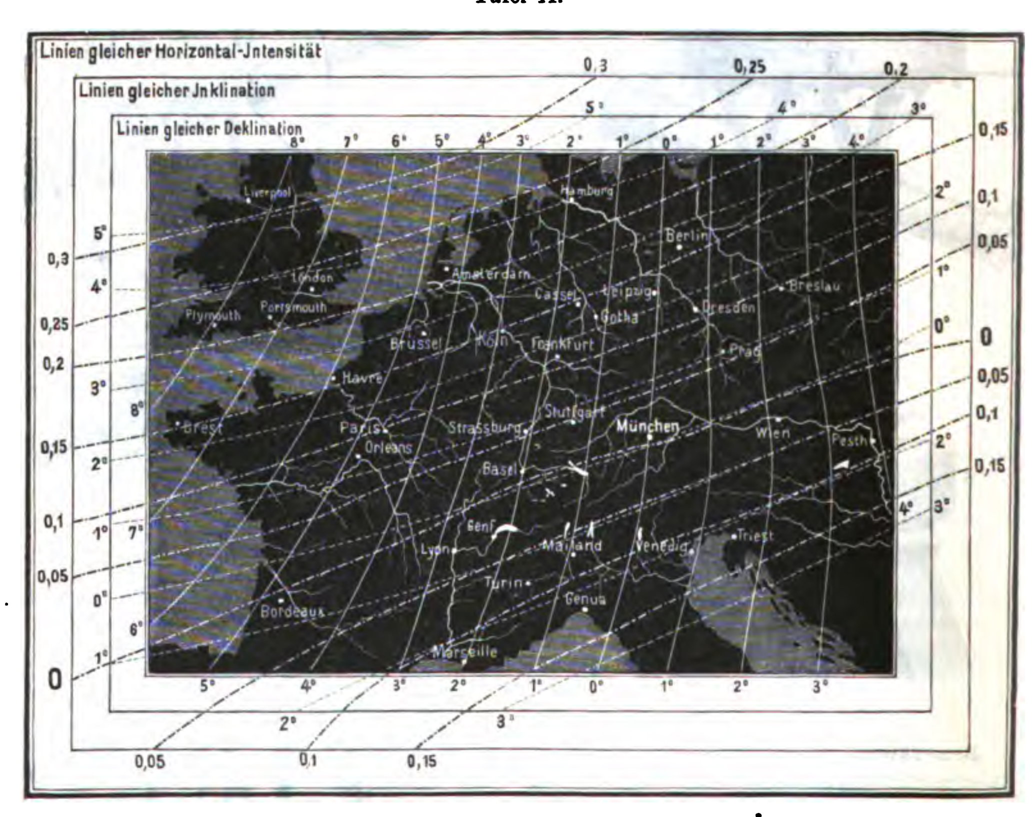


**Bemerkung.** Weiteres über die Bussole findet man in Kleyers Lehrbuch des Magnetismus.

Tafel I.



Tafel II.



**Frage 105.** Auf welchem Prinzip beruht die Bussole?

**Antwort.** Die Bussole als Orientierungsinstrument beruht auf der bekannten Eigenschaft der Magnetnadel, vermöge welcher sich die frei drehbare Magnetnadel immer in die Richtung des magnetischen Meridians stellt. Da sich dieser im allgemeinen sehr wenig ändert, so kann er zur Bestimmung der Nordsüdrichtung dienen, sobald man seine Abweichung von dieser kennt. Diese Abweichung wird die magnetische Deklination genannt. Diese ist in steter Abnahme begriffen und zwar um 7,15 jährlich. Einige Werte der magnetischen Deklination seien nachstehend mitgeteilt:

**Erkl. 75.** Die Theorie des Erdmagnetismus findet man ausführlich behandelt in Kleyers Lehrbuch des Magnetismus. Die allgemeine Verteilung der magnetischen Deklination auf der ganzen Welt geben die neben- und umstehenden Tafeln I und III. Für Europa speziell die Karte II.

**Jahr 1890.**

| Ort | Deklination | Ort | Deklination |
|---|---|---|---|
| Aachen | 14° 0′ | Karlsruhe | 12°40′ |
| Berlin | 10 0 | Kiel | 12 5 |
| Danzig | 8 6 | Leipzig | 11 2 |
| Dresden | 10 14 | München | 10 57 |
| Hamburg | 12 0 | Stuttgart | 12 27 |
| Hannover | 12 20 | Wien | 9 0 |

Um so viel weicht also der magnetische Meridian vom astronomischen, d. h. von der Nordsüdrichtung gegen West ab.

Für das Jahr 1897 erhält man nachstehende Tafel der magnetischen Deklination:

Geographische Länge von Ferro

Jährliche Abnahme — 0°125

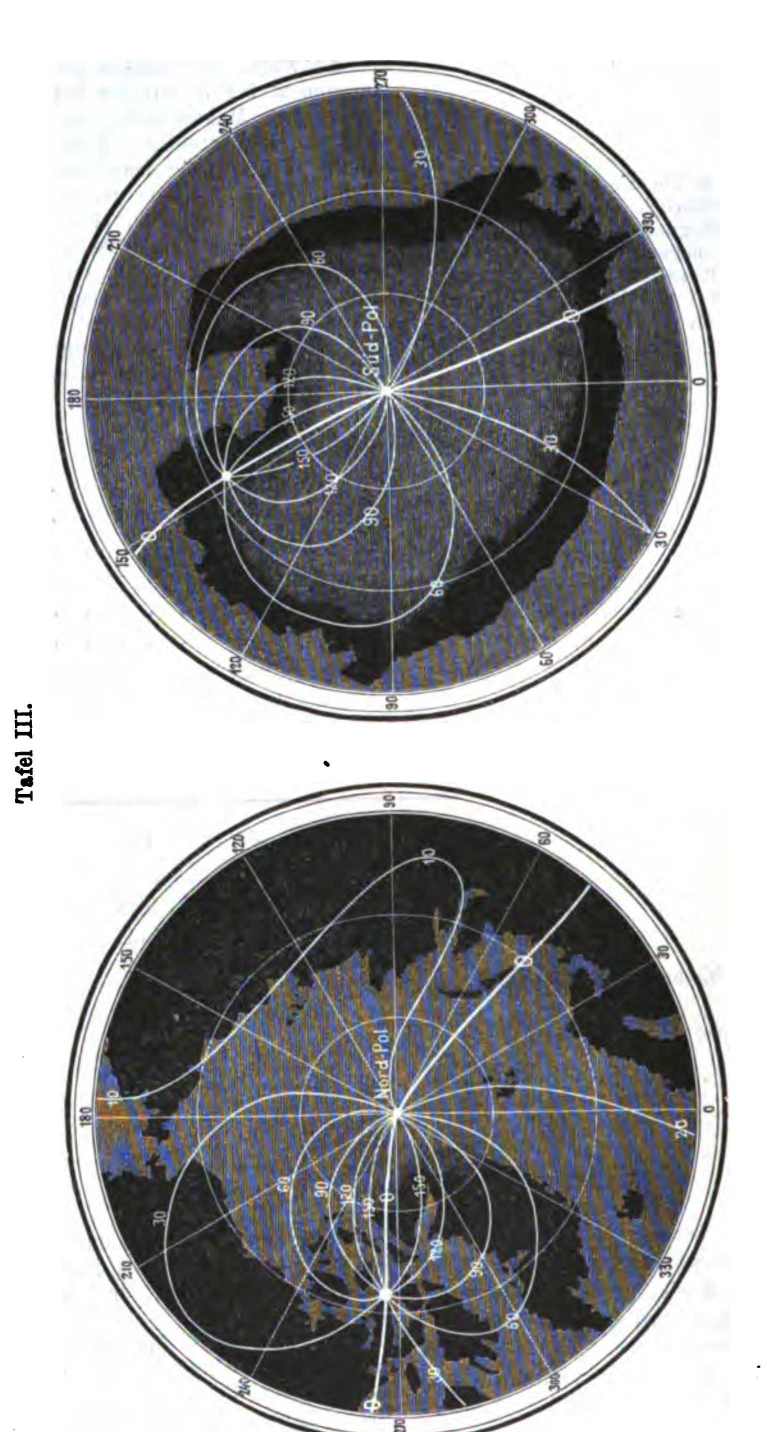
| Geographische Breite | 45° | 50° | 55° |
|---|---|---|---|
| 20° | 13°9 | 15°3 | 16°3 |
| 22 | 13,1 | 14,2 | 14,9 |
| 24 | 12,3 | 13,2 | 13,6 |
| 26 | 11,4 | 12,3 | 12,5 |
| 28 | 10,5 | 11,2 | 11,4 |
| 30 | 9,7 | 10,2 | 10,3 |
| 32 | 8,8 | 9,1 | 8,8 |
| 34 | 8,3 | 8,2 | 7,7 |
| 36 | 7,8 | 7,4 | 6,6 |
| 38 | 7,0 | 6,5 | 5,5 |
| 40 | 6,6 | 6,1 | 5,1 |

**Bemerkung.** Diese Zahlen sind als Näherungswerte zu betrachten. Da aber die Bussoleninstrumente selten eine grössere Ablesung als auf 0°1 gestatten, so dürften sie im allgemeinen genügen. Dieses um so mehr, da die Bussoleninstrumente bei den Operationen, die wir betrachten, nur als Orientierungsmittel dienen.

Nach dieser Tafel kann man sich die Deklination für jeden Ort innerhalb der gegebenen Grenzen und für jedes Jahr leicht bestimmen.

Will man z. B. für das Jahr 1897 die magnetische Deklination für einen Ort 35° westlich von Ferro und 47° geographische Breite haben, so stellt sich die Rechnung wie folgt:

Man rechnet dieselbe zunächst für 1890 um 35° westlich von Ferro.




Tafel III.

**Bemerkung.** Während in der Feldmessung die Bussole nur als Orientierungsinstrument dient, ist sie bei der Bergwerkvermessung absolut unentbehrlich. Soll man aber mit ihrer Hilfe genauere Resultate erhalten, so muss man sich von einem magnetischen Observatorium die zur Zeit der Beobachtung geltenden Werte der Deklination verschaffen. Denn es kommen sehr oft grosse Störungen der magnetischen Elemente vor, die das Resultat bedeutend entstellen können.

Es ergibt sich für die Breite 45°:

$$\frac{9 \cdot 7 + 8 \cdot 8}{2} = \frac{18 \cdot 5}{2} = 9 \cdot 25$$

für die Breite 50°:

$$\frac{10 \cdot 2 + 9 \cdot 1}{2} = \frac{19 \cdot 3}{2} = 9 \cdot 65$$

also die Differenz:

$$9 \cdot 65 - 9 \cdot 25 = +0.40$$

diese geteilt durch 5 gibt:

$$+0 \cdot 08$$

Nun ist:

$$47^0 = 45^0 + 2$$

also wird man haben:

$$9^0 \cdot 25 + 0^0 \cdot 08 \cdot 2 = 9^0 \cdot 4$$

---

**Frage 106.** Wie wird ein Bussoleninstrument in der Vermessungskunde verwendet?

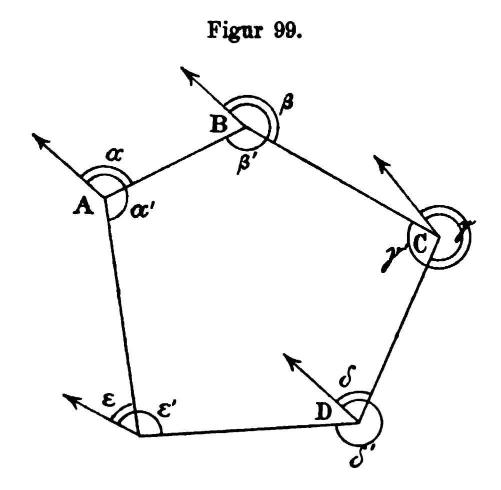
**Antwort.** Das Bussoleninstrument wird ähnlich dem Theodolit zur Ausmessung der Polygonzüge verwendet. Seine Genauigkeit beträgt aber unter den günstigsten Umständen kaum $\frac{1}{10}$ bis $\frac{1}{20}$ derjenigen der Theodolitmessung. Es kann also nur zu den forstlichen Aufnahmen verwendet werden und überhaupt zu allen jenen, wo es auf eine grosse Genauigkeit nicht ankommt.

Die Anwendung wird am besten an einem Beispiele klar:

---

**Frage 107.** Wie wird ein Polygon mit einem Bussoleninstrumente aufgenommen?

Figur 99.




**Erkl. 76.** Unter dem Azimut wird die Abweichung einer Richtung von der Nordsüdrichtung verstanden. Das Azimut wird astro-

**Antwort.** Man verfährt genau so, wie bei der Theodolitmessung. Man misst alle Seiten und alle Winkel.

Die Winkelmessung gestaltet sich hier ein wenig anders.

Man stellt sich mit dem Instrument über jeden Punkt und visiert die benachbarten Punkte (z. B. vom Punkte $A$ die Punkte $B$ und $C$) und liest jedesmal den Stand der Nadel ab. Die Differenz der Ablesungen gibt den Innenwinkel des Polygons. Z. B. (vergl. Figur 99):

Winkel bei $A = \alpha' - \alpha$

„ „ $D = \delta' - 180^0 + \delta$

„ „ $C = \varepsilon' - \varepsilon$

„ „ $E = \gamma' - \gamma$

Dabei hat man den Vorteil, dass man nahezu die Azimute der Seiten bekommt, wenn man die Deklination von der Ablesung subtrahiert, wenn sie westlich, addiert, wenn sie östlich ist. Für Deutschland und Oesterreich ist die Deklination westlich. (Vergl. Erkl. 76).)

nomisch vom Südpunkte über West, Nord, Ost gegen Süd von 0—360° gezählt. Man hat also Azimute von:

$$S = 0 = 360^{\circ}$$
$$W = 90^{\circ}$$
$$N = 180^{\circ}$$
$$O = 270^{\circ}$$

Man hat also Azimut der Seite $AB$:

$$180 + \alpha - \text{Deklination}$$

Ueber die Berechnung der Azimute vergleiche den II. Teil dieses Lehrbuches.

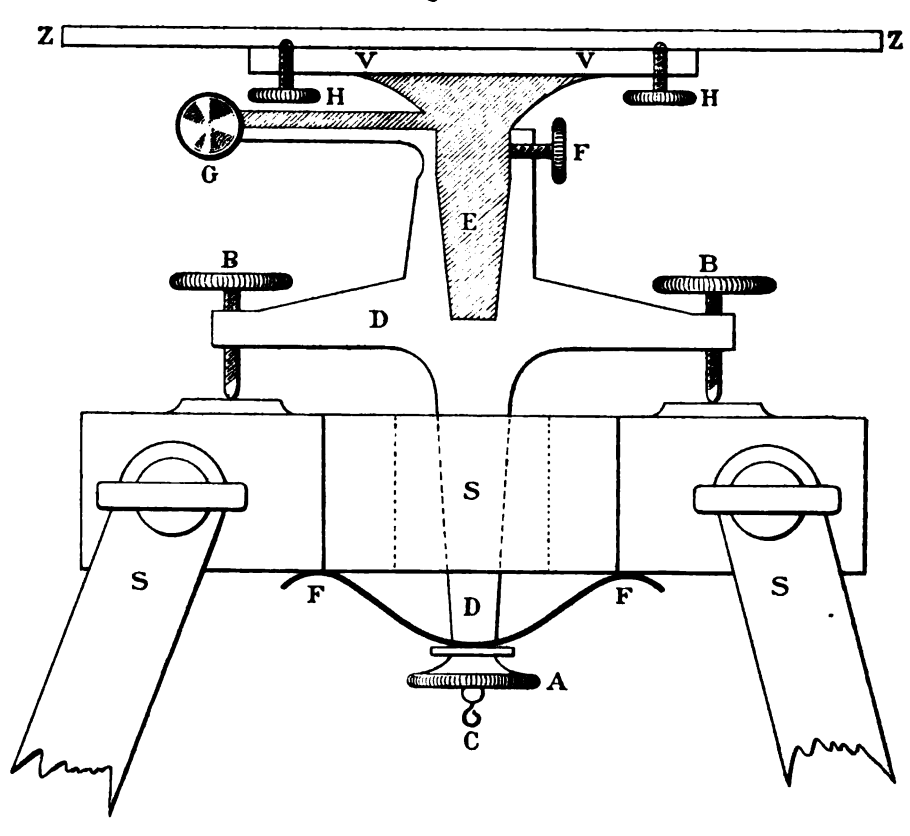
## 9. Der Messtisch.

**Frage 108.** Was ist ein Messtisch?

**Antwort.** Ein Messtisch ist ein geodätisches Instrument, welches zur Aufnahme von Objekten dient und im wesentlichen aus einem Gestell, einem Zeichenbrett und aus einer Absehvorrichtung, verbunden mit einem Linear zum Aufzeichnen der Visur besteht. Der Messtisch findet seine hauptsächliche Anwendung in der Topographie. Bei der Katastervermessung ist nach Anw. VIII § 87 der Messtisch ausser Gebrauch gesetzt. Heutzutage wird man sich bei Vermessungsarbeiten des Messtisches wohl nur aus Not bedienen.

**Bemerkung.** Die erste Verwendung des Messtisches gehört dem Anfange des 17. Jahrhunderts an. Der Messtisch wurde 1590 von Prof. Praetorius in Altdorf bei Nürnberg erfunden und hiess früher „mensa praetoriana“, d. h. der Tisch Praetorius, aus welcher Benennung wohl auch das Wort „Mensel“ abzuleiten ist. In manchen Ländern wurde er überhaupt nie verwendet, z. B. in England; in Oesterreich wird er noch heutzutage fast allgemein angewendet.

Figur 100.



**Frage 109.** Wie ist das Gestell beschaffen?

**Bemerkung.** Es gibt zahllose mehr oder minder vollkommene Gestelle für Messtische. Die Haupterfordernisse eines guten Gestells sind: rasche Horizontierung und genügende Festigkeit.

**Antwort.** Das Gestell des Zeichenbrettes besteht aus dem Stativ ($S$ vergl. Figur 100) und dem eigentlichen Gestell ($D$), welches vermittels dreier Stellschrauben ($B$) auf dem Stativ steht. Die Befestigung des Gestelles wird bewirkt durch eine Feder $F$ mittels der Schraube $A$. Das Gestell $D$ trägt eine cylindrische Bohrung, in welcher der eigentliche Träger ($E$) des Zeichenbretts drehbar und zentrisch eingesenkt ist. Die Schraube $F$ dient zur Festklemmung des Trägers ($E$) an das Gestell ($D$). Ist $F$ festgeklemmt, so vermittelt die Schraube $G$ eine Feinbewegung des Trägers $E$. Die Einrichtung dieser Feinbewegung ist dieselbe wie beim Theodolit, wohin verwiesen werden mag. Der Träger trägt eine sogenannte Wendeplatte $VV$, an welche das Zeichenbrett $ZZ$ vermittels der Schrauben $HH$ angeschraubt wird.

Figur 101.




Das Zeichenbrett ist eine Tafel etwa 60 cm im Quadrat aus Linden- oder Ahornholz und besteht aus einem Rahmen und mehreren Platten, deren Faserrichtungen sich kreuzen. Die obere Seite des Zeichenbretts wird mit Papier überzogen. Man feuchtet zu diesem Zwecke das Papierblatt auf einer Seite stark an und legt es auf das mit geschlagenem Eiweis überstrichene Blatt. Das Papier wird vermittels eines Tuches aufgedrückt und durch seitliches Anleimen der überstehenden Ränder fest gemacht.

Der neue Messtisch von Ertel und Sohn in München besteht aus drei Teilen: dem Stativ, dem Mittelstück und dem Tischblatt (vergl. Figur 101). Das Stativ ist zusammengesetzt aus einem ringförmigen Kopfteil mit drei flantschenartigen Ansätzen, an welche sich die oberen Enden der durchbrochenen Stativbeine beiderseits anlegen. Ein Bolzen mit Schraube und Flügelmutter ermöglicht die leichte Drehung, sowie die feste Verbindung zwischen Stativkopf und Stativbein, je nachdem die Flügelmutter angezogen oder gelöst wird.

Der Stativkopf wird aus zwei Holzschichten zusammengeleimt, in welchen die Faser nach verschiedenen Richtungen läuft, um das Werfen des Holzes zu vermeiden; durch diesen Kopf ragen drei Stellschrauben $aa$ nach oben, deren Muttern in Form von sechsseitigen Prismen eingesetzt sind. Diese Stellschrauben werden gedreht durch die am unteren Ende aufgesteckten Köpfe, während auf jedes der oberen Enden ein Plättchen mit Kugelgelenk aufgesprengt ist, welches sich leicht nach allen Seiten dreht und für die ebene Unterfläche des Mittelstückes einen Stützpunkt abgibt, sowie eine beliebige Verschiebung desselben auf den drei Plättchen zulässt, gleichviel wie diese Unterfläche gegen die Kopffläche des Statives geneigt ist.

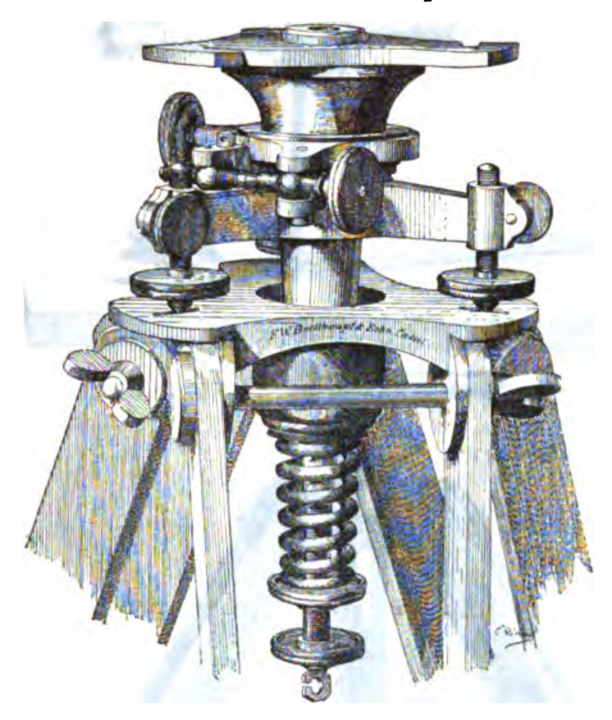
Das Mittelstück besitzt zwei nach oben und unten gekehrte kreisförmige Flächen, eine untere scheibenförmige, mit welcher es auf den drei Stellschrauben liegt und eine obere ringförmige, welche als Unterlage für einen gleich grossen zweiten Ring dient,

der mit dem Tischblatt fest verbunden werden kann. Die Unterfläche ist durch acht Rippen, der obere Ring durch sechs Speichen hinreichend verstärkt, um Verbiegungen unmöglich zu machen. Rippen und Speichen vereinigen sich an einem cylinderförmigen Kernstück von etwa 10 cm Durchmesser, das eine schalenförmige Füllung enthält. Dieses Kernstück ist in der Mitte seiner nur 4,5 cm betragenden Höhe auf 1 cm Breite cylindrisch abgedreht und um diese Cylinderfläche ein aus zwei Hälften zusammengeschraubter Klemmring *r* gelegt. Durch einen radial nach aussen ragenden leierförmigen Arm nebst zwei Schrauben ist dieser Klemmring mit dem oberen Ring in Verbindung und ermöglicht die Feststellung sowie die grobe und feine horizontale Drehung des Tischblattes. Die grobe Drehung wird mit der durch den Arm greifenden Klemmschraube *k* gehemmt, indem durch Anziehen derselben ein vorgelegtes Plättchen radial gegen die abgedrehte Cylinderfläche des Kernstückes gedrückt wird. Die feine Horizontaldrehung ist durch zwei tangential zur äusseren Ringperipherie einander entgegenwirkende Schrauben ermöglicht, welche ihre Führung in je einem geschlitzten und durch ein Klemmschräubchen zusammengezogenen Gabelteil des vorgenannten leierförmigen Armes erhalten. Diese beiden Schrauben fassen einen vom beweglichen Ring nach abwärts stehenden Backen von beiden Seiten fest, so dass keine unabsichtliche Bewegung des Tischblattes möglich ist, wie bei Anwendung von Schraube und Feder, wobei letztere entweder mit der Zeit lahm wird oder durch zufälligen seitlichen Druck, wie er durch Anlegen an das weit ausladende Tischblatt nur zu häufig entsteht, überwunden wird und Fehler in der Orientierung mit sich bringt. Auf dem 25 cm im Durchmesser haltenden beweglichen Ring wird das Tischblatt durch drei über die Oberfläche desselben vorstehende Schrauben *bb*, welche in ebenso viele in das Tischblatt eingelassene Muttern eingreifen, festgehalten und erhält dadurch eine weit vollkommenere Unterstützung, als mit Anwendung der in letzter Zeit bei den meisten Messtischkonstruktionen beliebten Horizontalführung mit Zentralbüchse und Vertikalachse, welche stets der Stabilität des Tischblattes Eintrag that, da dessen Unterstützung sich nahezu auf einen Punkt zusammenzog, wobei weder die Klemmen für die grobe, noch die Mikrometerschrauben für die feine Horizontalbewegung auf die Dauer fehlerfrei blieben, weil sich nur zu bald ein toter Gang einstellte. Zur Sicherung der Orientierung und zugleich zur Schonung der Horizontalführungen sind am Führungsring zwei Versicherungsklemmen *vv* wieder eingeführt, welche bei längerer Dauer einer Aufstellung fest anzuziehen sind. Die feste Verbindung des Mittelstückes mit dem Stativ wird erreicht durch Anziehen der Zentralschraube. Dieselbe hängt von der schalenförmigen Füllung des Kernstückes, durch diese und die Durchbrechung des Stativkopfes hindurchgreifend, frei nach abwärts und endigt unten mit einem kräftigen Gewinde. Eine von unten eingreifende Mutter ist in einen Griff *g* von der Form eines starken sechsseitigen Prismas eingelassen; durch Anziehen desselben wird eine federnde Messingscheibe gegen die Unterseite des Stativkopfes gepresst, wodurch das ganze Oberteil des Messtisches, welches auf den drei Stellschrauben ruht, festgehalten wird. Wird die Feststellung aufgehoben, so lässt sich das ganze Mittelstück samt dem Tischblatt beliebig verschieben und drehen, ohne merkliche Aenderung für eine vorausgehend vorgenommene Horizontalstellung. Diese Verschiebung ist innerhalb einer Kreisfläche von 8 cm Durchmesser möglich, entsprechend der Grösse der Durchbrechung des Stativkopfes, so dass bei einigermassen richtiger Aufstellung des Statives jede Orientierung des Tischblattes erreicht werden kann. Das Gesamtgewicht des Messtisches beträgt nur 9 kg.

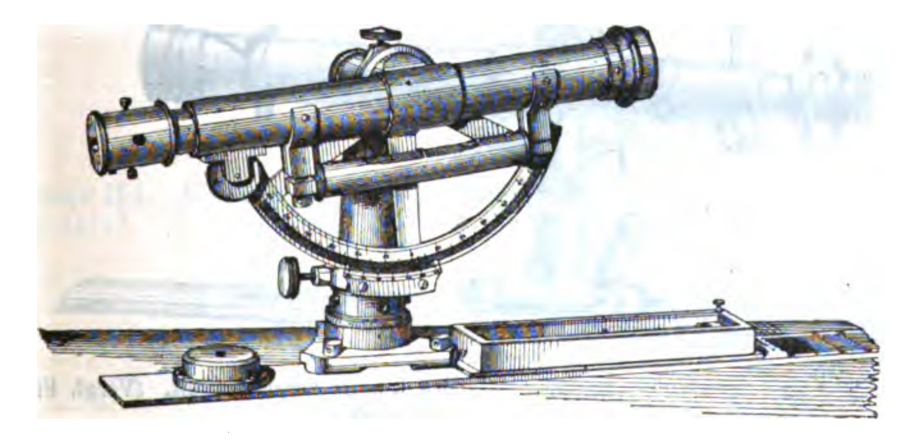
Unten am Messtischblatt sind drei Messingplättchen aufgeschraubt, von denen eines mit rotem Punkt versehen ist. Dieses Messingplättchen kommt auf diejenige Platte des Messtisches zu sitzen, wo am Ring ebenfalls ein roter Punkt ist. Die Messtischplatte wird nun lose auf die drei Schrauben nach und nach angezogen, jede Schraube je um 2—3 Gänge, nicht mehr, da sonst leicht Spannung entsteht und zwar wird so lange geschraubt, bis das Messtischblatt fest mit dem Messtisch verbunden ist.

Eine andere Form des Messtisches, die ebenfalls sehr verbreitet ist, ist die von Breithaupt, die in den Fig. 102 und 103 abgebildet ist. Sie zeichnet sich durch eine solid massive Bauart aus. Wir sehen von einer Beschreibung ab, da die Messtische von Breithaupt sehr verbreitet sind, so dass wohl jeder, der sich mit der Geodäsie beschäftigt, Gelegenheit haben dürfte, sie in natura kennen zu lernen.

Figur 102. **Messtisch von F. W. Breithaupt & Sohn in Cassel.**



Figur 103.



---

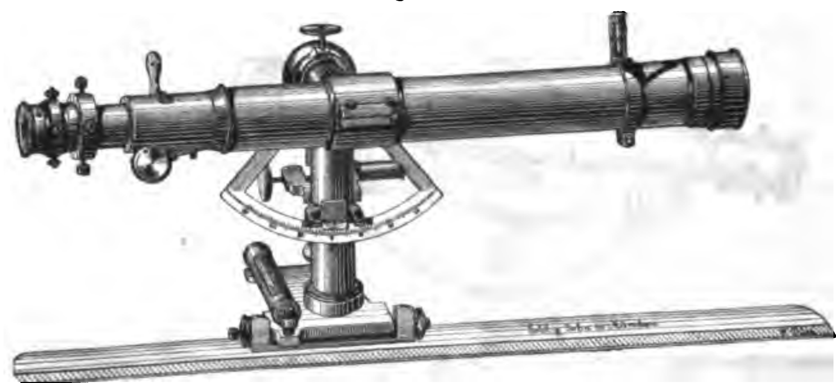
**Frage 110.** Was ist die Kippregel?

**Antwort.** Unter der Kippregel (Regellineal) versteht man ein Lineal, welches auf einer metallenen Säule ein um horizontale Achse drehbares Fernrohr trägt, dessen optische Achse (Sehrichtung) mit dem Rande

Figur 104.



Figur 105.



des Lineals zusammenfällt. (Vergl. Figuren 103—105.)

Das Fernrohr ist oft mit einer Kreisteilung verbunden, welche die Messung kleiner Vertikalwinkel gestattet. Auch steht auf demselben fest eine Libelle. Ausserdem befindet sich auf dem Lineal eine Dosenlibelle und eine Magnetnadel zur ungefähren Orientierung nach der Nordsüdrichtung. Oft ist das Fernrohr auch zum Distanzmessen eingerichtet.

**Bemerkung.** Die Kippregel, Figur 104, wird von Mechaniker G. Heyde in Dresden, jene, Figur 105, von Ertel & Sohn in München verfertigt.

**Frage 111.** Wie wird ein Winkel auf dem Felde mit einem Messtisch aufgenommen?

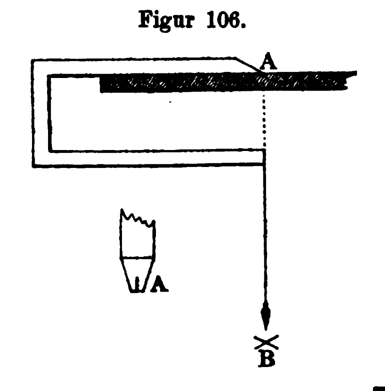
**Antwort.** Soll ein Winkel mit dem Messtisch aufgenommen werden, so hat man im allgemeinen dreierlei Geschäft zu verrichten:

I. die Zentrierung,
II. die Horizontierung,
III. die Orientierung.

---

**Frage 112.** Wie wird ein Messtisch zentriert?

Figur 106.




**Antwort.** Um den Messtisch über einem Punkt zu zentrieren, bedient man sich einer eigenen Zentriervorrichtung, deren Gebrauch unmittelbar aus der Figur 106 zu entnehmen ist. Dieselbe ist aus leichtem Holz verfertigt und stellt einen offenen Rahmen dar mit einem daran befestigten Lot $B$, dessen Spitze genau unter der Marke $A$ des Oberarmes zu stehen kommt. Es entspricht der Punkt bei $A$ dem Punkte $B$ unter dem Senkel.

---

**Frage 113.** Wie wird der Messtisch horizontiert?

**Antwort.** Bezüglich der Horizontierung, d. h. des Horizontalaufstellens der Zeichnungsplatte, ist das zu wiederholen, was bei der Aufstellung des Theodolits gesagt wurde.

Man nehme eine Libelle (die beim Messtisch immer vorhanden ist), lege sie um, um sich zu überzeugen, dass sie korrigiert ist, und stelle sie etwa in die Mitte des Zeichenbretts und verfahre, wie die Antwort auf Frage 111 Nr. III angibt.

---

**Frage 114.** Wie wird der Messtisch orientiert?

**Antwort.** Ist der Messtisch horizontiert und zentriert, und auf demselben ein Schenkel des aufzunehmenden Winkels aufgetragen, dann wird die schon vor der Zentrierung genähert eingestellte Richtung desselben vollständig orientiert. Man legt zu diesem Zwecke die Kippregel an die gezeichnete Richtung an, öffnet die Stellschraube ($F$ in der Fig. 100) und visiert das Schenkelende an. Ist die Visur genähert gefunden, so wird $F$ geklemmt und mit der Mikrometerschraube $G$ die Feinstellung des Tisches vollendet.

---

**Frage 115.** Worauf ist bei der Anwendung des Messtisches besonders zu achten?

**Antwort.** Es versteht sich vor allem dass sowohl die Kante des Lineals eine

**Bemerkung.** Um eine horizontale Fläche zu erhalten, kann man die obere Tischplatte mit Glas belegen. Dann muss aber stärkeres Papier angewendet werden. Statt der Anschlagnadeln werden dann etwa 1 cm im Durchmesser enthaltende kleine flache Cylinder gebraucht, die mit drei sehr feinen und sehr kurzen Nadelspitzen zur Befestigung versehen sind. Solche Glastafeln wurden unter anderem auch bei der älteren österreichischen Katastralvermessung angewendet.

Figur 107.

S ............ O ............ S ............ S'

**Bemerkung.** Ist der Fehler I klein, so kann er wie die Kollimation am Fadenkreuz des Fernrohrs korrigiert werden. Sehr kleine Abweichungen pflegt man aber nicht zu korrigieren, da man nicht sicher ist, ob sie nicht etwa Manipulationsfehler sind.

**Bemerkung.** In der praktischen Messkunde wird der Messtisch nur bei sehr unebenem Terrain verwendet und zu topographischen Zwecken. Er hat den Vorteil, dass man keine Handzeichnung zu machen braucht und die ganze Arbeit vor sich hat. Die Photogrammmetrie dürfte die Messtischaufnahme überflüssig machen, wenigstens wobei es sich um topographische Aufnahmen handelt.

gerade Linie bilden muss, als auch, dass die obere Fläche des Zeichenbrettes eine Ebene sein muss.

Sodann muss bei der Kippregel

I. die optische Achse oder die Zielachse rechtwinklig zur Horizontalachse sein;

II. die Visirebene soll die Linealkante enthalten oder ihr parallel sein;

III. die Horizontalachse der Kippregel muss parallel der Tischebene sein.

Was den Punkt I anbetrifft, so ist derselbe identisch mit dem früher so oft behandelten Kollimationsfehler. Man richtet, nachdem der Tisch vollkommen horizontiert, vom Standpunkt $O$ zwei Stäbe $S$ und $S'$ ein, und markiert diese Richtung auf dem Messtisch. Hierauf wird das Fernrohr umgelegt und ein dritter Punkt $S''$ eingeschaltet. Sind $S\,S'\,S''$ in einer Geraden, so steht die optische Achse horizontal zur Drehachse (vergleiche Figur 107).

Der Punkt II ist im allgemeinen wenig schädlich. Denn die Abweichung ist in der Regel klein, auch kann man die auf dem Tische befindliche Zeichnung nach der Fertigstellung nach der Natur orientieren.

Sehr wichtig ist jedoch der unter III erwähnte Umstand. Ist die Horizontalachse nicht parallel zur Tischebene, so muss sie sorgfältig berichtigt werden. Die Korrektion erfolgt wie beim Theodolit durch Anvisierung eines langen, frei hängenden Lotes. Bleibt bei der Bewegung mit dem Fernrohr (Kippen) der Mittelfaden am Lot, so ist der besagte Fehler nicht vorhanden.

## 10. Aufgaben über die Messtischbehandlung.

**Aufgabe 29.** Der Messtisch soll nach einer auf demselben gegebenen Geraden orientiert werden, wenn ein Punkt desselben auf dem Felde gegeben ist und der Messtisch über den anderen Endpunkt aufgestellt werden soll.

**Auflösung.** Man stellt den Tisch ungefähr über den Punkt $A$ der auf dem Felde gegebenen Geraden $AB$ auf, legt die Kippregel an die auf dem Messtisch gegebene Gerade $ab$ an und dreht den Tisch solange, bis $ab$ und $B$ in einer Geraden liegen, d. h. bis $B$ im Fadenkreuz des Fernrohrs erscheint. Hierauf wird die Lotgabel an $a$ gebracht und nachgesehen um wieviel $A$ von $a$ abhängt. Dann wird der Tisch so abgehoben, dass $a$ über $A$ zu stehen kommt und nun von neuem nachgesehen, ob das Lot der Gabel über $A$ und ob $B$ in der Visur von $ab$ steht.

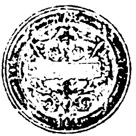
**Bemerkung.** Man sieht, dass die Auflösung der vorstehenden Aufgabe, die dennoch ziemlich oft vorkommt, oft zeitraubend sein kann. Es bleibt der Erfahrung des Geometers überlassen, wie weit er in der Zentrierung gehen soll. Ist ein Schiebkreuz am Stativ vorhanden, so wird dadurch die endgültige Aufstellung wesentlich vereinfacht.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

1286. Heft. | Preis des Heftes 25 Pf. | Vermessungskunde (Geodäsie). Erster Teil. Forts. v. Heft 1280. — Seite 97—112. Mit 28 Figuren.







Vollständig gelöste

# Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — **aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie**; des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's**; der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

**zum einzig richtigen und erfolgreichen**

**Studium**, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

**Dr. Adolph Kleyer,**

Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

# Vermessungskunde

## (Geodäsie).

**Erster Teil.**

Nach **System Kleyer** bearbeitet von **Dr. W. Láska.**

Fortsetzung von Heft 1280. — Seite 97—112. Mit 28 Figuren.

**Inhalt:**



**Stuttgart 1894.**

Verlag von Julius Maier.

☞ Das vollständige Inhaltsverzeichnis der bis jetzt erschienenen Hefte kann

**Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.**

# PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form,** mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch **alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten **Aufgaben**) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die **gehabten Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen** in **allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. **Kleyer,** Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

**Stuttgart.** **Die Verlagshandlung.**

**Aufgabe 30.** Der Messtisch soll nach einer darauf gegebenen Geraden orientiert werden, wenn er auf irgend einem Punkte derselben auf dem Felde aufgestellt ist.

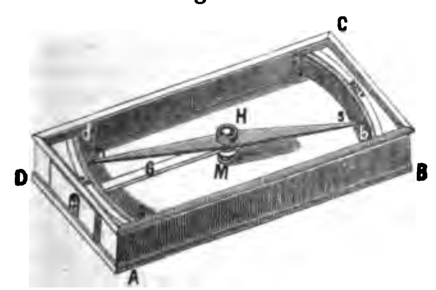
**Bemerkung.** Das Orientieren mit der Bussole kann nur dann in Anwendung kommen, wenn es sich um ganz grobe Messungen handelt, dennoch wird dieselbe von Nutzen sein, wenn es sich um eine ungefähre Einstellung handelt, die hintendrein berichtigt werden soll.

**Auflösung.** Man orientiert wie in der vorhergehenden Aufgabe den Standpunkt nach der gegebenen Geraden, legt das Lineal um und sieht nach, ob der andere Endpunkt der Geraden getroffen wird. Ist dieses nicht der Fall, so markiert man auf dem Felde den gesehenen Punkt etwa in der gleichen Entfernung mit dem gegebenen. Hierauf wird die Mitte dieses Punktes und des gegebenen durch eine Bake bezeichnet und die gegebene Gerade nach diesem Punkte orientiert. Sodann legt man das Lineal um und wiederholt dasselbe Verfahren am Punkte $B$.

---

**Aufgabe 31.** Es soll der Messtisch mit Hilfe einer Bussole orientiert werden.

Figur 108.




**Bemerkung.** Es empfiehlt sich, den Mittelpunkt der Bussole möglichst genau in die Tischmitte zu stellen, weil sodann die Orientierung nach der Nordsüdrichtung sich einfach ausführen lässt durch die Drehung des Tischblattes.

**Auflösung.** Man legt die Bussole etwa in die Mitte des Tisches und richtet sie so, dass die Nadel genau nach dem mit Nord bezeichneten Punkte einspielt. Hierauf legt man sanft das Lineal an die der Nordrichtung parallele Kante ($AB$ in der Figur 108) und bezeichnet die Lage desselben am Rande des Blattes durch zwei Punkte. Diese werden Randmarken und die durch sie bestimmte Linie Orientierungslinie genannt.

Ueberhaupt muss als Regel gelten, alle jene Richtungen, die nicht zur Zeichnung gehören, bloss am Rande des Blattes festzulegen.

---

**Aufgabe 32.** Es soll der Messtisch, auf dem eine Gerade gegeben ist, parallel zu einer auf dem Felde gegebenen Geraden orientiert werden, wenn er ausserhalb der auf dem Felde gegebenen Geraden liegt.

**Auflösung.** Man orientiert den Tisch zunächst innerhalb der Geraden und zieht die Orientierungslinie. Hierauf begibt man sich auf den verlangten Punkt, legt die Bussole an die Orientierungslinie genau an, und lässt sie nach Norden einspielen.

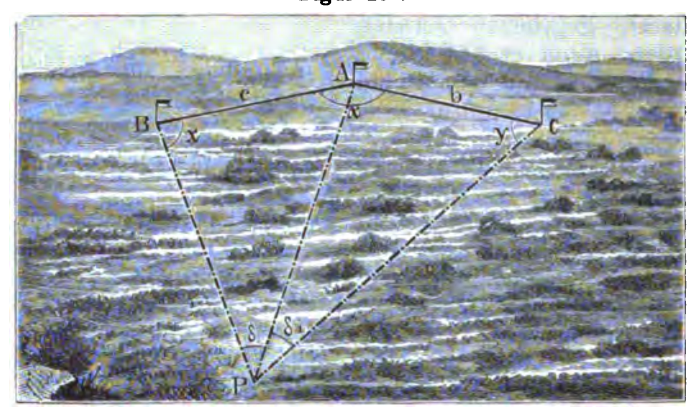
---

**Aufgabe 33.** Drei in der Natur bezeichnete Punkte sind auf dem Tischblatt gegeben; es ist der Standpunkt des Messtisches zu bestimmen.

**Bemerkung.** Diese Aufgabe wird das Rückwärtseinschneiden, das Stationieren, das Vier-

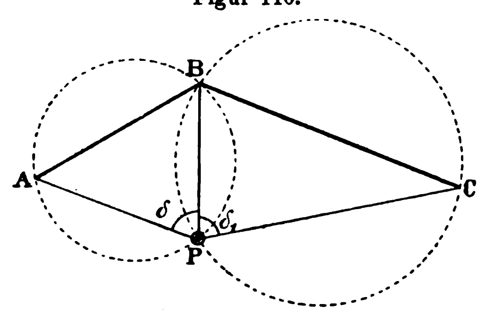
**Auflösung.** Es ist leicht einzusehen, dass die Lösung dieser Aufgabe durch die Kenntnis der beiden Winkel $\delta, \delta_1$ bestimmt ist (vergl. Figur 109), wenn $ABC$ die gegebenen Punkte sind. Denn die Punkte $AB$ mit dem Winkel $\delta$

Figur 109.




punktproblem oder auch das Pothenotsche Problem genannt. Sie wird in dem Kapitel über Koordinatenvermessung ausführlich behandelt werden. Man vergleiche auch Kleyers Lehrbuch der Trigonometrie.

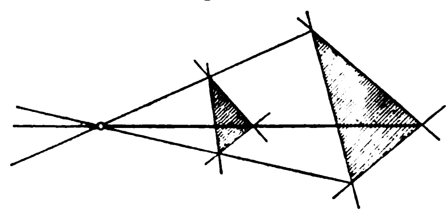
Figur 110.




**Erkl. 77.** Wir haben nämlich zwei ähnliche Dreiecke, das in der Natur und auf dem Felde, die bei richtiger Orientierung parallele Seiten haben. Verbindet man aber die Eckpunkte zweier gleichgelegenen ähnlichen Dreiecke, so schneiden sich dieselben in einem Punkte, dem sogenannten Aehnlichkeitspunkte.

**Bemerkung.** Man findet in sehr vielen Lehrbüchern mehr oder minder kunstvolle Auflösungen der hier mitgeteilten Aufgaben. Sie entsprechen aber zumeist nicht dem Bedürfnisse der Praktiker, die selten über die Zeit und Geduld verfügen, auf dem Felde komplizierte geometrische Konstruktionen ausführen zu können.

Figur 111.



**bestimmen einen Kreis. Analog bestimmen die Punkte $AC$ mit dem anderen Winkel $\delta_1$ einen zweiten Kreis. Der Schnittpunkt beider Kreise ist eben der gesuchte Standpunkt $P$ (vergl. Figur 110).**

**Allein es wäre unpraktisch, wenn man solche Konstruktionen im Felde ausführen wollte, denn es könnte leicht geschehen, dass die Kreise über die Tischplatte gingen. Man wendet deshalb ein anderes Verfahren an.**

**Zunächst ist es einleuchtend, dass es sich um eine genaue Orientierung des Tisches handelt, denn ist diese hergestellt, so müssen sich die drei nach den Punkten gezogene Rayons in einem Punkte schneiden (vergl. Erkl. 77).**

**Man zieht sich zu diesem Zwecke auf einem der gegebenen Punkte die Orientierungslinie und orientiert sodann auf dem Standpunkt die Tischplatte nach ihr.**

**Werden hierauf die Rayons gezogen, so werden sie sich im allgemeinen nicht in einem Punkte schneiden, sondern ein kleines Fehlerdreieck bilden.**

**Man dreht in diesem Falle den Tisch ein wenig und bestimmt ein zweites fehlerzeigendes Dreieck. Durch Verbindung der homologen Eckpunkte ergibt sich sodann der gesuchte Punkt (vergl. Figur 111).**

**Man kann auch verfahren wie folgt. Man bestimmt sich zunächst auf Pauspapier von einem Punkte aus die Rayons nach $ABC$ (vergl. Figur 110) und verschiebt sodann die so erhaltene Zeichnung auf der Tischplatte solange, bis die drei Punkte in die Schenkel der gezeichneten Winkel zu liegen kommen.**

## 11. Die Winkelabsteckung beim konstanten Winkel.

**Frage 116.** Welche sind die wichtigsten Instrumente zur Winkelabsteckung beim konstanten Winkel?

**Antwort.** Die wichtigsten Instrumente zur Winkelabsteckung beim konstanten Winkel sind:

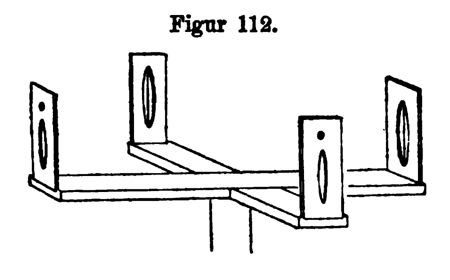
die Kreuzscheibe,
das Winkelfernrohr,
der Winkelspiegel,
das Spiegelkreuz,
das Prismenkreuz,
das Winkelprisma.

---

**Frage 117.** Was ist die Kreuzscheibe?

**Erkl. 78.** Diopter (vom griech. „dia" durch und „opto" sehe) bestehen gewöhnlich aus zwei miteinander verbundenen vertikal stehenden Platten (vergl. Figur 112), von denen die eine ($A$), Oculardiopter genannt, entweder ein Schauloch oder eine Schlitze, die andere dagegen ($B$), Objectivdiopter, eine grössere Oeffnung mit einem eingespannten Faden besitzt.

Figur 112.

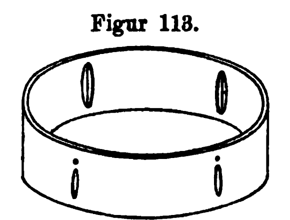


**Antwort.** Die Kreuzscheibe ist ein Instrument zur Bezeichnung zweier sich rechtwinklig schneidender Richtungen. Sie besteht aus zwei sich rechtwinklig schneidenden Absehvorrichtungen (Visieren, Dioptern, vergleiche Erkl. 78).

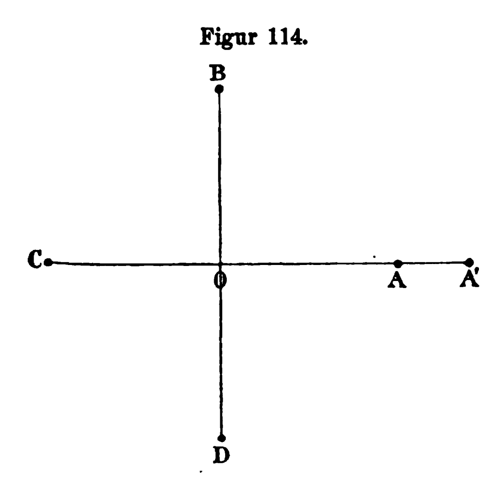
Trotz dieser einfachen Vorrichtung ist die Kreuzscheibe ein unentbehrliches Instrument, sobald es sich um sehr geneigte Flächen handelt.

Oft wird die Kreuzscheibe direkt als eine Trommel mit vier diametral stehenden Visieren gefertigt und führt dann den Namen Winkeltrommel (vergl. Figur 113).

Figur 113.



Figur 114.




Die Prüfung der Kreuzscheibe geschieht in der Weise, dass man mit ihrer Hilfe einen rechten Winkel absteckt, $AOB$, hierauf an diesen einen zweiten, $BOC$, sodann einen dritten, $COD$, und endlich an diesen noch einen vierten, $DOA'$. Der vierte muss einen Punkt $A'$ liefern, der mit $AC$ in einer Geraden liegt (vergl. Fig. 114).

Berichtigung ist in der Regel unmöglich und man muss sich auf das Fabrikat verlassen.

Die Genauigkeit ist nach Jordan 2'. Man hat demnach auf 50 m Entfernung etwa 3 cm Abweichung. Aber im allgemeinen kann man sie wohl doppelt so gross nehmen (vergl. Erkl. 79).

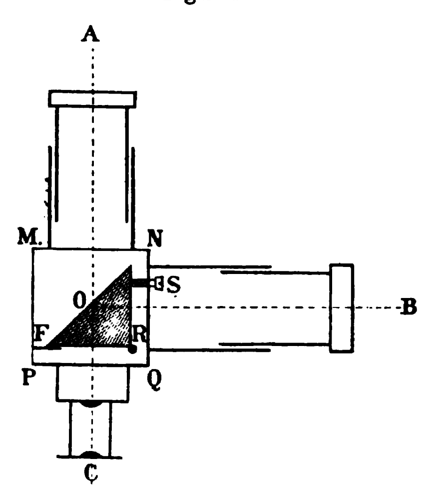
Was die Dimensionen anbelangt, so soll der Durchmesser des Schauloches nicht kleiner

**Erkl. 79.** Der grösste Uebelstand ist beim Diopter, dass das Auge die nahe Schauritze und den fernen Gegenstand nicht zugleich sehen, sie also auch nicht zugleich zur Deckung bringen kann und zwar deswegen, weil sich das Auge den verschiedenen Entfernungen nicht gleichzeitig anpassen kann.

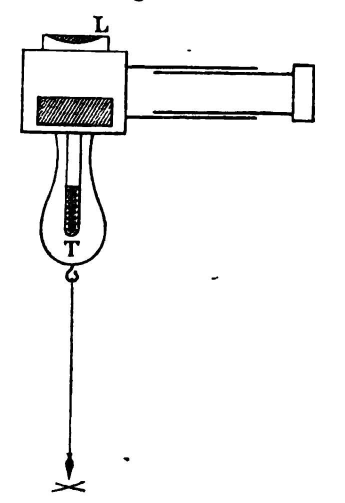
als $^3/_4$ mm und nicht grösser als 1 mm sein, die Schauritze nicht schmäler als 0,4 mm und nicht breiter als 0,75 mm.

**Frage 118.** Was ist ein Winkelfernrohr?

Figur 115.




Figur 116.




**Antwort.** Unter dem Winkelfernrohr versteht man eine Vereinigung des geraden mit dem gebrochenen Fernrohr, welche Winkel von 90° zu bestimmen gestattet. Es besteht aus einem hohlen Messingkubus *MNPQ*, an welchem zwei ausziehbare Objektivhülsen (*A*, *B*) um eine feste Okularhülse (*C*, vergl. die Figuren 115 und 116,) angeschraubt sind. Das Okular ist mit einem Fadenkreuz versehen.

Im Kubus selbst befindet sich ein Glasprisma, welches die von *B* kommenden Strahlen reflektiert und in das Okular sendet. Das Prisma ist aber nur so hoch, dass es nur das halbe Gesichtsfeld des anderen Objektivs (*A*) verdeckt. Man erblickt also, nachdem man die Objektive gehörig eingestellt hat, von zwei Gegenständen vollkommen scharfe Bilder, die genau über einander stehen, wenn diese Gegenstände mit dem Zentrum des Instrumentes einen rechten Winkel einschliessen.

Das Prisma ist um die Achse *R* drehbar. *F* ist eine Stahlfeder und *S* eine Korrektionsschraube, die kleine Drehungen um die Achse *R* gestattet.

Ist das Winkelfernrohr richtig gestellt (wie das zu bewerkstelligen ist, lehren die Fragen 119 und 120), so kann man, wenn ein geeignetes Stativ gebraucht wird, beliebig lange Senkrechten damit festlegen. Die dabei zu erreichende Genauigkeit gleicht vollkommen jener, die durch den Theodolit erhalten wird.

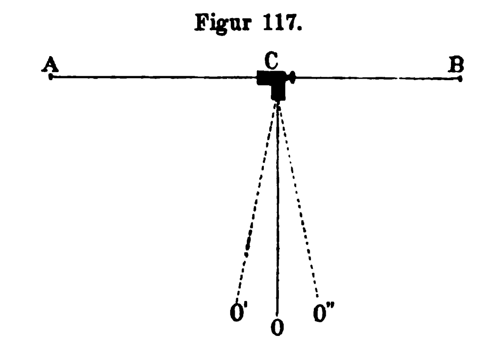
Sowohl die Libelle als auch der Halter sind angeschraubt und vertauschbar.

Die Vertauschung entspricht der Umlegung des Instruments.

**Frage 119.** Wie wird das Winkelfernrohr rektifiziert?

**Antwort.** Die Richtigkeit des Winkelfernrohrs erfordert, dass die reflektierende Fläche des Prismas mit der Achse des geraden Fernrohrs einen Winkel von 45° ein-

Figur 117.




**Bemerkung.** Das Winkelfernrohr, welches in der bezeichneten Form zuerst vom Verfasser angegeben sein dürfte, hat gegenüber den Winkelspiegeln und Prismen den Vorteil, dass es beide Gegenstände gleich scharf zeigt, was bei den soeben angeführten Instrumenten nicht der Fall ist. Wird das Fernrohr in freier Hand gehalten, so können allerdings während des Visierens kleine Schwankungen eintreten. Man gelangt aber bald bei einiger Uebung zur nötigen Fertigkeit im Halten.

schliesst. Dieses wird praktisch auf folgende Art erreicht.

Man steckt sich eine möglichst lange Gerade $AB$ ab und stellt sich mit dem Winkelfernrohr etwa in der Mitte desselben auf, so aber, dass man sich genau in der Geraden befindet. Hierauf visiert man einen Endpunkt (vergl. Figur 117), etwa $A$, und lässt möglichst weit vom Gehilfen den Punkt 0' markieren, der im Sehfelde des Fernrohrs mit $A$ zusammenfällt.

Legt man das Instrument um und visiert auf den anderen Endpunkt $B$, so soll der früher bezeichnete Punkt 0' mit dem Punkte $B$ im Fernrohrfelde zusammenfallen; ist dieses nicht der Fall, so wird der Abstand in Teilen des Durchmessers des Fernrohrs geschätzt und zur Hälfte durch die Schraube $S$ korrigiert.

Sollen sehr lange Geraden abgesteckt werden, so wird das Winkelfernrohr auf ein Stativ gestellt, wozu es eine ausschraubbare Achse $T$ besitzt. Eine Dosenlibelle $L$ auf der oberen Kubusfläche ermöglicht eine genaue Horizontalstellung.

---

**Frage 120.** Wie wird das Winkelfernrohr gebraucht?

**Antwort.** Um mit Hilfe des Winkelfernrohrs einen rechten Winkel abzustecken, wird zunächst der gegebene Punkt $A$ scharf fokusiert. Dieses geschieht dadurch, dass man das Objektiv des dem Punkte zugekehrten Rohres solange verschiebt, bis der Gegenstand scharf erscheint. Sodann wird genähert, der Punkt $B$ markiert und das zweite Fernrohr fokusiert, wobei natürlich der Punkt $A$ nicht im Gesichtsfelde zu sein braucht. Ist dieses geschehen, so stellt man sich zentrisch über dem Standpunkt mit Hilfe des Lotes auf (vergl. Figur 118), bringt den Gegenstand $A$ in die Mitte des Fadenkreuzes und lässt den Gehilfen den zweiten Punkt einrichten.

**Bemerkung.** Am besten bringe man das Winkelfernrohr mit einem Stock in Verbindung, dessen Höhe der Aughöhe des Beobachters entspricht. Man zentriert dann leichter und das Fernrohr wird stabiler. Noch besser ist natürlich ein ähnliches Stativ wie beim Theodolit, doch wird dadurch das Instrument unhandlich.

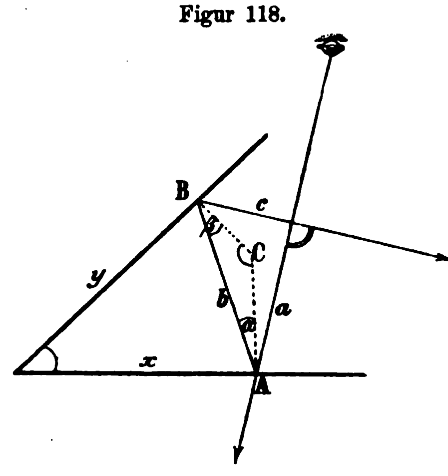
---

**Frage 121.** Was ist ein Winkelspiegel?

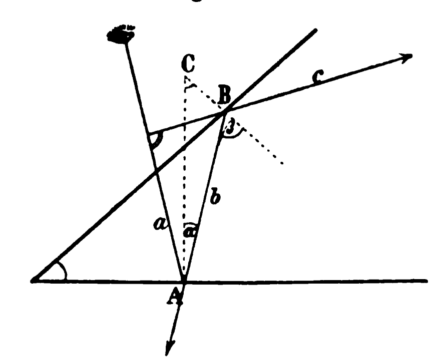
**Antwort.** Ein Winkelspiegel ist ein im wesentlichen aus zwei um $45^0$ gegen einander geneigten Spiegeln bestehendes Instrument, welches zum Abstecken konstanter Winkel dient (vergl. Figur 119).

Trifft ein Strahl die Fläche $B$ (vergl. Figuren 118 und 119) unter einem Winkel $\beta$, so wird er unter demselben Winkel reflektiert und trifft den anderen Spiegel unter einem

Figur 118.



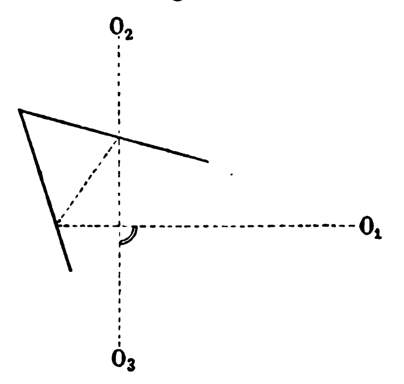

Figur 119.




**Bemerkung.** Man vergleiche auch Sachs Planimetrie, III. Teil, Seite 200. Der Winkelspiegel wurde von George Adams in London erfunden und von seinem Sohne 1791 zum erstenmale beschrieben.

**Frage 122.** Wie wird der Winkelspiegel angewendet?

Figur 121.




Winkel $\alpha$, um mit diesem Winkel in das Auge reflektiert zu werden. Da (vergleiche Figur 118) der Winkel zwischen $x$ und $y$ $= 45^0$, so wird der Schnittwinkel der beiden Strahlen (in der Figur 119 mit (( bezeichnet)

$$= 2(\alpha + \beta)$$

als Aussenwinkel des Dreieckes ($AB$ und Schnittpunkt der beiden Strahlen).

Nun ist aber im Dreiecke $xyAB$:

$$(90 - \alpha) + (90 - \beta) + 45^0 = 180$$

also:

$$\alpha + \beta = 45^0$$

demnach ist der Schnittwinkel beider Strahlen gleich $90^0$, d. h. einem rechten. Zu ersehen durch:

Figur 120.



**Antwort.** Die Anwendung des Winkelspiegels ergibt sich aus dem Vorstehenden sofort.

Um von $O_1$ eine Senkrechte (vergleiche Figur 121) auf die Gerade $O_3O_2$ zu fällen, schreitet man, mit dem Auge über den Spiegel nach $O_2$ schauend, solange vor, bis das Bild von $O_1$ unter dem (über den Spiegel hinweggesehenen) Bilde von $O_2$ erscheint.

**Frage 123.** Wie wird ein Winkelspiegel auf seine Richtigkeit geprüft?

**Antwort.** Um einen Winkelspiegel auf seine Richtigkeit zu prüfen, geht man einmal von $0_3$ (vergl. Figur 121) aus und bestimmt nach der vorhergehenden Frage den Punkt $P$, sodann geht man von $0_2$ aus und bestimmt wieder den Fusspunkt der von $0_1$ auf $0_2 0_3$ gefällten Senkrechten.

Ist der Winkelspiegel in Ordnung, so müssen diese beiden Punkte zusammenfallen. Wenn nicht, so schliessen die beiden Spiegel einen Winkel ein, der grösser oder kleiner ist als 45°. Er wird grösser, wenn man bei dem Suchen des zweiten Punktes über den ersten hinausgeschritten ist, kleiner im Gegenfalle. Die Richtigstellung der beiden Spiegel erfolgt mittels einer Korrektionsschraube (vergl. Erkl. 80).

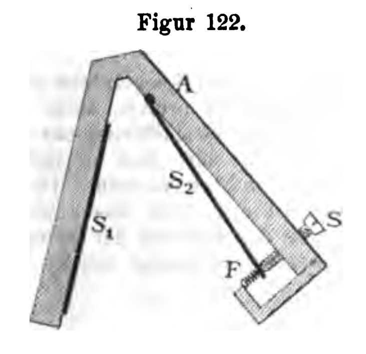
**Erkl. 80.** Als besondere Vorzüge des Instrumentes müssen hervorgehoben werden: die rasche Arbeit und leichte Handhabung, sowie der Umstand, dass dieses Instrument sehr kleinen Raum einnimmt und leicht in der Tasche getragen werden kann. In der neueren Zeit wurde der Winkelspiegel fast allgemein durch die Prismeninstrumente verdrängt.

---

**Frage 124.** Was ist eine Korrektionsschraube?

**Antwort.** Die Korrektionsschraube ist eine an den einen Spiegel des Winkelspiegels wirkende Schraube, die den Zweck hat, die gegenseitige Winkelstellung der beiden Spiegel zu verändern. Bei einem Winkelspiegel ist nämlich für gewöhnlich nur der eine Spiegel an der Hülse (etwa $S_1$ in der Figur 122) befestigt, der andere dagegen nur so, dass er um eine Achse ($A$) drehbar ist. Der Korrektionsschraube entgegen wirkt eine Feder $F$. Durch Anziehen oder Nachlassen der Schraube wird der Spiegel um die Achse $A$ gedreht.

Figur 122.



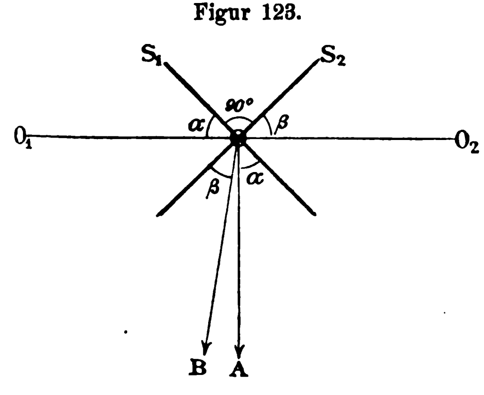

---

**Frage 125.** Was ist ein Spiegelkreuz.

**Antwort.** Ein Spiegelkreuz besteht im wesentlichen aus zwei aufeinander senkrecht stehenden Spiegeln, die übereinander gestellt sind und die dazu dienen, um auf dem Felde einen Winkel von 180° anzugeben, oder mit anderen Worten, um Zwischenpunkte einer Geraden zu bestimmen (vergl. Figur 123).

Die Theorie des Instrumentes ist einfach. Der Strahl von einem Punkte $0_1$ wird von dem Spiegel $S_1$ unter dem Einfallswinkel $\alpha$ wieder nach $A$ reflektiert. Dasselbe geschieht mit dem von $0_2$ auf dem Spiegel $S_2$ unter dem Winkel $\beta$ angelangten Strahle, der nach $B$ reflektiert wird.

Figur 123.




Nun ist:

$$0_2 0 B = 180^0 - 2\beta$$
$$0_1 0 A = 180^0 - 2\alpha$$

also:

$$0_2 0 B + 0_1 0 A = 360^0 - 2(\alpha + \beta)$$

**Erkl. 81.** Das Spiegelkreuz wurde vom Regierungsgeometer Berlin im Jahre 1844 erfunden.

Da aber:

$$\alpha + \beta = 180^0 - 90^0 = 90^0$$

so wird:

$$0_2 0 B + 0_1 0 A = 360^0 - 2 \cdot 90^0 = 180^0$$

Dieses ist aber nur dann möglich, wenn die Strahlen $0A$ und $0B$ zusammenfallen.

Liegen also $0_1$, $0_2$ und $0$ auf einer Geraden, so erscheinen die Punkte $0_1$ und $0_2$ an der Kreuzungsstelle der beiden Spiegel.

---

**Frage 126.** Wie wird ein Spiegelkreuz geprüft?

**Antwort.** Um ein Spiegelkreuz auf seine Richtigkeit zu prüfen, muss man beachten, dass ein Spiegelkreuz nur dann richtig funktioniert, wenn:

1) die beiden Spiegel auf der Grundfläche des Gehäuses senkrecht stehen und

2) wenn sie sich unter einem rechten Winkel kreuzen.

Die Prüfung muss sich also auf diese beiden Punkte beziehen.

---

**Frage 127.** Wie wird ein Spiegelkreuz auf seine Senkrechtstellung geprüft?

**Antwort.** Um ein Spiegelkreuz auf seine Senkrechtstellung zu prüfen, setzt man in einiger Entfernung zwei Stäbe senkrecht ein und stellt sich so auf, dass in jedem der beiden Spiegel ein Stab erscheint. Die Bilder müssen parallel sein. Ist dieses nicht der Fall, so muss die Stellung der Spiegel von einem Mechaniker berichtigt werden.

---

**Frage 128.** Wie wird ein Spiegelkreuz auf die rechtwinklige Stellung seiner Spiegel geprüft?

**Antwort.** Einfach dadurch, dass man in ziemlich grosser Entfernung drei Punkte auf einem Felde absteckt, die in einer Geraden liegen und sodann den Spiegelkreuzpunkt vertikal über den mittleren aufstellt. Sind die Spiegel senkrecht aufeinander, so fallen in ihnen die Bilder der beiden äusseren Punkte zusammen. Fallen sie nicht zusammen, so muss durch Korrektionsschrauben nachgeholfen werden.

---

**Frage 129.** Was ist ein Prismenkreuz?

**Erkl. 82.** Das Prismenkreuz wurde im Jahr 1851 von Bauernfeind konstruiert (vergl. Theorie und Gebrauch des Prismenkreuzes, München 1851).

**Antwort.** Das Prismenkreuz ist ein aus zwei Prismen von $90^0$ zusammengesetztes Instrument, welches dazu dient, um zwischen zwei gegebenen Punkten einen dritten abzustecken. Das Prismenkreuz ist also ein Analogon des Spiegelkreuzes (vgl. Fig. 124).

Figur 124. **Prismenkreuz von Ertel & Sohn in München.**




**Frage 130.** Welchen Weg nimmt ein Lichtstrahl, wenn er eine Seite eines Glasprismas von 90° besitzt?

**Antwort.** Tritt ein Strahl $S$ unter einem Winkel $\alpha$ (vergl. Figur 125) in ein Glasprisma, so wird er unter einem kleineren Winkel $\beta$ gegen die Hypotenuse gebrochen, so dass er unter einem Winkel $\gamma$ von derselben empfangen und reflektiert wird gegen die zweite Kante, die er unter einem Winkel $\delta$ trifft. Hier tritt noch eine Brechung ein und der Lichtstrahl verlässt unter einem Winkel $\varepsilon$ das Prisma.

Für diese Winkel gelten die Beziehungen:

$$1) \ldots \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \mu$$

$$2) \ldots \frac{\sin\varepsilon}{\sin\delta} = \mu$$

wo $\mu$ den Brechungskoëffizient des Glases (etwa 1,5) bezeichnet. Ferner wird:

$$3) \ldots 45^0 + (90^0 + \beta) + \gamma = 180^0$$

$$4) \ldots 45^0 + (90^0 + \delta) + \gamma = 180^0$$

Subtrahiert man diese Gleichungen, so ergibt sich:

$$5) \ldots \delta = \beta$$

Nun ist aber:

$$\sin\alpha = \mu \sin\beta$$

$$\sin\varepsilon = \mu \sin\delta$$

und wegen $\beta = \delta$ auch:

$$\mu \sin\beta = \mu \sin\delta$$

woraus:

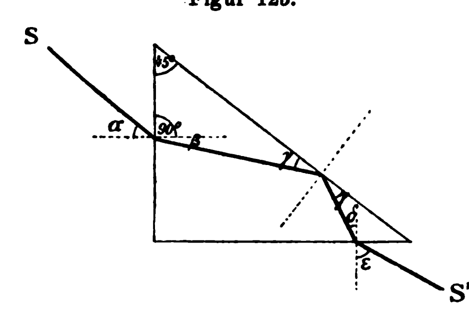
$$\sin\alpha = \sin\varepsilon$$

oder:

$$6) \ldots \alpha = \varepsilon$$

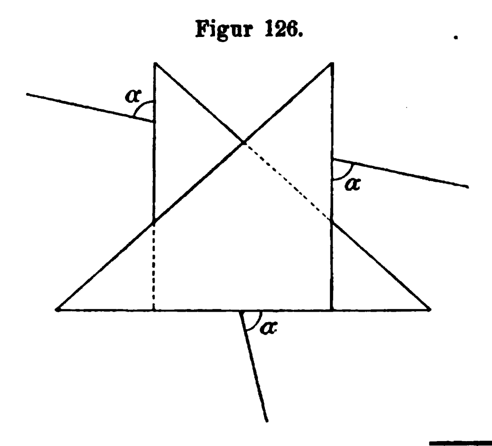
folgt. Ist $\alpha = \varepsilon$, so tritt der Strahl wieder unter demselben Winkel aus dem Prisma, unter welchem er eingetreten, d. h. ein


Figur 125.




**Bemerkung.** Es möge beachtet werden, dass der Grundriss des Prismas ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck sein muss.

Figur 126.




Glasprisma wirkt genau so wie ein ebener Spiegel, parallel zu seiner Hypotenuse gestellt. Verbindet man also (vergl. Figur 125) zwei solche Prismen, welche die Stellen der Spiegel im Spiegelkreuz vertreten, so erhält man das Prismenkreuz, welches ebenso wie der Winkelspiegel angewendet wird.

Hauptsache ist, dass die Hypotenusenebenen gut rechtwinklig gegen einander geneigt sind. Hievon kann man sich analog wie bei dem Winkelspiegel überzeugen. Ist dieses nicht der Fall, so muss durch Korrektionsschrauben nachgeholfen werden.

---

**Frage 131.** Wie wird ein Prismenkreuz berichtigt?

**Antwort.** Zur eventuellen Berichtigung des Prismenkreuzes sind eigene Korrektionsschrauben angebracht. Das untere Prisma ist unbeweglich mit der Fassung verbunden, das obere kann vermittels der Schraube *c* (vergl. Figur 124) etwas gedreht werden. Es müssen die Kathetenebenen parallel sein und die Hypotenusenebenen einen rechten Winkel miteinander einschliessen.

**Bemerkung.** Zur Drehung lüfte man ein wenig die an der Seitenfläche der Fassung befindliche Schraube *a* und ziehe sodann die andere Schraube *b* an oder umgekehrt, je nach dem Sinne der Drehung, die erforderlich ist.

**Bemerkung.** Die Prismeninstrumente werden am besten von der Spezialfirma T. Ertel und Sohn in München bezogen, welche ihnen auch eine Gebrauchsanweisung beilegt.

---

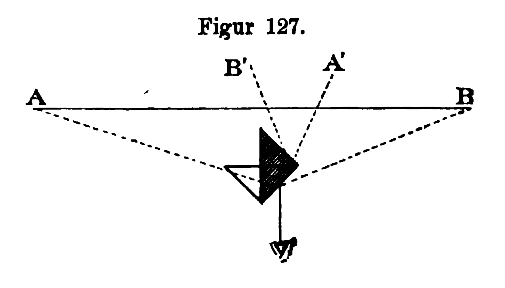
**Frage 132.** Wie wird ein Punkt in eine Gerade von nicht zu grosser Ausdehnung eingeschaltet?

**Antwort.** Man stellt sich ungefähr zwischen die beiden Signale $AB$ und hält das Prismenkreuz so vor dem Auge, dass die Kante des rechten Winkels an einem der Prismen dem Auge zugewandt ist.

Nehmen wir nun an, wir befänden uns ausserhalb der Geraden $AB$, so erblicken wir zwei Bilder, die nach den vorhergehenden Entwicklungen bei der Drehung des Instruments um seine Achse ihre Lage nicht ändern (vergl. Figur 127). Fallen sie zusammen, so ist dieses ein Zeichen, dass man sich in der Geraden befindet.

Man braucht also senkrecht auf $AB$ sich so lange zu bewegen, bis man die beiden Bilder zusammenfallen sieht.

Figur 127.




**Bemerkung.** Ist die Entfernung von $AB$ sehr gross, d. h. grösser als 50—100 m, so muss unbedingt das Winkelfernrohr gebraucht werden.

---

**Frage 133.** Wie wird mit dem Prismenkreuz eine Senkrechte über einer gegebenen Geraden abgesteckt?

**Antwort.** Man stellt sich in dem verlangten Punkt der Geraden auf, so dass sich die beiden Bilder $A'B'$ decken, und

**Bemerkung.** Hat man viele Senkrechte zu markieren, wie dies bei den Vermessungen der Fall ist, so spannt man am bequemsten zwischen den Punkten $A$, $B$ eine Schnur aus, um nicht den Zwischenpunkt nach der vorhergehenden Frage immer von neuem aufsuchen zu müssen.

sieht über das Prisma hinweg. An derjenigen Stelle, die man kenntlich machen will, lässt man einen Stab so einrichten, dass er sich beim Hinwegsehen mit den beiden Bildern $A'$ und $B'$ deckt.

---

**Frage 134.** Wie wird mit einem Prismenkreuz von einem Punkt auf eine Gerade die Senkrechte gefällt?

**Antwort.** Um mit Hilfe des Prismenkreuzes von einem Punkt auf eine Gerade eine Senkrechte zu fällen, stellt man sich ungefähr in dem gesuchten Punkt auf und beobachtet, wann bei der Bewegung in der Geraden sich die beiden Bilder $A'B'$ mit dem gegebenen Punkt, den man mit einem Stab markiert hat, decken.

---

**Frage 135.** Wie wird ein Prismenkreuz praktisch auf seine Richtigkeit geprüft?

Figur 128.

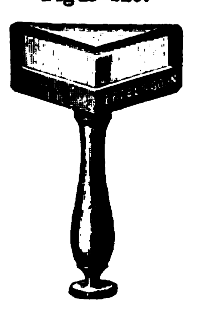
$\dot{A}$ $\dot{C}$ $\dot{B}$

**Antwort.** Man schaltet zwischen zwei Punkten $A$, $B$ einen dritten $C$ ein und sieht nach, ob diese drei Punkte sich wirklich in einer Geraden befinden. Ist dieses nicht der Fall, so muss mit den oben beschriebenen Schrauben $a$, $b$, $c$ das obere Prisma ein wenig gedreht werden und das so lange, bis der dritte Punkt beim zusammenfallenden Bild in die Gerade $AB$ zu stehen kommt (vergl. Figur 128).

---

**Frage 136.** Was ist ein Winkelprisma?

Figur 129.



**Antwort.** Das Winkelprisma ist ein rechtwinkliges Glasprisma, welches dazu dient, Winkel von 90° abzustecken. Man hat zu diesem Zweck die Hypotenusenfläche des Prismas parallel zu stellen, zu jener Geraden, auf welche eine Senkrechte zu errichten ist.

Das Bild des Senkrechtpunktes $S'$ (vergl. Figur 131), erscheint dann in der Richtung $S$ und ändert sich nicht, wenn das Prisma etwas um seine Achse gedreht wird, wodurch es von dem durch zweimalige Reflexion entstehenden Bild leicht unterschieden werden kann. Ein Winkelprisma kann nicht berichtigt werden.

**Erkl. 83.** Das Winkelprisma stammt ebenfalls von Bauernfeind her.

---

**Frage 137.** Welches ist die Theorie des Winkelprismas?

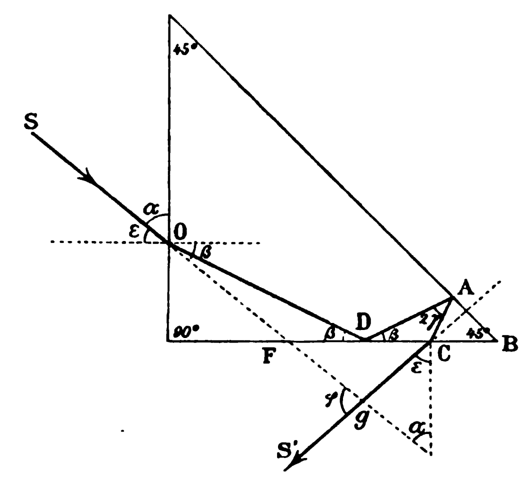
**Erkl. 84.** Ein in $S'$ befindliches Auge sieht das Bild von $S$ in der Richtung $CS'$ (vergl. Figur 108). Wird ein Stab so eingerichtet, dass man über das Prisma wegsehend, denselben mit dem Stab in $S$ sich decken sieht, so bildet $S$ Auge und Stab einen rechten Winkel.

**Antwort.** Die Theorie des Winkelprismas beruht darauf, dass ein rechtwinklig-gleichschenkliges Prisma nicht nur (wie ein ebener Spiegel) als Reflexionsglas wirkt, sondern auch eine konstante Ablenkung von 90° gibt (vergl. Figur 130 und 131).

Figur 130.



Figur 131.




Um dieses einzusehen, beachte man, dass für den Eintritt (vgl. Fig. 131) des Strahles die Beziehung gilt:

$$1) \ldots \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \mu$$

Ferner ist im Dreieck $DBA$:

$$2) \ldots \beta + (\gamma + 90^0) + 45^0 = 180^0$$

und im Dreieck $ABC$:

$$3) \ldots (90 - \gamma) + (90 - \delta) + 45^0 = 180^0$$

und für den Austritt:

$$4) \ldots \frac{\sin\varepsilon}{\sin\delta} = \mu$$

Aus Gl. 2) und 3) folgt:

$$5) \ldots \beta = \delta$$

Damit wird aus Gl. 1) und 4) analog wie früher:

$$\varepsilon = \alpha$$

Da nun der Winkel zwischen dem ein- und austretenden Strahl gleich $\varphi$ ist, so folgt aus dem Dreieck $FCG$:

$$\varphi = (90 - \varepsilon) + \varepsilon = 90^0$$

Da ausserdem:

$$\varphi = \alpha + \varepsilon = 2\alpha$$

so folgt, dass:

$$\alpha = 45^0$$

Hieraus der Satz: **Ist der einfallende Strahl parallel der Hypotenuse, so tritt aus dem Prisma ein Strahl senkrecht auf die Hypotenuse aus.**

## 12. Ueber die Genauigkeit der Winkelabsteckungen.

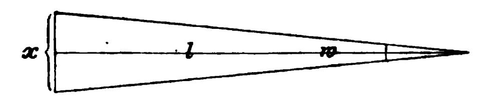
**Frage 138.** Wie gross ist die Genauigkeit der einzelnen Winkelinstrumente?

**Antwort.** Nach Jordan ist der mittlere Zielfehler bei einer Kreuzscheibe $= +2'$. Dieselbe Grösse ist wohl auch für das Winkelkreuz und die Winkeltrommel gültig. Indessen kann diese Grösse bis $+5'$ steigen, insbesondere an Abhängen und bei schlechter Beleuchtung. Dieselbe Grösse gilt auch für die Prismen. Es ist aber ratsam, den mittleren Visurfehler für jedes Instrument zu bestimmen, denn die individuelle Verschiedenheit ist gar zu gross, sowohl der Beobachter als auch der Instrumente. Im allgemeinen kann man sagen, dass der Zielfehler bei einem prismenlosen Instrumente bei 20 m und bei einem Prismeninstrumente bei 30 m ohne Belang ist, vorausgesetzt, dass das Instrument selbst fehlerfrei ist. Und dieses sind auch die Grenzen, die beim Gebrauch einzuhalten sind.

**Erkl. 85.** In Bezug auf die Anwendung ist zu bemerken, dass das Prismenkreuz dem Winkelspiegel schon deswegen vorzuziehen ist, weil es dem Auge die Messlinie zu gleicher Zeit sowohl aufwärts als abwärts zeigt. Ein Nachteil ist, dass beide Instrumente nur für die Ebene berechnet sind. Ein weiterer Nachteil der Instrumente liegt darin, dass der anvisierte Gegenstand und die Visur in verschiedenen Entfernungen liegen. Ist das Auge auf den Gegenstand akkomodiert, so sieht es die Visur nicht deutlich und umgekehrt.

**Frage 139.** Was bedeutet das: der mittlere Zielfehler beträgt 2′.

Figur 132.




**Erkl. 86.** Man beachte, dass diese Angaben für einen schon etwas eingeübten Vermesser gelten, der Anfänger wird in der Regel Fehler machen, die die angegebenen Grenzen beträchtlich überschreiten.

**Antwort.** Der Ausdruck, der mittlere Zielfehler beträgt 2′, bedeutet soviel, dass innerhalb eines Gesichtwinkels von 2′ der gesuchte Punkt liegen kann (vergl. Fig. 132).

Sei $w$ allgemein der mittlere Zielfehler, so ist der mögliche Fehler in der Entfernung $l$ gleich:

$$x = 2\,l \sin\frac{w}{2}$$

oder da $w$ sehr klein, so dass:

$$\sin w = w' \sin 1' = \frac{w'}{3438'}$$

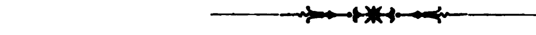
gesetzt werden kann, auch:

$$x = \frac{l\,w'}{3438'}$$

für $l = 50$ m, $w = 2'$ folgt:

$$x = 0{,}03 \text{ m} = 3 \text{ cm}$$

Aus diesem Grunde gestatten die Katastermessungsanweisungen nur Ordinaten von etwa 20—40 m Länge.



# IV. Die Lehre von der Aufnahme im allgemeinen.

(Ausschliesslich: die Koordinatenaufnahme, von welcher der II. Teil handelt.)

## 1. Ueber die Auftragung der Winkel.

**Frage 140.** Welche Methoden hat man, um einen Winkel, der auf dem Felde gemessen wurde, auf das Papier aufzutragen?

**Antwort.** Um einen gemessenen Winkel auf das Papier aufzutragen bedient man sich einer von den nachstehenden Methode:

I. der Dreiecksmethode,

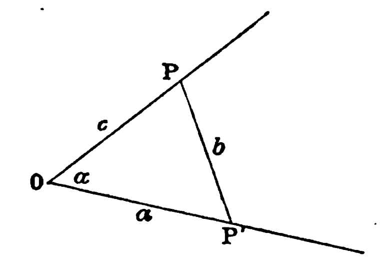
II. der Sinus-Tangentenmethode,

III. der Transporteurmethode.

---

**Frage 141.** Worin besteht die Dreiecksmethode?

Figur 133.




**Antwort.** Die Dreiecksmethode besteht auf dem Prinzip, dass ein Dreieck vollkommen bestimmt ist, sobald man seine drei Seiten kennt.

Der Winkel wird auf dem Felde dadurch aufgenommen, dass man ihn zu einem Dreieckswinkel macht. Zu diesem Zwecke wählt man auf seinen Schenkeln ($OP$, $OP'$ in der Figur 133) beliebige Punkte, etwa 20—40 m vom Scheitelpunkte entfernt und misst ihre Entfernung vom Scheitelpunkte und von einander ($a$, $b$, $c$). Aus den drei Seiten lässt sich sowohl der Winkel berechnen, als auch auf das Papier auftragen.

Da es vollkommen willkürlich ist, wie lang $a$ und $c$ genommen werden, so empfiehlt es sich:

$$a = c = 10,\ 20,\ 30,\ \cdots \text{ m}$$

zu nehmen. Wird $b$ gemessen, so kann dann der Winkel $\alpha$ unmittelbar einer Tafel entnommen werden. Wir teilen eine solche Tafel bis 90° für $a = c = 10$ m mit.

| $\alpha$ | $b$ (m) | Diff. | |
|---|---|---|---|
| $\alpha = 1^0$ | $b = 0·175$ | | |
| 2 | 0·349 | 174 | Diff. 174 |
| 3 | 0·524 | 175 | Diff. für 1′ = 0·003 |
| 4 | 0·698 | 174 | „ „ 10′ = 0·029 |
| 5 | 0·892 | 174 | |
| 6 | 1·047 | 175 | |
| 7 | 1·221 | 174 | |
| 8 | 1·395 | 174 | |
| 9 | 1·569 | 174 | |
| 10 | 1·743 | 174 | |
| 11° | 1·917 | | |
| 12 | 2·091 | 174 | Diff. 173 |
| 13 | 2·264 | 173 | Diff. für 1′ = 0·003 |
| 14 | 2·437 | 173 | „ „ 10′ = 0·029 |
| 15 | 2·611 | 174 | |
| 16 | 2·783 | 172 | |
| 17 | 2·956 | 173 | |
| 18 | 3·129 | 173 | |
| 19 | 3·301 | 172 | |
| 20 | 3·473 | 172 | |
| 21° | 3·645 | | |
| 22 | 3·816 | 171 | Diff. 170 |
| 23 | 3·987 | 171 | Diff. für 1′ = 0·003 |
| 24 | 4·158 | 171 | „ „ 10′ = 0·028 |
| 25 | 4·329 | 171 | |
| 26 | 4·499 | 170 | |
| 27 | 4·669 | 170 | |
| 28 | 4·838 | 169 | |
| 29 | 5·008 | 170 | |
| 30 | 5·176 | 168 | |
| 31° | 5·345 | | |
| 32 | 5·512 | 167 | Diff. 166 |
| 33 | 5·680 | 168 | Diff. für 1′ = 0·003 |
| 34 | 5·847 | 167 | „ „ 10′ = 0·028 |
| 35 | 6·014 | 167 | |
| 36 | 6·180 | 166 | |
| 37 | 6·346 | 166 | |
| 38 | 6·511 | 165 | |
| 39 | 6·676 | 165 | |
| 40 | 6·840 | 164 | |
| 41° | 7·004 | | |
| 42 | 7·167 | 163 | Diff. 160 |
| 43 | 7·338 | 163 | Diff. für 1′ = 0·003 |
| 44 | 7·492 | 162 | „ „ 10′ = 0·027 |
| 45 | 7·654 | 162 | |

| | m | Diff. |
|---|---|---|
| 46 | 7·815 | 161 |
| 47 | 7·975 | 160 |
| 48 | 8·135 | 160 |
| 49 | 8·294 | 159 |
| 50 | 8·452 | 158 |
| 51° | 8·610 | |
| 52 | 8·767 | 157 |
| 53 | 8·924 | 157 |
| 54 | 9·080 | 156 |
| 55 | 9·235 | 155 |
| 56 | 9·389 | 154 |
| 57 | 9·543 | 154 |
| 58 | 9·696 | 153 |
| 59 | 9·848 | 152 |
| 60 | 10·000 | 152 |
| 61° | 10·151 | |
| 62 | 10·301 | 150 |
| 63 | 10·450 | 149 |
| 64 | 10·598 | 148 |
| 65 | 10·746 | 148 |
| 66 | 10·893 | 147 |
| 67 | 11·039 | 146 |
| 68 | 11·184 | 145 |
| 69 | 11·328 | 144 |
| 70 | 11·472 | 143 |
| 71° | 11·614 | |
| 72 | 11·755 | 141 |
| 73 | 11·896 | 141 |
| 74 | 12·036 | 140 |
| 75 | 12·175 | 139 |
| 76 | 12·313 | 138 |
| 77 | 12·450 | 137 |
| 78 | 12·586 | 136 |
| 79 | 12·722 | 136 |
| 80 | 12·856 | 134 |
| 81° | 12·989 | |
| 82 | 13·121 | 132 |
| 83 | 13·252 | 131 |
| 84 | 13·383 | 131 |
| 85 | 13·512 | 129 |
| 86 | 13·640 | 128 |
| 87 | 13·767 | 127 |
| 88 | 18·893 | 126 |
| 89 | 14·018 | 125 |
| 90 | 14·142 | 124 |

Diff. 155
Diff. für 1′ = 0·003
„ „ 10′ = 0·026

Diff. 150
Diff. für 1′ = 0·003
„ „ 10′ = 0·025

Diff. 145
Diff. für 1′ = 0·002
„ „ 10′ = 0·024

Diff. 140
Diff. für 1′ = 0·002
„ „ 10′ = 0·023

Diff. 135
Diff. für 1′ = 0·002
„ „ 10′ = 0·022

Diff. 130
Diff. für 1′ = 0·002
„ „ 10′ = 0·022

Diff. 125
Diff. für 1′ = 0·002
„ „ 10′ = 0·021

---

**Aufgabe 34.** Man hat einen Winkel am Felde aufzunehmen. Nachdem man die im Abstande von 10 m vom Scheitel befindlichen Schenkelpunkte festgelegt hat, wurde ihr Abstand zu:

9·43 m

**Auflösung.** Wir finden in der Tafel bei:

56° ... 9·389
57° ... 9·543 Diff. 154

gemessen. Wie gross ist der Winkel? Mit welcher Genauigkeit ist derselbe bestimmt, vorausgesetzt, dass die Längenmessung auf 1 cm genau ist?

Die Rechnung stellt sich wie folgt:

$$\begin{array}{r} 9{\cdot}43 \\ 9{\cdot}389 \\ \hline 0{\cdot}041 \end{array}$$

bei 155 ist für:

$$1' = 0{\cdot}003$$
$$10' = 0{\cdot}026$$

also:

$$\begin{array}{r} 0{\cdot}041 \\ -\,0{\cdot}026 \cdots 10' \\ \hline 15 \cdots 5' \end{array}$$

so dass wir für den Winkel haben:

$$56^0\,15'$$

Da 1′ 0·003 m entsprechen, so entsprechen:

$$0{\cdot}010 \text{ m}$$

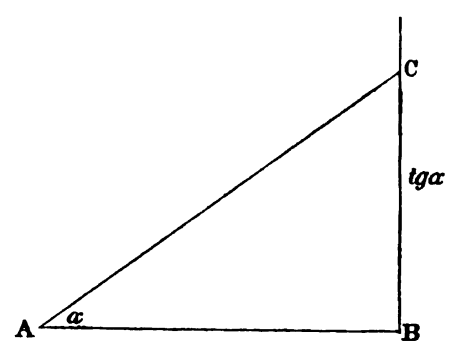
nahezu 3′, also bis auf 3′ genau dürfte die Messung sein.

Diese Genauigkeit ist aber für sehr viele Zwecke vollkommen ausreichend.

---

**Frage 142.** Worin besteht die Sinustangentenmethode?

Figur 134.




**Bemerkung.** Die Tafeln geben die Tangenten für den Radius 1, man hat also im Falle $AB = 100$ mm:

$$BC = 100 \times \text{tg in Millimetern.}$$

Figur 134a.

**Antwort.** Wurde ein Winkel mit einem Theodolit gemessen, so wird er, falls eine grössere Genauigkeit verlangt wird, mittels seines Sinus oder der Tangente aufs Papier gebracht.

Man verfährt hiebei wie folgt: Man zeichnet eine Strecke $AB$ und errichtet im Punkt $B$ eine Senkrechte $BC$, auf welche die Tangente aufgetragen wird. Verbindet man sodann den Endpunkt der Tangente ($C$ in der Figur 134) mit dem Scheitelpunkt, so ist:

$$\sphericalangle CAB = \alpha$$

und

$$BC = AB \operatorname{tg} \alpha$$

oder wenn $AB = 1$ gesetzt wird:

$$BC = \operatorname{tg} \alpha$$

Soll statt der Tangente der Sinus angenommen werden, was dann von Vorteil ist, wenn die Tangente zu gross wird, dann errichte man über der Einheitsstrecke $AB$ einen Halbkreis und nehme (vgl. Fig. 134a):

$$AC = AB \cdot \sin \alpha$$

in die Zirkelöffnung, wodurch man den Punkt $C$ bekommt. Dann ist:

$$\sphericalangle CAB = \alpha$$

Man kann aber auch da mit Vorteil die Tangentenmethode anwenden, indem man nicht den Winkel $\alpha$, sondern:

$$\frac{\alpha}{2} \text{ oder } \frac{\alpha}{3}$$

je nachdem $\alpha$ nahe an $90^0$ oder $180^0$ ist, aufträgt, und diesen dann in bekannter Art verdoppelt resp. verdreifacht (vgl. Fig. 134b).

## Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

**Der ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ **kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist **aufgeschnitten** und gut brochiert, um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes **Kapitel** enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und **Erklärungen am Schlusse desselben.**

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft.

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles,** was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

---

 Das vollständige

## Inhaltsverzeichnis

### der bis jetzt erschienenen Hefte

kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

---

**Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.**

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

1287. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Vermessungskunde (Geodäsie). Erster Teil. Forts. v. Heft 1286. — Seite 113—128. Mit 23 Figuren.







# Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus **allen Zweigen** der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie**; des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's**; der **Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar-** u. **Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

**Studium** zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

**Dr. Adolph Kleyer,**

Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

# Vermessungskunde

## (Geodäsie).

**Erster Teil.**

Nach **System Kleyer** bearbeitet von **Dr. W. Láska.**

Fortsetzung von Heft 1286. — Seite 113—128. Mit 23 Figuren.

**Inhalt:**



**Stuttgart 1894.**

Verlag von Julius Maier.

## Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

# PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form**, mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch **alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der **mathematischen** Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht **vergessenen** mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen** in **allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. **Kleyer,** Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

**Stuttgart.** **Die Verlagshandlung.**

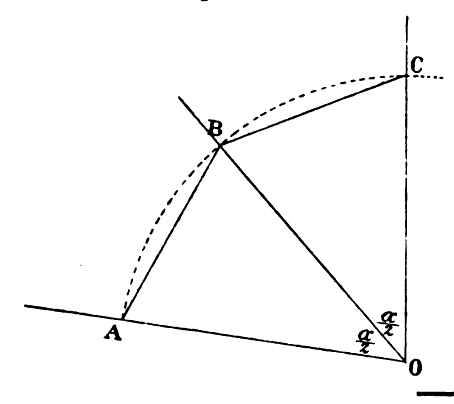
**Erkl. 87.** **Man hat:**

$$\sin\alpha = \frac{AC}{AB}$$

also wenn: $AB = 1$

gesetzt wird: $\sin\alpha = AC$

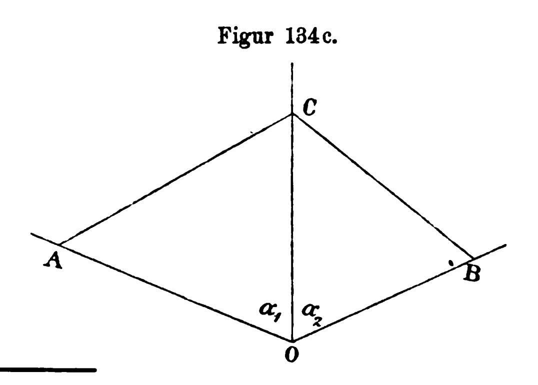
Figur 134b.




Soll ein sehr flacher Winkel von einem Papierblatt auf das andere übertragen werden (vergl. Figur 134c), dann ziehe man durch dessen Scheitel einen beliebigen Strahl (nahe der Mitte des Winkels) und trage die beiden so gebildeten Winkel auf:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$$

Figur 134c.

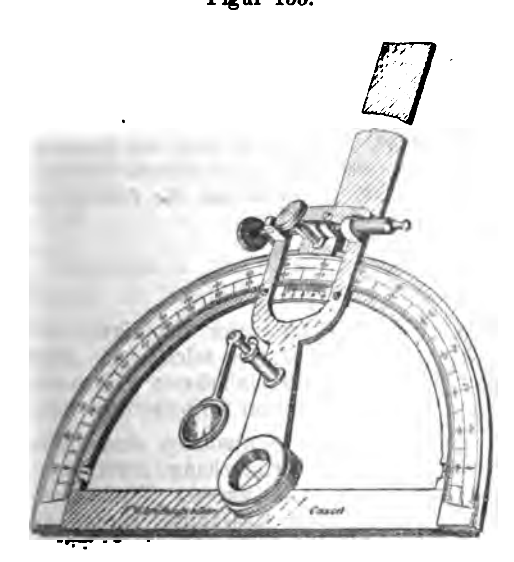



**Frage 143.** Worin besteht die Transporteurmethode?

**Antwort.** Die Winkelauftragung kann auch mit Hilfe des Transporteurs geschehen, dessen Gebrauch hier wohl nicht auseinandergesetzt zu werden braucht. Indessen ist diese Methode, ausser wenn man genaue Transporteure benützt, nicht so genau wie die früher angegebenen.

**Frage 144.** Welche mechanische Mittel dienen zur Winkelaufzeichnung?

Figur 135.

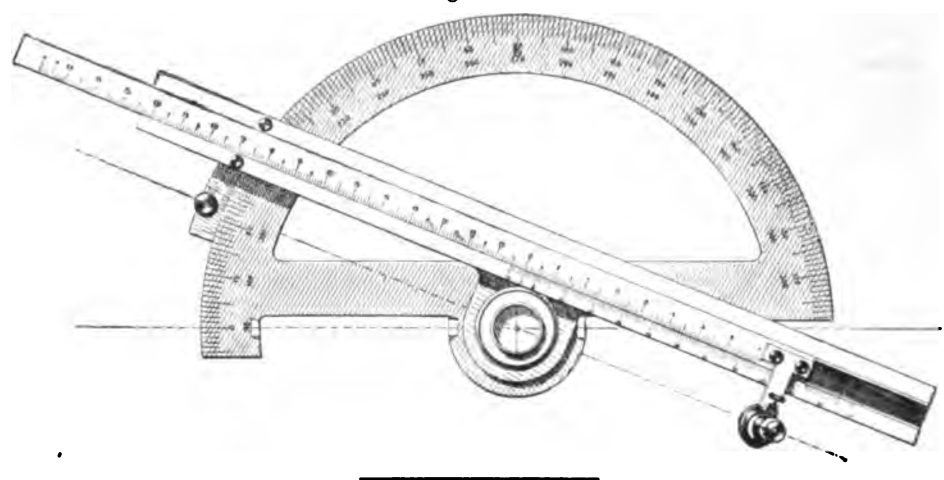


**Antwort.** Zur Winkelaufzeichnung dienen die bekannten Transporteure. Wir bringen die bildliche Darstellung eines für geodätische Zwecke konstruierten Transporteurs von F. W. Breithaupt und Sohn in Cassel (siehe Figur 135).

Eine Modifikation des Transporteurs ist der Distanztransporteur von Dr. O Decher, ausgeführt von der Firma Ertel und Sohn in München. Mit dem Transporteur ist bei dieser Modifikation auch ein Lineal verbunden, so dass man direkt die Polarkoordinaten eines Punktes auftragen kann (vergl. Figur 136).

Der Gebrauch eines Transporteurs zur Messung eines Winkels ist anschaulich in der Figur 18, Seite 29, dargestellt. Man bringt den einen Schenkel des Winkels mit der Nullrichtung des Transporteurs zur Deckung, so dass die Spitze des Winkels mit dem Mittelpunkt des Transporteurs sich deckt. Der andere Schenkel gibt sodann eine Ablesung am Transporteur, welche die Winkelgrösse liefert.


Figur 136.



## 2. Von der Aufnahme.

**Anmerkung 6.** Im nachstehenden behandeln wir die Aufnahme bloss dem Prinzipe nach. Die eigentliche Koordinatenaufnahme wird im II. Teile dieses Werkes ausführlich vorgetragen, sowohl vom theoretischen als auch vom praktischen Standpunkte aus.

**Frage 145.** Was versteht man unter der Aufnahme?

**Antwort.** Unter der Aufnahme versteht man alle Verrichtungen, durch welche gerade und krumme Linien, welche die Begrenzung der Objekte bilden, durch Mass, Zahl oder Bild dargestellt werden (vergl. Erkl. 88).

**Erkl. 88.** Die Aufnahme besteht in zwei Operationen, in der Absteckung, d. h. die Bezeichnung durch geeignete Hilfsmittel und in der eigentlichen Aufnahme, d. h. die Vermessung desselben mittels Messinstrumenten. Die Aufnahme geschieht teils durch unmittelbare, teils durch mittelbare Messungen und es sind daher zu ihr auch die zur Festlegung gehörigen geometrischen Konstruktionen und Rechnungen zu rechnen.

**Frage 146.** Welche Arten der Aufnahme hat man zu unterscheiden?

**Antwort.** Man hat je nach dem Genauigkeitsgrade zwei Arten der Aufnahme zu unterscheiden. Die genaue und die flüchtige Aufnahme.

**Frage 147.** Was versteht man unter einer flüchtigen Aufnahme?

**Antwort.** Unter einer flüchtigen Aufnahme versteht man eine solche, die unter Anwendung der allereinfachsten Hilfsmittel geschieht und bloss zur Orientierung dient.

Solche flüchtige Aufnahmen sind insbesondere bei der Erforschung noch unbekannter Länder von grosser Wichtigkeit. In der praktischen Messkunst werden sie jedoch selten verwendet. Vergl. Anleitung

**Erkl. 89.** Die flüchtigen Aufnahmen geschehen gewöhnlich durch das Abschreiten und mit Hilfe der Bussole, wobei die Längen nach Schritten gemessen werden. Dabei ist die Schrittlänge etwa gleich 80 cm zu nehmen, oder noch besser durch einige einfach anzustellende Versuche zu bestimmen. Die Genauigkeit ist etwa gleich 5 %.

zu wissenschaftl. Beobachtungen auf Reisen, herausgeg. von G. Neumeyer, Berlin 1888, p. 41—117, II. Aufl. (vergl. Erkl. 89).

**Frage 148.** Was versteht man unter einer genauen Aufnahme?

**Antwort.** Unter einer genauen Aufnahme wird jene verstanden, welche das aufzunehmende Objekt auf Grund genauer Messungen darstellt.

**Frage 149.** Welche Arten der Aufnahme unterscheidet man?

**Erkl. 90.** Wenn von Prinzip die Rede ist, so handelt es sich um die „Art und Weise" der Aufnahme. Die Ausführung realisiert diese „Art und Weise".

**Antwort.** Man unterscheidet dem Prinzipe nach (vergl. Erkl. 90):

1) die Seitenaufnahme,
2) die Koordinatenaufnahme,
3) die Winkelaufnahme,

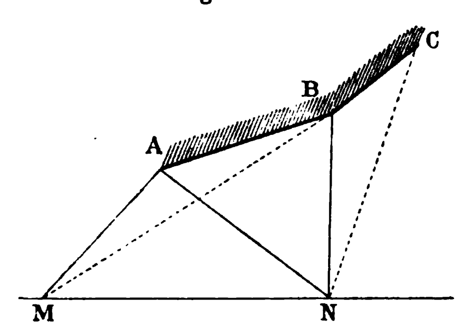
Was die Ausführung anbetrifft, so unterscheidet man:

1) die Messbandaufnahmen,
2) die Messtischaufnahmen,
3) die Theodolitaufnahmen.

## a) Die Seitenaufnahme.

**Frage 150.** Was versteht man unter der Seitenaufnahme?

Figur 137.




**Bemerkung.** Da mit der Seitenaufnahme zugleich die Messbandaufnahme erklärt ist, so beschäftigen wir uns mit der letzteren nicht mehr.

**Antwort.** Unter der Seitenaufnahme versteht man diejenige Aufnahme, bei welcher das aufzunehmende Objekt durch Dreieckssysteme festgelegt wird. Bei allen Dreiecken werden sämtliche Seiten gemessen.

Seien $ABC$ die aufzunehmenden Punkte, dann wählt man sich eine Orientierungsbasis $MN$ und misst die Seiten $MN$, $MA$, $AN$, $NB$, $AB$, $NC$, $BC$ und zur Versicherung auch $BM$.

Die Messbandaufnahme bietet vortreffliche Dienste insbesondere bei Aufnahmen von Höfen und als Kontrolle anderer Aufnahmen. Sie ist genauer als die Messtischaufnahme und fast so genau wie die Theodolitaufnahme, erfordert aber ziemlich viel Aufwand an Zeit (vergl. Figur 137).

## b) Die Koordinatenaufnahme.

**Frage 151.** Was versteht man unter der Koordinatenaufnahme?

**Antwort.** Unter der Koordinatenaufnahme versteht man diejenige Aufnahme, welche mit Hilfe eines 90 Grad angebenden Instrumentes

**Bemerkung.** Wir begnügen uns nebenstehend mit dem Prinzip der Koordinatenaufnahme, da dieselbe in jenem Kapitel dieses Werkes, welches über Katastralaufnahmen handelt, mit aller Ausführlichkeit dargelegt wird.

**Bemerkung.** Die Vermessungsanweisung VIII, § 81 bestimmt bezüglich der Ordinaten folgendes:

1) Rechtwinklige Abstände sind, wenn ihre Länge über 10 m hinausgeht, mit Hilfe eines zur Absteckung rechter Winkel dienenden Instruments zu bestimmen.

Wenn dieselben aber zur Bestimmung der Lage von Grenzsteinen, Parzellenecken, Gebäudeecken oder sonstigen scharf markierten Punkten gemessen werden, so muss dieses schon bei einer Länge von mehr als 5 m geschehen.

2) Beträgt die Länge der Ordinate mehr als 40 m, so ist die Richtigkeit derselben zugleich durch eine Hypotenusenmessung oder in sonst geeigneter Weise zu prüfen.

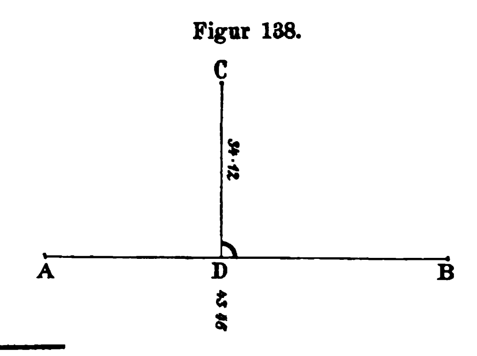
auf Grund des Prinzips rechtwinkliger Koordinaten gemacht wird.

Man verfährt hiebei wie folgt. Man wählt sich eine Basis ($AB$, vergl. Figur 140) und spannt längs derselben eine Schnur, so dass dieselbe die Basis deckt. Hierauf sucht man mit Hilfe des 90 Grad angebenden Instrumentes jenen Punkt ($D$) auf der Basis, der die Projektion des aufzunehmenden Punktes ($C$) bestimmt. Dann ist $AD \perp DC$.

Werden nun die Strecken $AD$ und $DC$ gemessen, so ist hiermit der Punkt $C$ festgestellt.

(In der Figur 138 ist $AD = 43 \cdot 46$ m, $CD = 34 \cdot 12$ m.)

Figur 138.




## Frage 152. Wie wird eine Koordinatenaufnahme zu Papier gebracht?

**Bemerkung.** Die Vermessungsanweisung VIII bestimmt (§ 89) bezüglich der Feldbücher folgendes:

1) Zu dem Feldbuch ist gutes und starkes weisses Papier in gewöhnlichem Aktenformat (33/21) zu verwenden, und es darf stets nur eine Seite des Blattes beschrieben werden.

2) Das Feldbuch ist in Tinte (Eisengallustinte, Anilin- und Alizarintinten sind untersagt, Anweisung X, § 22) und so deutlich zu führen, dass danach die Stückvermessungsrisse auch durch jeden andern Sachverständigen angefertigt werden können.

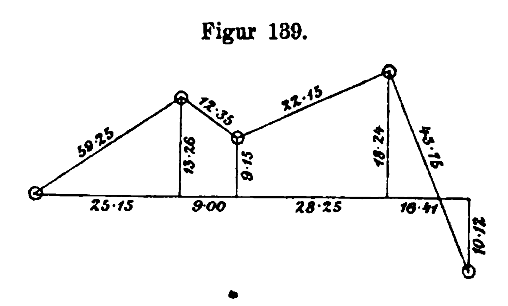
(Wenn die Führung des Feldbuchs in Tinte nach den Witterungsverhältnissen nicht möglich ist, so sind ausnahmsweise harte Bleistifte gestattet.)

3) Das Feldbuch ist zu heften und zu paginieren.

4) Die Führung loser Blätter neben dem Feldbuch ist nicht gestattet.

**Antwort.** Um eine Koordinatenaufnahme zu Papier zu bringen, macht man schon auf dem Feld einen sogenannten „**Handriss**“, indem man nach dem Augenmass ein Bild der fortschreitenden Messung anfertigt und die gemessenen Grössen in Zahlen jeder Strecke einschreibt (vergl. Figur 139).

Figur 139.



**Frage 153.** Welche Eigenschaften muss ein Handriss haben?

**Antwort.** Ein Handriss soll:

I. deutlich,

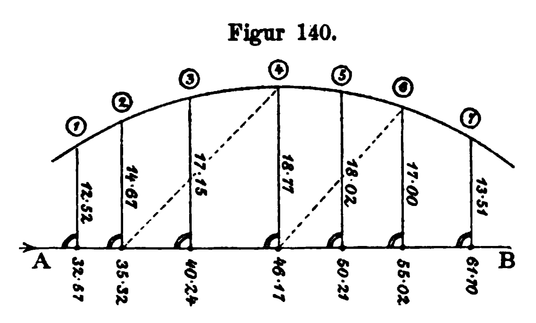
II. korrekt,

III. so abgefasst sein, dass er einem jeden andern Sachverständigen ohne weitere Aufklärungen verständlich wird.

---

**Frage 154.** Wie wird irgend eine krumme Linie durch Koordinaten aufgenommen?

Figur 140.




**Bemerkung.** Ueber die Schreibweise der Handrisse bestehen folgende Vorschriften (Anweisung VIII, §§ 89 und 90) für Preussen: Die Abscissenzahlen kommen an den Fusspunkt der Ordinate und zwar auf die Seite, auf welcher die Ordinate nicht liegt. Die Ordinatenzahlen stehen parallel der Ordinate am Ende.

In Württemberg schreibt man die Länge der Ordinate senkrecht zu ihr, die Abscissen wie in Preussen.

In Oesterreich (Instruktion vom Jahr 1887, § 37) sind die Masszahlen senkrecht gegen die Messungslinie und zwar so nahe als möglich zum betreffenden Messungspunkt zu schreiben.

Wurde ein Riss zweimal gemessen, so sind die Resultate untereinander zu schreiben und mit einer Klammer { zu verbinden. Die Masszahlen, welche die Längen einzelner Linien, beispielsweise der Gebäude, sowie Kopfteile der Parallelen betreffen, sind parallel zur gemessenen Linie zu schreiben.

**Antwort.** Um irgend eine krumme Linie aufzunehmen, bezieht man dieselbe auf irgend eine Basis $AB$. Zu diesem Zweck steckt man die Basis $AB$ ab, spannt längs ihrer Länge die Schnur. Hierauf wird die krumme Linie abgepflockt. Sodann stellt sich der Gehilfe mit der Backe der Reihe nach auf die Punkte und der Landmesser bestimmt mit einem Prisma oder Winkelfernrohr die Fusspunkte, die der zweite Gehilfe sofort bezeichnet und numeriert (vergl. Figur 142).

Hierauf erfolgt die Abmessung der abgepflockten Punkte, die im Handriss in geeigneter Weise vermerkt wird. Die Vermerkung soll so gemacht werden, dass sie jedem andern Landmesser ohne irgend welche Erklärungen sofort unzweifelhaft verständlich wird. Sind irgend welche Erklärungen nötig, so sollen sie sogleich bei der Messung eingetragen werden.

Man unterlasse es nie, Kontrollmessungen zu machen. Dieselben erfordern keinen grossen Zeitaufwand und können nachher bei der Konstatierung irgend eines Versehens sehr wertvoll werden.

Die Kontrolllinien sind als Strichlinien zu bezeichnen [vgl. Figur 140; Kontrolllinie (4) zum Fusspunkt (2), (6) zum Fusspunkt (4)].

Ueber Kontrollmessungen vgl. „Zeitschrift für Vermessungskunde", z. B. Jahrgang 1881, pag. 243—247, wo Th. Müller verschiedene Probemessungen mitteilt.

Man kann auch zur Probe die Entfernungen (1)(2), (2)(3) · · · messen, welche sich andererseits auch aus den Koordinaten ableiten lassen.

---

## c) Die Winkelaufnahme.

**Frage 155.** Was versteht man unter der Winkelaufnahme?

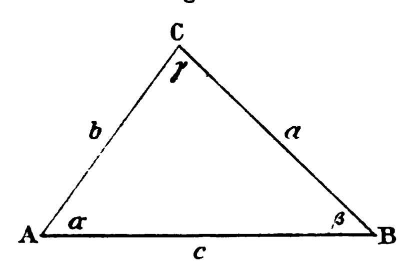
**Antwort.** Unter der Winkelaufnahme versteht man jene Aufnahme, bei welcher die aufzunehmenden Punkte auf Grund einer oder mehrerer Basisstrecken durch Winkelmes-

sungen festgelegt werden. Je nach der Bestimmungsart des Dreiecks wird unterschieden:

I. das Vorwärtsabschneiden,
II. das Rückwärtsabschneiden,
III. das Seitwärtsabschneiden.

**Frage 156.** Was versteht man unter dem Vorwärtsabschneiden?

Figur 141.




**Antwort.** Unter dem Vorwärtsabschneiden versteht man die Aufnahme eines Dreiecks aus einer Seite und den zwei anliegenden Winkeln. Soll ein Punkt ($c$, vgl. Fig. 141) durch das Vorwärtsabschneiden aufgenommen werden, so wird eine Basis ($AB$) gemessen; sodann stellt man sich in den beiden Endpunkten derselben auf und misst mit dem Theodolit die Winkel zwischen dem Punkt ($c$) und der Basis. Sei $c$ die Basis, $\alpha$ und $\beta$ die Winkel, so wird:

$$b = \frac{c \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$a = \frac{c \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

**Frage 157.** Was versteht man unter dem Rückwärtsabschneiden?

**Antwort.** Unter dem Rückwärtsabschneiden versteht man die Aufnahme eines Dreiecks aus einer Seite, einem anliegenden und einem gegenüberliegenden Winkel. Hier muss man beachten, die Basis grösser zu nehmen als die zu bestimmenden Dreiecksseiten, um der Zweideutigkeit bei der Dreiecksbestimmung zu entgehen. Sind (vergl. Figur 141) $c$, $\alpha$, $\gamma$ gegeben, so wird:

$$b = \frac{c}{\sin \gamma} \sin(\alpha + \gamma)$$

$$a = \frac{c}{\sin \gamma} \sin \alpha$$

**Frage 158.** Was versteht man unter Seitwärtsabschneiden?

**Antwort.** Unter Seitwärtsabschneiden versteht man die Aufnahme eines Dreiecks aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel. Sind $b$ und $c$ die gemessenen Seiten, sowie $\alpha$ der Winkel (vgl. Figur 142), so haben wir:

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cos \alpha$$

Besser aber rechnet man so. Es ist:

$$\text{I} \ldots \beta + \gamma = 180^0 - \alpha$$

$$\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{c}{b}$$

also (vergl. Erkl. 91):

$$\text{II} \ldots \operatorname{tg} \gamma = \frac{b \sin \alpha}{c - b \cos \alpha}$$

**Erkl. 91.** Es ist:

$$\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{\sin(180^0 - \alpha - \gamma)}{\sin \gamma} = \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\sin \gamma}$$

$$= \frac{\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma}{\sin \gamma}$$

$$= \sin \alpha \operatorname{ctg} \gamma + \cos \alpha = \frac{c}{b}$$

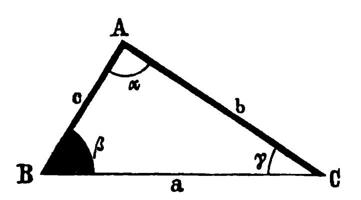
demnach:

$$\operatorname{ctg} \gamma = \frac{c - b \cos \alpha}{b \sin \alpha}$$

und da:

$$\frac{1}{\operatorname{ctg} \gamma} = \operatorname{tg} \gamma = \frac{b \sin \alpha}{c - b \cos \alpha}$$

Figur 142.




**Bemerkung.** Ueber den Einfluss der Fehler in den Winkeln und der Basis auf das Resultat vergleiche das Kapitel „Die Fehlerrechnung“.

Sodann ist:

$$\text{III} \ldots a = \frac{b}{\sin\beta}\sin\alpha = \frac{c}{\sin\gamma}\sin\alpha$$

Recht bequem sind auch die nachstehenden Formeln:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta-\gamma) = \frac{b-c}{b+c}\operatorname{tg}\alpha$$

$$\beta+\gamma = 180^0 - \alpha$$

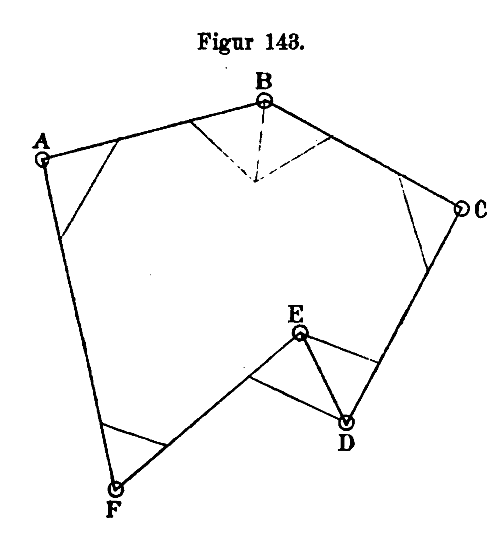
$$a = b\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = c\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

Alle drei Aufnahmen, wenn sie mit dem Theodolit gemacht werden, sind sehr genau und eignen sich besonders zur Aufnahme fernliegender Punkte.

## 3. Aufgaben über Aufnahmen.

**Aufgabe 35.** Es soll ein Polygon ohne Winkelinstrumente, bloss mit dem Messbande aufgenommen werden.

Figur 143.




**Auflösung.** Man messe alle Seiten und bestimme die Winkel wie in der Frage 141. Das Prinzip wird durch die Figur 145 veranschaulicht. Beim Punkt $A$ wurde das Dreieckprinzip angewendet, beim Punkt $B$ die Winkelteilung. Es kann aber geschehen, dass das Polygon innen unzugänglich ist. Dann kann man verfahren wie folgt (vergl. Fig. 143). Man wähle sich einen Punkt $a$, sodann bestimme man einen Punkt $b$, so dass $a$, $B$, $b$ in einer Geraden liegen, ferner einen Punkt $c$, so dass $b$, $C$, $c$ in einer Geraden liegen, und endlich den Punkt $d$, so dass $a$, $A$, $d$ in einer Geraden liegen. Werden hierauf die Strecken $aA$, $aB$, $AB$, $Bb$, $BC$, $bc$, $Cc$, $CD$, $cD$, $ED$, $EF$, $FD$, $Fd$, $AF$, $dA$ gemessen, so lässt sich das Polygon leicht berechnen und konstruieren. Rechnet man z. B. aus den Dreiecken $aAB$, $bBC$ die Winkel $\alpha$ und $\beta$ (vergl. Figur 146), so wird der Winkel bei $B$:

$$B = 180 - (\alpha+\beta) \text{ u. s. w.}$$

Die Rechnungsformel für $\alpha$ ist:

$$aB + aA + AB = 2S$$

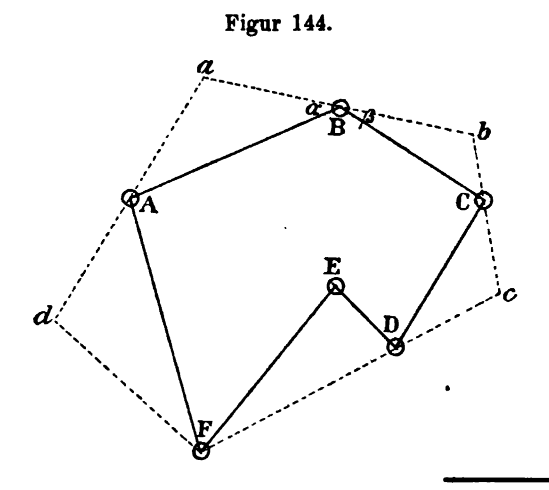
$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{(S-aB)(S-AB)}{S(S-aA)}}$$

Analog wird für $Bb + bC + BC = 2S'$:

$$\operatorname{tg}\beta = \sqrt{\frac{(S'-Bb)(S'-BC)}{S'(S'-bC)}}$$

Man wird aber solche Aufnahmen wohl nur aus Not machen, dort nämlich, wo kein Winkelinstrument zur Hand ist und man

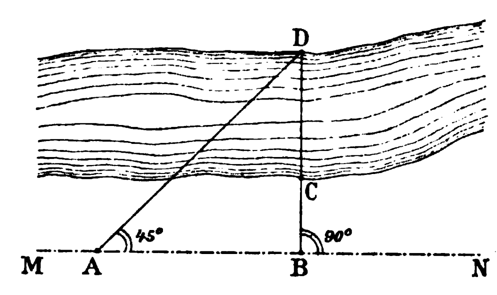
Figur 144.




über die nötige Zeit verfügt. Wir haben diese Art der Aufnahme nur der Vollständigkeit wegen angeführt.

**Aufgabe 36.** Es soll ein Fluss aufgenommen werden; ausser dem Messband besitzt man nur ein Winkelinstrument für 45° und 90° (vergl. Figur 145).

Figur 145.




**Auflösung.** Man ziehe sich eine Aufnahmsbasis $MN$. Um nun auf irgend einer Stelle $B$ die beiden Ordinaten $BC$ und $DC$ zu erhalten, messe man $BC$ direkt und bezeichne den Punkt $D$ jenseits des Ufers. Sodann gehe man mit dem Instrument für 45° auf $MN$ so lange, bis der Punkt $D$ zugleich mit $B$ in die Visur kommt. Dann ist $ADB$ ein rechtwinkliges und gleichschenkliges Dreieck, also:

$$BD = AB$$

Nun kann aber $AB$ direkt gemessen werden, also ist auch $BD$ bekannt. Dasselbe Verfahren kann an beliebigen Punkten wiederholt werden.

**Aufgabe 37.** Man soll irgend ein grösseres Objekt aufnehmen (vergleiche Figur 146).

**Bemerkung.** Es kann geschehen, dass sich Punkte vorfinden (z. B. $N$, $Q$, $P$ in der Figur 146), die sich auf diese Art nicht feststellen lassen.

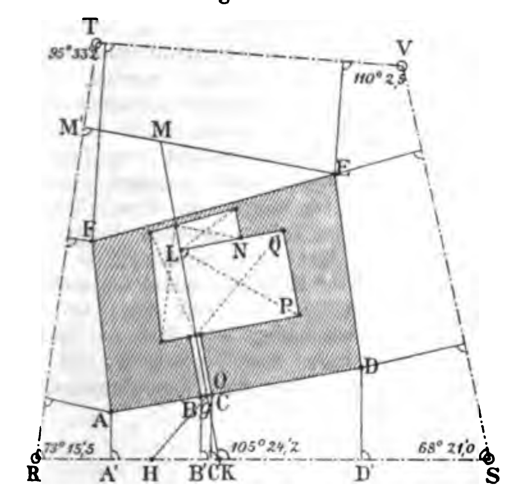
Dann kann man sich auf folgende Art aushelfen. Man steckt die Gerade ($KL$) ab, auf welche die Punkte bezogen werden können. Der Winkel, den diese Gerade mit der Polygonseite ausmacht ($GKS$), kann entweder mit einem Theodolit oder auch dadurch bestimmt werden, dass man sich ein Dreieck ($HGK$) absteckt, aus welchem dieser Winkel konstruktiv oder durch Rechnung ableitbar ist. In diesem Dreieck sind natürlich alle drei Seiten möglichst

**Auflösung.** Handelt es sich um die Aufnahme irgend eines grösseren Objektes, so wird dasselbe von einem Polygon umschlossen ($RSVT$, vergl. Figur 146). In diesem Polygon werden die Seiten mindestens zweimal und die Winkel auch zweimal gemessen. Dieses Polygon wird zu Haus oder auch im Feld in jenem Massstab auf Papier gebracht, in welchem die Aufnahme geschehen soll.

Alsdann spannt man längs einer Seite, oder wenn dieselbe zu lang sein sollte, längs eines Teiles derselben die Schnur auf, so dass dieselbe die Polygonseite deckt. Mit einem Prisma von 90° werden nun die Projektionen ($A'$, $B'$, $C'$, $D'$) der aufzunehmenden Punkte ($A$, $B$, $C$, $D$) auf die Polygonseite ($RS$) aufgesucht und bezeichnet (in den Städten auf hartem Pflaster bedient man sich blauer

genau zu messen. Ist $KL$ länger als 30 m, so bestimme man den Winkel mit einem Theodolit. Mit Hilfe dieser Strecke wird der innere Raum in Dreiecke oder Vierecke zerlegt, in welchem alle Seiten und Diagonalen zu messen sind. Die Art und Weise ist unmittelbar aus der Figur 146 ersichtlich.

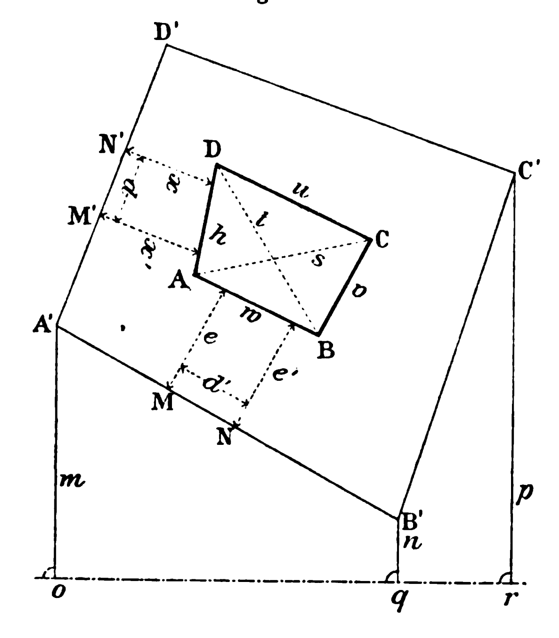
Figur 146.




Kreide hierzu, auf dem Feld nimmt man Holzpflöcke). Hierauf, nachdem eine genügende Anzahl versichert ist, schreitet man zur Abmessung der Abscissen und Ordinaten. Zur Versicherung werden auch die etwa gegebenen Grenzen (wie $AF$, $AB$, $CD$) gemessen.

Befindet sich im Baukomplex ein von aussen unzugänglicher Raum $ABCD$ (vgl. Fig. 147), so wird derselbe für sich aufgenommen, indem man die Seiten $uvwh$ und die Diagonalen $ts$ misst. Sodann werden die Entfernungen $ee'd'$, $ff'd$ gemessen und zwar durch die Lokalitäten des Gebäudes. Mittels herabgelassenem Lot werden auch die Längen $A'M$, $A'N$, $A'M'$, $A'N'$ gemessen. Der Schnittpunkt der so bestimmten Linien $AB$ und $AD$ bestimmt sodann den Punkt $A$. Ueberhaupt können in der Praxis die verschiedenartigsten Probleme vorkommen, deren Lösung man dem Scharfsinn der Geometer überlassen muss. Nur darauf wird aufmerksam gemacht, dass man in solchen Fällen möglichst viele Versicherungs- und Probemessungen machen soll.

Figur 147.



## 4. Die Messtischaufnahmen.

**Frage 159.** Was ist über die Messtischaufnahme überhaupt zu bemerken?

**Antwort.** Die Messtischaufnahme eignet sich besonders zur Aufnahme kleinerer Objekte, bei welchen die durch die Zeichnung gegebene Genauigkeit genügt. Die Messtischaufnahme hat bedeutende Nachteile, so dass sie nicht als strenge Vermessung betrachtet werden darf. Deswegen ist die Messtischaufnahme aus den Katastralvermessungen definitiv gesetzlich entfernt worden. Von den Nachteilen der Messtischaufnahme seien hervorgehoben: die Abhängigkeit der Messung von der Beschaffenheit des Papiers, die Unmöglichkeit einer genauen Definierung der Fehlergrenzen, die Unmöglichkeit der Verfertigung einer genauen Vergrösserung. Man darf auch nicht ausser acht lassen, dass der Messtisch selbst ein schwerfälliges Instrument ist. Nur dort, wo das Terrain so beschaffen ist, dass es direkte Längenmessungen nicht gestattet, ist die Messtisch- gegenüber der Theodolitaufnahme im Vorteil.

**Bemerkung.** Die Abhängigkeit von Papier kann mitunter zu bedeutender Verzerrung Anlass geben. Trägt man nämlich gleiche Längen einmal auf trockenes, darnach auf durch die Luftfeuchtigkeit nasses Papier, so fallen diese Längen nach einiger Zeit verschieden aus. Dieses ist aber bei der Arbeit unvermeidlich. Die Messtischaufnahme hat aber auch ihre Vorteile. Man hat nämlich immer die ganze Arbeit vor Augen und werden auch die etwa vorkommenden Fehler sofort bemerkbar, so dass eine Berichtigung noch während der Feldarbeit leicht möglich ist.

**Frage 160.** Welche Methoden unterscheidet man bei der Messtischaufnahme?

**Antwort.** Man unterscheidet dreierlei Arten oder Methoden der Messtischaufnahmen:

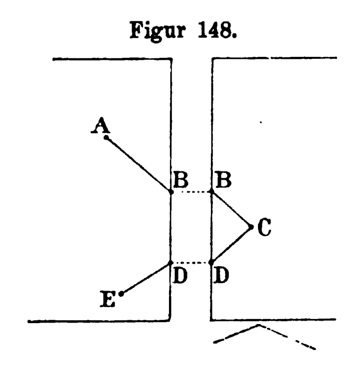
I. die Zentralaufnahme,
II. die Basisaufnahme,
III. die Umfangsaufnahme.

Wir setzen voraus, dass das aufzunehmende Objekt ein Vieleck ist, und sehen zunächst von dessen Orientierung ab.

**Frage 161.** Was heisst, ein Vieleck soll orientiert sein?

**Antwort.** Ein Vieleck heisst orientiert, wenn seine Seiten mit einer gegebenen Richtung auf der Zeichnung dieselben Winkel einschliessen wie in der Wirklichkeit. Die auf dem Papier gezeichnete Gerade, welche diese Richtung angibt, heisst die Orientierungsgerade. Gewöhnlich werden die Polygone nach der Nord-Süd-Richtung orientiert. Wird in Sektionen aufgenommen, so kann die Orientierung auch durch die den beiden Sektionsblättern angehörige Punkte und Geraden geschehen (vgl. Figur 148; $AB \parallel BC$, $ED$ $DC$, $B$, $D$ gemeinschaftliche Punkte.

Figur 148.




Zur Orientierung nach der Nord-Süd-Richtung wird in der Regel die Bussole verwendet. Nur muss man darauf acht geben, ob bei der Orientierung kein Eisen in der Nähe ist. Man übergebe deswegen seine

eiserne Gerätschaften, Messer etc. dem Gehilfen; auch dürfen Messbänder und Messketten, die oft magnetisch sind, nicht in der Nähe sein. Den Betrag der magnetischen Abweichung für die Messungstage erbitte man sich von einer meteorologischen Zentralanstalt; auch sehe man zu, ob sich der Stand der Magnetnadel nicht während der Messung geändert hat.

Es empfiehlt sich auch in dem Falle, wo eine Orientierung nicht verlangt wird, wenigstens genähert die Aufnahme zu orientieren.

**Bemerkung.** Man möge scharf unterscheiden die Orientierung nach gegebenen Strecken und Punkten und die Orientierung nach der Nord-Südrichtung. In der Regel sollte eine jede Messtischaufnahme nach der Nord-Südrichtung orientiert sein.

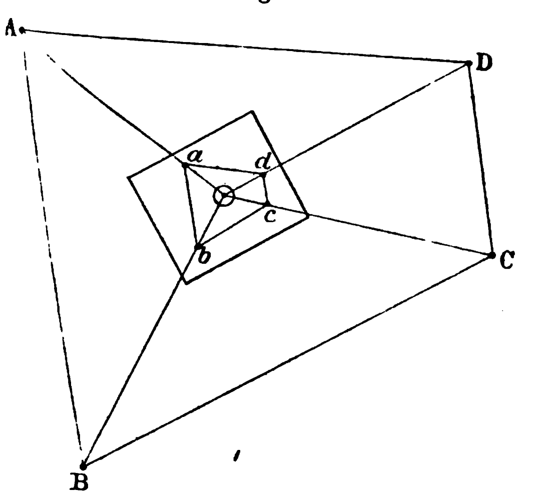
---

**Frage 162.** Wie hat man bei der Zentralaufnahme zu verfahren?

**Antwort.** Um ein Vieleck (etwa $ABCD$, vergl. Figur 149) zentral aufzunehmen, stelle man sich mit dem Messtisch auf einen Punkt ($O$), von welchem alle Eckpunkte des Vielecks sichtbar sind. Es ist vollkommen gleichgültig, ob der Punkt ausserhalb, oder innerhalb des Polygons gelegen ist.

Man stellt den Tisch horizontal, sucht den zum Punkte $O$ gehörigen zentrischen Punkt $o$ auf dem Papier und visiert nach allen Eckpunkten und zieht die Visierstrahlen. Werden hierauf die Strecken $OA$, $OB$, $OC$, $OD$ gemessen und im verlangten Massstab auf die gezogenen Visierstrahlen aufgetragen, so erhält man $abcd$ und damit das Bild des Vieleckes. Zur Prüfung kann man auch die Seiten messen. Der einzige Vorteil dieser Aufnahme ist, dass man bei der Tischstellung einen beliebigen Standpunkt wählen kann, und so des lästigen Zentrierens über einen gegebenen Punkt überhoben ist. Es genügt aber, ein einziges Dreieck zu messen.

Figur 149.



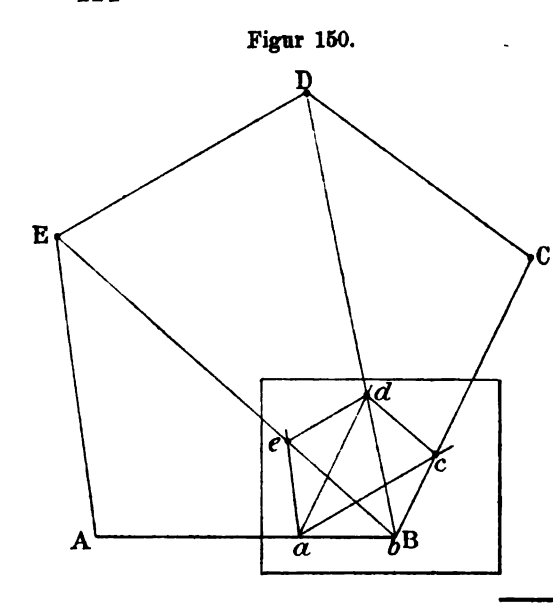

**Bemerkung.** Die Zentralaufnahme mit dem Messtisch wird sehr selten angewendet, weil sie **unpraktisch** ist. Kann man alle Strecken messen, so ist leicht das Vieleck zu konstruieren und man braucht den Messtisch gar nicht. Misst man sie aber nicht, so hat man keine genügende Kontrolle.

---

**Frage 163.** Wie hat man bei der **Basisaufnahme** zu verfahren?

**Antwort.** Bei der Basisaufnahme wählt man sich zunächst eine Basis ($AB$, vergl. Figur 150). Diese wird genau gemessen und im gewünschten Massstab auf das Papier aufgetragen ($ab$). Hierauf stellt man sich in einem Basispunkte auf, zentriert $b$ über $B$ und orientiert die Gerade $ab$ nach der Geraden $AB$.

Figur 150.

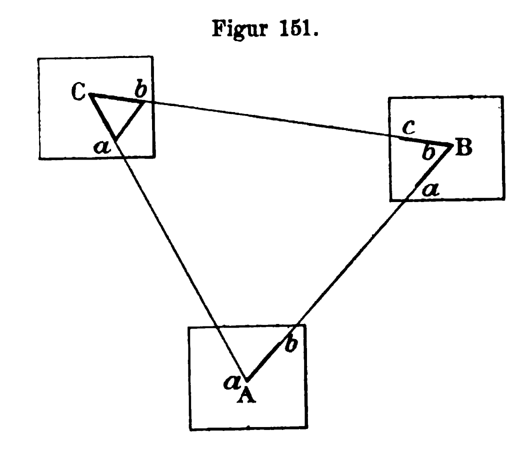



Hierauf visiert man alle Punkte an, die dargestellt werden sollen ($C$, $D$, $E$, $A$) und zieht die Visierstrahlen. Dasselbe wird am anderen Punkte der Basis wiederholt, die Schnittpunkte der zugehörigen Strahlen geben dann die verlangten Punkte ($c$, $d$, $e$). Zur Kontrolle kann ausser der Basis noch irgend eine Seite vermessen werden.

Unter den Messtischaufnahmen ist die Basisaufnahme die bequemste, verlangt aber, dass man nach allen Punkten freie Visuren hat, was nicht immer der Fall ist, ausserdem bleibt auch die Kontrolle der Zeichnung immer mangelhaft.

**Frage 164.** Wie hat man bei der Umfangsaufnahme zu verfahren?

Figur 151.




**Antwort.** Bei der Umfangsaufnahme müssen alle Strecken des aufzunehmenden Vieleckes gemessen werden. Man stelle sich hierauf über $A$, visiere von einem angenommenen Punkte $a$ (vergl. Figur 153) den Punkt $B$ und trage die gemessene Linie $AB$ im gewünschten Massstab auf ($ab$). Hierauf begibt man sich mit dem Messtisch nach $B$, orientiert $ab$ in die Richtung $AB$, visiert $C$ an, zieht den Visierstrahl und trägt auf diesem die gemessene Länge $BC$ im gewünschten Massstab auf ($bc$). Endlich begibt man sich nach $C$, zentriert $c$ über $C$, orientiert $bc$ in die Richtung $BC$, zieht den Visierstrahl und trägt $AC$ im gewünschten Massstab auf ($ca$).

Fällt dieser letzte Punkt mit dem Ausgangspunkt nicht zusammen, so entsteht ein sogenannter Schlussfehler.

Uebersteigt die Entfernung des Ausgangspunktes von dem Endpunkte der Messung 1 : 1000 des Umfanges (bei höchst ungünstigem Terrain 1 : 500), so muss die Messung wiederholt werden.

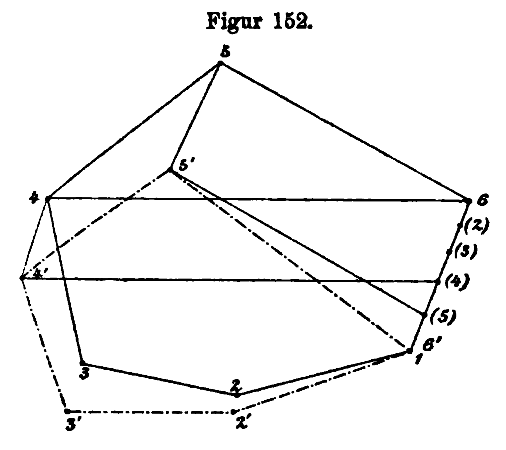
Ist der Schlussfehler kleiner als die soeben angeführte Grenze, dann wird das Polygon konstruktiv zum Schluss gebracht.

**Frage 165.** Wie wird ein Polygon „zum Schluss gebracht“?

**Antwort.** Soll ein Polygon zum Schluss gebracht werden, so kann dieses auf folgende Art bewerkstelligt werden:

Angenommen (vergl. Figur 152), wir sind vom Punkt (1) ausgegangen und bei der Auf-

Figur 152.




**Erkl. 92.** Es ist (vergl. Figur 154) bei der ersten Hypothese:

$$6(2) = (2)(3) = (3)(4) = (4)(5) = (5)1$$

bei der zweiten:

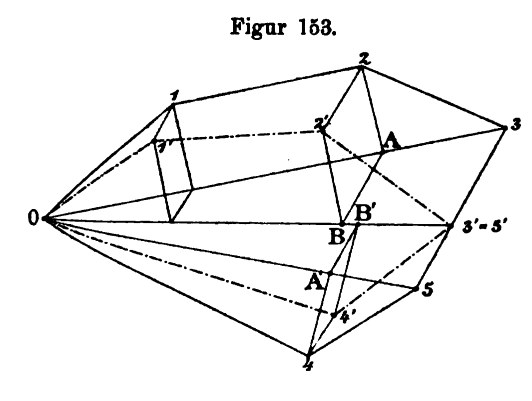
$$6(2):(2)(3):(3)(4):(4)(5):(5)1 = 12 : 23 : 34 : 45 : 56$$

ferner:

$$56 \parallel (5)5' \;,\; 55' \parallel 6(5)$$
$$46 \parallel (4)4' \;,\; 44' \parallel 6(4)$$

etc.

Figur 153.




nahme bis zum Punkt (6) gekommen. Dieser soll mit (1) zusammenfallen, was aber nicht stattfindet. Der Schlussfehler wird der Grösse und Richtung nach durch die Strecke (16) dargestellt.

Jetzt entsteht die Frage, in welcher Art der Fehler (16) auf die einzelnen Punkte verteilt werden soll. Hier gibt es zwei oft angewandte Hypothesen. Entweder verteilt man den Fehler gleichmässig oder im Verhältnis der Längen der Seiten. Soll nun das Polygon zum Abschluss gebracht werden, so teile man die Länge (16) von 6 aus gegen 1 in so viele Teile, als Seiten vorhanden sind. Diese Teile werden entweder gleich oder den einzelnen Seiten proportional gemacht. Um nun zu einem Punkt (etwa 4) den entsprechenden (4') zu finden, verbindet man diesen Punkt mit dem Punkte (6), zieht durch den ihm entprechenden Punkt ((4)) des Schlussfehlers eine zu dieser verbindenden Parallele und endlich durch den Punkt (4) selbst eine Parallele zum Schlussfehler (44'). Der Schnittpunkt gibt den gesuchten Punkt (vergl. Erkl. 92).

Sehr oft wird auch folgende Ausgleichung angewendet (vergl. Figur 153): Sind 3 und 5 die Schlusspunkte, die zusammenfallen sollen, und wird angenommen, dass man von 0 ausgegangen ist in zwei Richtungen, so verbindet man die Schlusspunkte 3, 5 und teilt die Verbindende genähert im Verhältnis der Längen durch den Punkt $3' = 5'$. Sodann verbindet man 0 mit 3, $3' = 5'$ und 5.

Um zu einem Punkte, etwa 2, den entsprechenden 2' zu erhalten, fälle man von 2 auf 0, 3 eine Senkrechte $2A$, ziehe:

$$AB \parallel 3,3'$$
$$22' \parallel AB$$

und

$$B2' \parallel 2A$$

so ist 2' der verlangte Punkt. Man sieht hier ohne weiteres, dass hier die Fehler im Verhältnis der Projektion des Linienzuges vom Ausgangspunkte verteilt werden.

Es verhält sich nämlich die Projektion auf 03 von:

$$03:02:01 = 3,3':2,2':1,1'$$

Dieses Verfahren ist minder genau, als das vorhin angezeigte.

---

**Frage 166.** Was hat man zu thun, bevor man die Aufnahme im Falle grosser Nichtübereinstimmung wiederholt?

**Antwort.** Es wird sich immer empfehlen, nachzusehen, ob nicht etwa eine einzige Länge oder ein einziger Winkel fehlerhaft aufgenommen wurde. Ist der Schlussfehler

sehr gross, dann wird man wohl immer annehmen können, vorausgesetzt, dass man gewissenhaft arbeitet, dass dieses eine oder andere stattgefunden hat. Misst man z. B. die Seiten mit einem 20 Meter-Messband, so kann es geschehen, dass man eine Lage, d. i. 20 m vergisst.

---

**Frage 167.** Ein Polygonwinkel wurde fehlerhaft aufgenommen, wie wird derselbe auf der Aufnahme gefunden?

Figur 154.

**Antwort.** Um zu sehen, wie ein einziger fehlerhaft gemessener Winkel die Aufnahme entstellt, nehme man an (vergl. Figur 154), man sei bei der Messung vom Punkte (1) ausgegangen, habe die Winkel bei 2 und 4 richtig, jenen bei 3 aber um den Betrag:

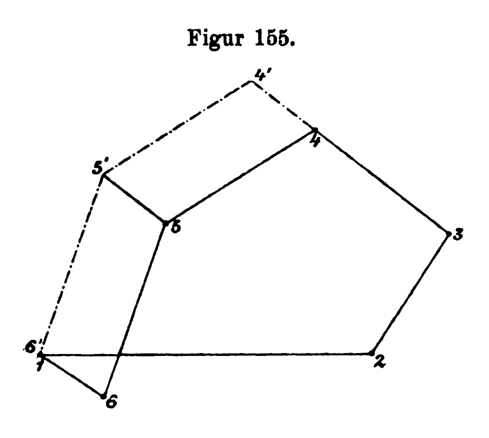
$$\sphericalangle \text{ (135)}$$

falsch aufgenommen. Dann erscheint das Polygon gleichsam längs der Diagonale 13 gespalten und die Stücke 123, 345 um den fehlerhaften Betrag um den Punkt 3 auseinander gedreht. Verbindet man daher die Schlusspunkte 1 und 5 miteinander und errichtet auf der Verbindungsgeraden im Halbierungspunkte das Lot, so muss dasselbe sehr nahe denjenigen Eckpunkt treffen, dessen Winkel fehlerhaft war.

---

**Frage 168.** Eine Polygonseite wurde fehlerhaft gemessen, wie wird dieselbe auf der Aufnahme gefunden?

Figur 155.




**Antwort.** Wurde nur eine Seite fehlerhaft gemessen, etwa 34 (vergl. Figur 155), dann erhält man statt des Zuges 4'5' 6, den Zug 4 5 6 und den Schlussfehler 16. Es ist leicht einzusehen, dass:

$$44' \parallel 55' \parallel 66'$$

sein muss. Der Schlussfehler ist also der fehlerhaften Seite parallel und dem Fehlbetrag gleich.

Indessen muss bezüglich der beiden letzten Auseinandersetzungen bemerkt werden, dass man sie nur mit Vorsicht gebrauchen darf. Man muss sich immer an Ort und Stelle überzeugen, ob wirklich der Winkel eventuell die Seite falsch aufgenommen wurde. Schliesst ein Polygon, so kann es dennoch fehlerhaft sein. Man arbeite mit dem Messtisch immer gewissenhaft und vorsichtig, um sich vor der äusserst mühsamen Wiederholung der Aufnahme zu schützen. Oft empfiehlt es sich, die Kontrollaufnahme allein mit dem Messband zu machen.

# V. Flächenberechnung, Flächenteilung und Flächenregulierung.

## 1. Ueber Flächenberechnung.

**Frage 169.** Wie wird die Flächenberechnung bewerkstelligt?

**Antwort.** Die Flächenberechnung wird je nach Umständen entweder durch Rechnung oder mit Hilfe eines Planimeters bewerkstelligt.

Die Berechnung mit Planimeter ist nur dann vorzunehmen, wenn zu unregelmässige Figuren (z. B. Erdprofile, Flussbetten) vorliegen und man nur auf die Zeichnung angewiesen ist. Die Methode der Flächenberechnung mit dem Planimeter gehört zu jenen, die man, so oft es angeht, in der Praxis vermeiden muss. Schon deswegen, weil die Fläche zu sehr von der augenblicklichen Beschaffenheit des Papiers abhängt.

**Bemerkung.** Das Planimeter wird aber mit Vorteil zur Kontrolle grober Fehler benützt und da leistet es unersetzliche Dienste.

---

**Frage 170.** Welche gesetzliche Bestimmungen gelten für die Flächenberechnung?

**Antwort.** Nach der Anw. VIII, § 115 soll eine jede Parzelle für sich zweimal unabhängig berechnet werden.

Sodann sollen mehrere Parzellen zu kleineren Gruppen vereinigt und als solche berechnet werden.

Die Gruppen dürfen nicht mehr als etwa 50 Parzellen umfassen und bei einem Massstab von:

$$\frac{k}{1000}$$

nicht mehr als 8 k Hektare umfassen.

Der Unterschied zwischen der Einzeln- und der Gruppenberechnung darf höchstens in Aren:

$$\triangle F = 0{,}01 \sqrt{60 F + 0{,}02 F^2}$$

betragen, wenn $F$ die Fläche in Aren gegeben ist. In Oesterreich ist die Fehlergrenze durch:

$$\triangle F' = 0{\cdot}001 F + 0{\cdot}50 \sqrt{F}$$

wobei $F$ in Metern gegeben ist.

Folgende kleine Tafel gibt den Vergleich dieser Formel:

**Bemerkung.** In Oesterreich gelten (nach Instruktion zur Ausführung der trigonometrischen Vermessungen 1887, § 49 und folgende) dieselben Bestimmungen. Die Abweichungen der Ergebnisse der Einzelnberechnung von jenen der Gruppenberechnung dürfen bei einem Massverhältnisse:

1 : 2500

bei durchschnittlicher Grösse einer Parallelė in der Gruppe gleich:

1) 1 ha und darüber,
2) 0,5—1,0 ha,
3) unter 0,5 ha

die Fehlergrenze:

$0{,}8 \triangle F'$, $0{,}9 \triangle F'$, $1{,}0 \triangle F'$

nicht überschreiten, wobei sich $\triangle F'$ nach der im Text stehenden österreichischen Formel berechnet.

| $F$-Fläche in Aren | $\triangle F$ in m² | $\triangle F'$ in m² | $F$-Fläche in Hektaren | $\triangle F$ in a | $\triangle F'$ in a |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,5 | 6 | 4 | 2 | 1,13 | 0,91 |
| 1,0 | 8 | 5 | 5 | 1,87 | 1,62 |
| 2,0 | 11 | 7 | 10 | 2,83 | 2,58 |
| 3,0 | 14 | 9 | 20 | 4,47 | 4,24 |
| 4,0 | 16 | 10 | 40 | 7,48 | 7,16 |
| 10,0 | 25 | 17 | 60 | 10,40 | 9,87 |
| 20,0 | 35 | 24 | 80 | 13,30 | 12,47 |
| 50,0 | 56 | 40 | 100 | 16,15 | 15,00 |
| 100,0 | 79 | 60 | 200 | 30,03 | 27,07 |

**Frage 171.** Was ist über die Flächenberechnung gezeichneter Polygone zu merken?

**Antwort.** Bezüglich der Flächenberechnung gezeichneter Polygone merke man sich Folgendes. Man teilt das Polygon in Dreiecke und fällt in jedem die Höhe. Der Flächeninhalt wird dann nach der Formel:

$$F = \frac{1}{2} \text{Basis} \times \text{Höhe}$$

berechnet. Da die Dreieckszerlegung in verschiedener Weise möglich ist, so kann man den Flächeninhalt mehrmals bestimmen. Das Mittel aus solchen Bestimmungen gibt ein genaueres Resultat.

Die Längen werden am Lineal abgelesen, ohne die Strecken mit Bleistift auszuziehen.

**Bemerkung.** In manchen Lehrbüchern der Geodäsie wird angeraten, zuerst das Polygon konstruktiv in ein Dreieck zu verwandeln. Hier muss vor solchen Schulexperimenten ernstlich gewarnt werden! Kein denkender Mensch wird je so etwas thun.

---

**Frage 172.** Wie wird der Flächeninhalt einer unregelmässigen Figur bestimmt?

**Antwort.** Der Inhalt einer unregelmässigen Figur wird zumeist durch mechanische Quadraturen bestimmt (vergl. Erkl. 93).

Man zieht zu diesem Zweck (vgl. Fig. 156) eine entsprechende Zahl zur $Y$-Achse paralleler Linien in gleichen Intervallen. [In der Figur 156 erscheint das Intervall $o$ bis $a$ in $n$ Teile geteilt und zwar:

$$\begin{array}{ll} x_0 = o & y_0 = q_0 \\ x_1 = \frac{a}{n} & y_1 = q_1 \\ x_2 = \frac{2a}{n} & y_2 = q_2 \\ \cdots & \cdots \\ x_n = a & y_n = q_n \end{array}$$

wobei allgemein:

$$y_r = q_r = f(x_r) = f\left(r\frac{a}{n}\right)$$

wenn

$$y = f(x)$$

die begrenzende Kurve darstellt.]

Betrachtet man die Teilfiguren als Trapeze, so wird:

$$AFED = \frac{1}{2}(q_0 + q_1)\frac{a}{n}$$

denn $AFDE$ ist von einem Trapez wenig verschieden. Analog wird das nächste Trapez

$$= \frac{1}{2}(q_1 + q_2)\frac{a}{n}$$

und so fort, bis man zum letzten kommt, welches

$$= \frac{1}{2}(q_{n-1} + q_n)\frac{a}{n}$$

Bildet man nun die Summe, so folgt (vergl. Erkl. 94):

$$J = \frac{a}{2n}(q_0 + q_n) + \frac{a}{n}(q_1 + q_2 + \cdots q_{n-1})$$

Diese Formel dürfte allen praktischen Verwendungen am besten entsprechen.

Soll eine geschlossene Figur in dieser Weise aufgenommen werden, so umschliesst man sie mit einem geeigneten Polygon

**Erkl. 93.** Wie aus der Integralrechnung bekannt, wird der Inhalt einer Figur im allgemeinen durch ein Integral ausgedrückt (vergl. Kleyers Lehrbuch der Integralrechnung). Sei $ABCD$ die Fläche, auf rechtwinklige Koordinaten bezogen, dann wird das Integral:

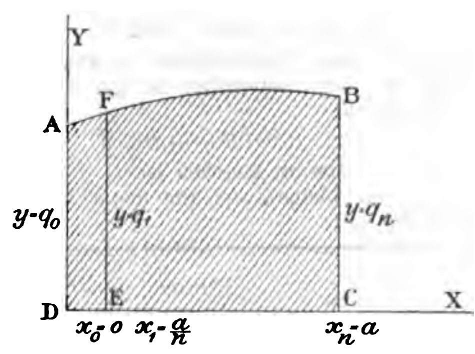
$$\int_{x=o}^{x=a} y\,dx$$

den Flächeninhalt dieser Fläche darstellen, wobei

$$y = f(x)$$

die Gleichung der Kurve $AB$ darstellt. Wird dieses Integral nicht direkt ausgewertet, sondern nur genähert bestimmt, so spricht man von einer mechanischen Quadratur.

Figur 156.




**Erkl. 94.** Es ist der Inhalt aller Trapeze

$$= \frac{a}{2n}[(q_0 + q_1) + (q_1 + q_2) + (q_2 + q_3) + \cdots (q_{n-1} + q_n)]$$

also:

$$= \frac{a}{2n}(q_0 + 2q_1 + 2q_2 + \cdots 2q_{n-1} + q_n)$$

**Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.**

Der **ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert, um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft.

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstebenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

---

 Das **vollständige**

## Inhaltsverzeichnis

### der bis jetzt erschienenen Hefte

kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

---

**Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.**

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

1288. Heft. | Preis des Heftes 25 Pf. | Vermessungskunde (Geodäsie). Erster Teil. Forts. v. Heft 1287. — Seite 129—144 Mit 20 Figuren.







Vollständig gelöste

# Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten
erläutert durch
**viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,**
aus allen Zweigen
der **Rechenkunst,** der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus **allen Zweigen** der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie;** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's;** der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar-** u. **Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
**zum einzig richtigen und erfolgreichen**
**Studium** zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

**Dr. Adolph Kleyer,**
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in **Frankfurt a. M.**
unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

# Vermessungskunde

## (Geodäsie).

**Erster Teil.**

Nach **System Kleyer** bearbeitet von **Dr. W. Láska.**

Fortsetzung von Heft 1287. — Seite 129—144. Mit 20 Figuren.

**Inhalt:**

Ueber Flächenberechnung. — Aufgaben über Flächenberechnung. — Das Planimeter. — Ueber Flächenteilung.

**Stuttgart 1894.**
Verlag von Julius Maier.

**Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.**

# PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 **Heften zu dem billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie,** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues,** des **konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form,** mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch **alle Teile** der **reinen und angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles der mathematischen** Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht **vergessenen** mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige Kraft** verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

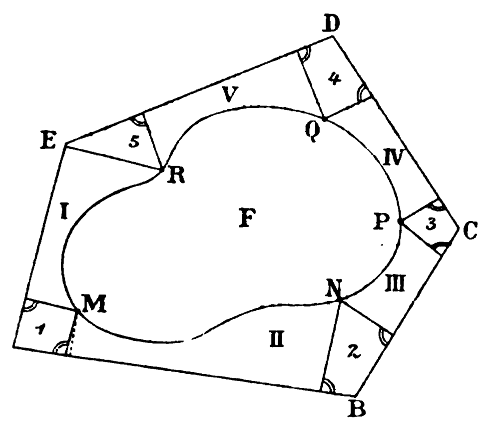
Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und **praktische** Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit **Angabe der Namen** verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, **nimmt der Verfasser, Dr. Kleyer,** Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird **deren Erledigung** thunlichst berücksichtigt.

**Stuttgart.** **Die Verlagshandlung.**

das ist

$$= \frac{a}{2n}(q_0 + q_n) + \frac{a}{n}(q_1 + q_2 \cdots q_{n-1})$$

Figur 157.



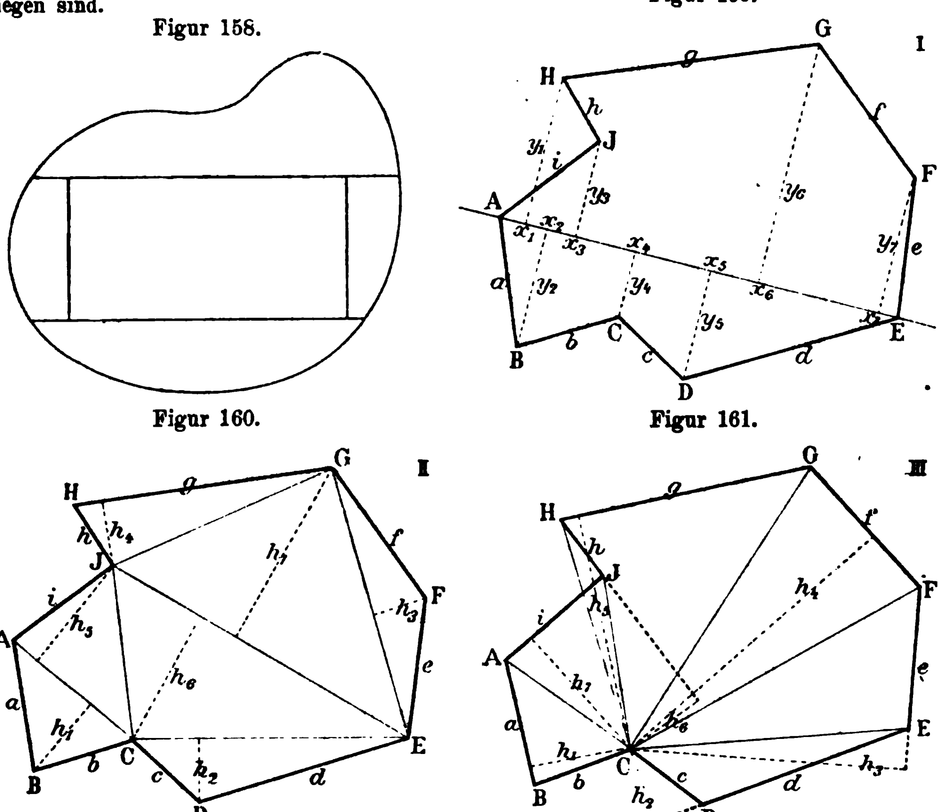

**Erkl. 95.** Diese Figuren sind entweder rechtwinklige Dreiecke wie 5 in der Figur 157, oder es sind Vierecke mit zwei rechten Winkeln, die leicht in zwei rechtwinklige Dreiecke zu zerlegen sind.

($A, B, C, D, E$ in der Figur 157); **sodann werden von geeigneten Punkten ($P, Q, R, M, N$) Senkrechte auf die Polygonseiten gefällt.**

Man berechnet zunächst aus gemessenen Stücken den Inhalt $J$ des ganzen Polygons $A, B, C, D, E$, sodann den Inhalt der Figuren 1, 2, 3, 4, 5 (vergl. Erkl. 95) und endlich durch mechanische Quadratur den Inhalt der Figuren I, II, III, IV und V. Sodann ist der Inhalt der verlangten Fläche:

$$T = J - (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$$
$$- (\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{IV} + \mathrm{V})$$

Sollte die Figur nicht von aussen zugänglich sein, so wird sie wie in der Figur 158 angegeben berechnet. Ueberhaupt muss hiebei auf die jeweilige Beschaffenheit der zu berechnenden Figuren Rücksicht genommen werden. Ist die Figur ein geradliniges Vieleck, so kann die Berechnung entweder durch Koordinaten (vergl. Figur 159) oder durch Zerlegung in Dreiecke bewerkstelligt werden (vergl. Figur 160 und 161 und Bemerkung in Frage 171). Die Ausführung ist Sache der Planimetrie.




Figur 158. Figur 159. Figur 160. Figur 161.

**Frage 173.** Wie hat man zu verfahren, wenn es sich bloss um ungefähre Angaben von Flächen handelt?

**Bemerkung.** Man bedient sich zu diesem Zweck auch in Millimeter geteilter Glastafeln, die aber, wenn sie genau sein sollen, ziemlich teuer sind.

**Bemerkung.** Ueber Flächenberechnung der Vielecke siehe Sachs, Lehrbuch der Planimetrie, II. Teil, Seite 21, 100 und folgende, sowie Kleyers Lehrbuch der Trigonometrie.

**Antwort.** Handelt es sich bloss um ungefähre Angaben von Flächen, so dürfte es am besten sein, die betreffende Fläche in einem bestimmten Massstab auf Millimeterpapier zu zeichnen und sodann einfach die Quadrate abzuzählen. Man zählt zunächst die ganzen Quadratdecimeter ab, sodann die übrig bleibenden Trapeze und Dreiecke, noch schneller kommt man mit einem Planimeter zum Ziele (vergl. Frage 174).

## 2. Aufgaben über Flächenberechnung.

**Aufgabe 38.** Es sind die verschiedenen Formeln für die Berechnung der Fläche $F$ eines Dreiecks aufzuzählen.

**Erkl. 96.** Wenn man beachtet, dass:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(180-\gamma) = \sin\gamma$$
$$\sin\alpha = \sin(180-\alpha) = \sin(\beta+\gamma)$$
$$= \sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma$$

so wird aus Gl. 3):

$$2F = \frac{a^2 \sin\gamma \sin\beta}{\sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma} .$$

Dividiert man nun Zähler und Nenner durch $\sin\gamma \cdot \sin\beta$, so folgt:

$$2F = \frac{a^2}{\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma} + \frac{\cos\beta}{\sin\beta}} = \frac{a^2}{\operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\beta}$$

**Erkl. 97.** Die Gleichung 7) folgt, wenn man die Gleichungen 6) miteinander multipliziert und das Produkt durch die Gleichung 2) dividiert. Die Gleichungen 6) ergeben sich leicht aus:

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}$$

also:

$$s^2(s-a)^2 \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = s(s-a)(s-b)(s-c)$$
$$= F^2$$

woraus:

$$F = s(s-a)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

folgt.

**Auflösung.** Seien $a$, $b$, $c$ die Seiten, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die ihnen gegenüberliegenden Winkel, so gelten die Formeln:

1) . . . $2F = ab\sin\gamma$

2) . . . $F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

wobei: $2s = a+b+c$

3) . . . $2F = \dfrac{a^2\sin(\alpha+\beta)\sin\beta}{\sin\alpha}$

4) . . . $2F = \dfrac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$

5) . . . $2F = \dfrac{a^2}{\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma}$

6) . . . $F = S(s-a)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha$

$F = S(s-b)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta$

$F = S(s-c)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma$

7) . . . $F = S\sqrt{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma}$

Die verschiedenen Formeln kann man auch zur Kontrolle benützen (vergl. Erkl. 96 und 97).

**Aufgabe 39.** Es ist der Flächeninhalt eines Dreiecks zu ermitteln, wenn die Eckpunkte durch Koordinaten gegeben sind.

**Auflösung.** Es seien:

$x_A$ $y_A$

$x_B$ $y_B$

$x_C$ $y_C$

**Erkl. 98.** Der Flächeninhalt eines Trapezes ist gleich der halben Summe der parallelen Seiten, multipliziert mit ihrem senkrechten Abstand von einander; also wird z. B. die Fläche:

$$OO'AB = \frac{1}{2}(OA + O'B) \times OO'$$

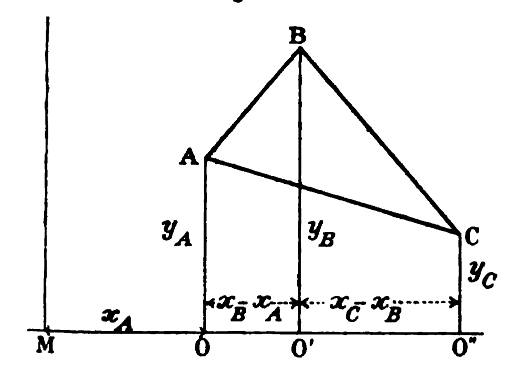
Nun ist:

$$OO' = MO' - MO = x_B - x_A$$
$$OA = y_A$$
$$O'B = y_B$$

also wird:

$$OO'AB = \frac{1}{2}(y_A + y_B)(x_B - x_A)$$

Figur 162.




die Koordinaten der Eckpunkte, so hat man (vergl. Figur 162):

$$\triangle ABC = OABO' + O'BCO'' - OACO''$$

oder (vergl. Erkl. 98):

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}(y_B + y_A)(x_B - x_A)$$
$$- \frac{1}{2}(y_B + y_C)(x_C - x_B)$$
$$+ \frac{1}{2}(y_A + y_C)(x_C - x_A)$$

Diese Formel ist vorteilhaft bei grossen $x$ Werten. Man kann sie jedoch auch schreiben wie folgt:

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}x_A(y_C - y_B)$$
$$+ \frac{1}{2}x_B(y_A - y_C)$$
$$+ \frac{1}{2}x_C(y_A - y_B)$$

welche wieder vorteilhaft ist für den Fall, dass $y$ gross werden sollte.

---

**Aufgabe 40.** Es sollen die wichtigsten Formeln zur Berechnung des allgemeinen Viereckes aufgezählt werden.

**Auflösung.** Es sei $ABCD$ das Viereck, die Winkel seien der Bezeichnung entsprechend $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, ferner die Seiten:

$$AB = a \quad AC = d_1$$
$$BC = b \quad BD = d_2$$
$$CD = c$$
$$DA = d$$

bezeichnet.

$$2F = [ab \sin\beta + bc \sin\gamma + ac \sin(\beta + \gamma)]$$
$$2F = d_1 d_2 \sin\varepsilon$$

Dabei ist $\varepsilon$ der Winkel, den die beiden Diagonalen miteinander einschliessen.

$$2F = \frac{1}{2}(b^2 + d^2 - a^2 - c^2)\operatorname{tg}\varepsilon$$

---

**Aufgabe 41.** Es soll ein Viereck rationell berechnet werden.

**Bemerkung.** Man unterlasse es nie, sobald es möglich ist, die Rechnungen zu kontrollieren. Zu diesem Zweck eignen sich besonders überschüssige Messungen, die oft auch die Wieder-

**Auflösung.** Wir haben drei Fälle zu unterscheiden:

I. Das Viereck ist noch nicht aufgenommen worden.

II. Das Viereck ist durch Koordinaten gegeben.

holung der Arbeit ersparen. Dieses gilt insbesondere bei ausgedehnteren Arbeiten.

Man muss z. B. im vorliegenden Fall nachsehen, ob die Summe aller gemessenen Winkel 360° gibt. Gesetzt, man fände:

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=360^0\pm\angle$$

wobei $\triangle$ ein kleiner Fehler ist, der innerhalb der Genauigkeitsgrenze der Messung liegt, so wird man die einzelnen Winkel um $\frac{\triangle}{4}$ entweder vermindern (bei $360^0+\triangle$) oder vermehren (bei $360^0-\triangle$). Der Grund davon wird in der Ausgleichsrechnung dargelegt. Um sich von der Richtigkeit der Seitenlängen zu überzeugen, kann man das Viereck graphisch konstruieren in etwas grösserem Massstab. Wir werden später noch andere Prüfungsmethoden kennen lernen.

Figur 163.



**Erkl. 99.** Sei $ABCD$ (vergl. Figur 164) das zu berechnende Viereck; man ziehe die Diagonale $DB$ und die Höhen:

$$CF\perp DB$$
$$AE\perp DB$$

dann ist die Fläche:

$$ABCD=ABD+BDC$$
$$=\frac{1}{2}BD(AE+CF)$$

III. Das Viereck ist durch Zeichnung gegeben.

I. Fall. Man misst auf dem Feld alle vier Seiten und alle Winkel. (Hat man kein Winkelinstrument bei sich, dann werden auch die beiden Diagonalen gemessen und wie im III. Fall gerechnet.) Dann ist:

$$2F=ab\sin\beta+cd\sin\delta$$

und zugleich als Kontrolle:

$$2F=bc\sin\gamma+da\sin\alpha$$

Stimmen diese Resultate überein, so wird das Mittel genommen.

II. Fall. Ist das Viereck durch Koordinaten gegeben, so denke man sich dasselbe analog der vorhergehenden Aufgabe durch die Diagonale in zwei Dreiecke zerlegt, die nach Aufgabe 39 berechnet werden können. Da zwei Diagonalen vorhanden sind, so sind wie früher zwei Zerlegungen möglich, die einander kontrollieren und deren halbe Summe das Resultat darstellt.

Oder man rechne nach der Formel (wobei

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{matrix}$$

die Koordinaten der Eckpunkte:

$$\begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix}$$

sind):

$$2F=(x_1-x_3)(y_2-y_4)-(x_2-x_4)(y_1-y_3)$$

Diese Formel hat eine einfache Bedeutung. Es ist offenbar (vergl. Figur 163):

$$2ABCD=abcd+a'b'c'd'$$

Denn es ist:

$$Ac'D=\frac{1}{2}Ac'Dd$$
$$Dc'C=\frac{1}{2}Dc'Cc$$
$$Ba'C=\frac{1}{2}Ba'Cb$$
$$AdB=\frac{1}{2}Ad'Ba$$

Addiert man diese Gleichungen, so folgt, wenn man noch beiderseits:

$$a'b'c'd'=a'b'c'd'$$

hinzufügt:

$$ABCD=\frac{1}{2}(abcd-a'b'c'd')+a'b'c'd'$$

woraus:

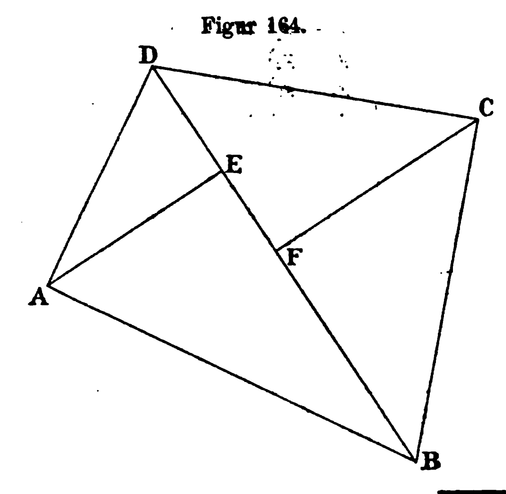
$$ABCD=\frac{1}{2}(abcd+a'b'c'd')$$

folgt.

Nun ist aber:

$$abcd=ab\cdot bc=(x_3-x_1)(y_4-y_2)$$
$$a'b'c'd'=a'b'\cdot b'c'=(x_4-x_2)(y_1-y_3)$$

Figur 164.




woraus sofort die obige Formel folgt, denn es ist:

$$(x_3 - x_1)(y_4 - y_2) = (x_1 - x_3)(y_2 - y_4)$$
$$(x_4 - x_2)(y_1 - y_3) = -(x_2 - x_4)(y_1 - y_3)$$

Diese Rechnungsformel lässt nichts zu wünschen übrig, weil sie die Differenzen der Koordinaten enthält und ziemlich einfach ist.

III. Fall. Hat man eine Zeichnung, so wird zunächst eine Diagonale gezogen und dann die beiden Dreieckhöhen. Die Berechnung erfolgt dann nach einfachen Dreiecksformeln (vergl. Erkl. 99 der Aufgabe 38 und Figur 164).

---

**Aufgabe 42.** Es soll der Inhalt eines Vielecks berechnet werden.

**Auflösung.** Ist das Vieleck durch Koordinaten gegeben, dann haben wir nach Analogie der Aufgabe 39 ganz allgemein, wenn

$$x_1\ x_2\ x_3 \cdots x_{n-1}\ x_n$$
$$y_1\ y_2\ y_3 \cdots y_{n-1}\ y_n$$

die Koordinaten der Eckpunkte sind, für den Flächeninhalt $F$ die nachstehenden Formeln.

Denkt man sich das Vieleck parallel zur Ordinatenachse in Trapeze zerlegt, so folgt:

$$\begin{aligned} 2F = & (x_2 - x_1)(y_2 + y_1) \\ & + (x_3 - x_2)(y_3 + y_2) \\ & + (x_4 - x_3)(y_4 + y_3) \\ & \cdots\cdots\cdots \\ & + (x_n - x_{n-1})(y_n + y_{n-1}) \\ & + (x_1 - x_n)(y_1 + y_n) \end{aligned}$$

Ordnet man, nachdem man ausmultipliziert hat, diesen Ausdruck nach $x$, so folgt:

$$\begin{aligned} +2F = & x_1(y_2 - y_n) \\ & + x_2(y_3 - y_1) \\ & + x_3(y_4 - y_2) \\ & \cdots\cdots \\ & + x_{n-1}(y_n - y_{n-2}) \\ & + x_n(y_1 - y_{n-1}) \end{aligned}$$

Ordnet man aber nach $y$, so folgt:

$$\begin{aligned} 2F = & y_1(x_2 - x_n) \\ & + y_2(x_3 - x_1) \\ & + y_3(x_4 - x_2) \\ & \cdots\cdots \\ & + y_{n-1}(x_n - x_{n-2}) \\ & + y_n(x_1 - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Man kann aber auch längs der Abscissenachse zerlegen und erhält:

**Bemerkung.** Wir empfehlen es dem Lernenden, sich diese Formeln an einem einfachen Beispiel, etwa des Dreiecks, zu veranschaulichen. Dann wird:

$$\begin{aligned} 2F = & (x_2 - x_1)(y_2 + y_1) + (x_3 - y_2)(y_3 + y_2) \\ = & x_2y_2 - x_1y_2 + y_1x_2 - x_1y_1 \\ & + x_3y_3 - x_2y_3 + y_2x_3 - x_2y_2 \\ = & x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) \\ = & y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(y_1 - x_2) \\ = & (y_2 - y_1)(x_1 + x_2) + (y_3 - y_2)(x_3 + x_2) \end{aligned}$$

**Bemerkung.** Man vergleiche auch Sachs, Lehrbuch der Planimetrie, V. Teil, Seite 100 und folgende.

$$+2F = (y_2 - y_1)(x_1 + x_2)$$
$$+ (y_3 - y_2)(x_2 + x_3)$$
$$+ (y_4 - y_3)(x_3 + x_4)$$
$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$+ (y_n - y_{n-1})(x_{n-1} + x_n)$$
$$+ (y_1 - y_n)(x_n + x_1)$$

Kommt der Flächeninhalt negativ heraus, so hat es nichts zu bedeuten.

---

**Aufgabe 43.** Es seien 5 Polygonpunkte gegeben und zwar soll sein:

$x_1 = 111742 \cdot 2 \quad y_1 = 17600 \cdot 0$
$x_2 = 111796 \cdot 6 \quad y_2 = 17817 \cdot 9$
$x_3 = 111655 \cdot 0 \quad y_3 = 17818 \cdot 5$
$x_4 = 111588 \cdot 1 \quad y_4 = 17828 \cdot 7$
$x_5 = 111550 \cdot 0 \quad y_5 = 17600 \cdot 0$

Es soll der Flächeninhalt dieses Polygons ermittelt werden.

**Auflösung.** Man bilde auf Grund der vorhergehenden Aufgabe das nachstehende Schema, welches für alle vier Arten der Berechnung passt. Dabei ist:

$$\triangle_n y = y_{n+1} - y_n$$

ebenso:

$$\triangle_n x = x_{n+1} - x_n$$

Zur Kontrolle kann man die Summen von

$$y_{n+1} - y_{n-1}, \quad x_{n+1} - x_{n-1}$$

bilden, die Null sein müssen.

| Punkt | $y$ | $\triangle y$ | $y_{n+1} - y_{n-1}$ | $x$ | $\triangle x$ | $x_{n+1} - x_{n-1}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 17600·0 | | | 111742·2 | | |
| | | +217·9 | | | + 54·4 | |
| 2 | 817·9 | | +218·5 | 796·6 | | — 87·2 |
| | | + 0·6 | | | —141·6 | |
| 3 | 818·5 | | + 10·8 | 655·0 | | —208·5 |
| | | + 10·2 | | | — 66·9 | |
| 4 | 828·7 | | —218·5 | 588·1 | | —105·0 |
| | | —228·7 | | | — 38·1 | |
| 5 | 600·0 | | —228·7 | 550·0 | | +154·1 |
| | | 0·0 | | | +192·2 | |
| 1 | 600·0 | | +217·9 | 742·2 | | +246·6 |
| | | +217·9 | | | + 54·4 | |
| 2 | 817·9 | | | 796·5 | | |
| | | Kontrolle: | +447·2 | | Kontrolle: | +400·7 |
| | | | —447·2 | | | —400·7 |
| | | | 0 | | | 0 |

$+217 \cdot 9 = 17817 \cdot 9 - 17000 \cdot 0$
$+ \quad 0 \cdot 6 = 17818 \cdot 5 - 17817 \cdot 9$
$+ \quad 10 \cdot 2 = 17828 \cdot 7 - 17818 \cdot 5$
u. s. w.

**Erkl. 100.** Es war:

$$2F = x_1(y_2 - y_n)$$
$$+ x_2(y_3 - y_1)$$
$$+ x_3(y_4 - y_2)$$
$$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$+ x_{n-1}(y_n - y_{n-2})$$
$$+ x_n(y_1 - y_{n-1})$$

Bei diesem Beispiel hat man:

$+218 \cdot 5 = +217 \cdot 9 + \quad 0 \cdot 6$
$+ \quad 10 \cdot 8 = + \quad 0 \cdot 6 + \quad 10 \cdot 2$
$- 218 \cdot 5 = + \quad 10 \cdot 2 - 228 \cdot 7$
$- 228 \cdot 7 = \quad 0 \cdot 0 - 228 \cdot 7$
$+217 \cdot 9 = \quad 0 \cdot 0 + 217 \cdot 9$

ferner:

$+218 \cdot 5 + 10 \cdot 8 + 217 \cdot 9 = 447 \cdot 2$
$- 218 \cdot 5 - 228 \cdot 7 \quad = -447 \cdot 2$

Hier hat man nun, wenn man irgend eine der vorhergehenden Formeln anwendet, grosse Zahlen miteinander zu multiplizieren. Zu diesem Zweck wollen wir die Formel umgestalten, indem wir setzen:

Setzt man nun:

$$x_1 = x + \xi_1$$
$$x_2 = x + \xi_2$$
$$\cdots\cdots$$
$$x_n = x + \xi_n$$

so folgt:

$$\begin{aligned}2F = x(y_2 - y_n + y_3 - y_1 + y_4 - y_2 + \cdots \\ + y_n - y_{n-2} + y_1 - y_{n-2}) \\ + \xi_1(y_2 - y_n) \\ + \xi_2(y_3 - y_1) \\ \cdots\cdots \\ + \xi_n(y_1 - y_{n-1})\end{aligned}$$

Wir sehen, dass der erste Faktor verschwindet, so dass wir haben:

$$\begin{aligned}2F = \xi_1(y_2 - y_n) \\ + \xi_2(y_3 - y_1) \\ + \cdots\cdots \\ + \xi_n(y_1 - y_{n-1})\end{aligned}$$

Analoges gilt auch für die übrigen Formeln.

$$x_1 = x + \xi_1$$
$$x_2 = x + \xi_2$$
$$\cdots\cdots$$
$$x_5 = x + \xi_5$$

so folgt:

$$\begin{aligned}2F = \xi_1(y_2 - y_5) \\ + \xi_2(y_3 - y_1) \\ + \xi_3(y_4 - y_2) \\ + \xi_4(y_5 - y_3) \\ + \xi_5(y_1 - y_4)\end{aligned}$$

Setzen wir daher im obigen Beispiel:

$$x = 111500 \cdot 0$$

so folgt:

$$\xi_1 = 242 \cdot 2$$
$$\xi_2 = 296 \cdot 6$$
$$\xi_3 = 155 \cdot 0$$
$$\xi_4 = 88 \cdot 1$$
$$\xi_5 = 50 \cdot 1$$

Zur weiteren Rechnung diene das Schema:

| $\xi_n$ | $y_{n+1} - y_{n-1}$ | Produkte + | Produkte − |
|---|---|---|---|
| 242·2 | +217·9 | 52775·38 | — |
| 296·6 | +218·5 | 64807·10 | — |
| 155·0 | + 10·8 | 1674·00 | — |
| 88·1 | −218·5 | — | 19249·85 |
| 50·1 | −228·7 | — | 11435·00 |
| | | +119256·48 | −30684·85 |
| | | − 30684·85 | |
| | | $2F =$ 88571·63 | |
| | | $F =$ 44285·82 | |

Die Kontrolle durch die Anwendung irgend einer andern der mitgeteilten Formeln überlassen wir dem Leser zur Einübung im Rechnen.

## 3. Das Planimeter.

**Frage 174.** Was ist ein Planimeter?

**Bemerkung.** Nach Bauerfeind ist der bayerische Trigonometer Herrmann der Erfinder des Planimeters (1814). Die jetzt fast allgemein eingeführte Form rührt von Prof. Amsler (1856) her. Das Amslersche Polarplanimeter zeichnet sich durch Einfachheit und Billigkeit aus und arbeitet mit grosser Genauigkeit, die grösser ist als jene, mit welcher man eine Figur auf das Papier zeichnen kann.

**Antwort.** Ein Planimeter ist ein Instrument, mittels dessen der Flächeninhalt einer ebenen Figur bestimmt wird. Von den vielen Planimetern behandeln wir in Folgendem nur das Amslersche in der Ausführung der Firma G. Coradi in Zürich.

**Frage 175.** Welches sind die wesentlichen Bestandteile eines Amslerschen Polarplanimeters?

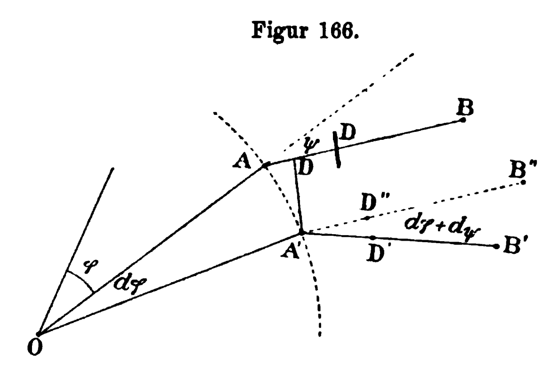
Figur 165.

**Antwort.** Das Amslersche Polarplanimeter besteht dem Wesen nach aus zwei Armen, von denen der eine ($A$) eine Nadel zum Befestigen, der andere ($B$) eine Nadel zum Umfahren trägt. Der letztere ist mit einer Drehrolle $R$ in Verbindung, welche seine Bewegungen registriert (vergl. Fig. 165).

---

**Frage 176.** Welches ist die Theorie des Polarplanimeters?

Figur 166.




**Antwort.** Die Theorie des Polarplanimeters besteht in folgender Ueberlegung:

Sei $OA = a$ (vergl. Figur 166) der Arm mit der Befestigungsnadel, $AD = b$ derjenige, der die Rolle $D$ trägt und sei ferner $AD = c$. Geht der Punkt $B$ in einen benachbarten $B'$ über, so erscheint $OA$ um einen kleinen Winkel $d\varphi$ gedreht.

Heisse ferner der Winkel zwischen der Verlängerung von $OA$ und $AB$, $\psi$, so ist dann der Winkel zwischen der Verlängerung $OA$ und $A'B'$:

$$\psi + d\varphi + d\psi$$

Wir haben (vergl. Erkl. 100):

$$\triangle OAA' = \frac{1}{2} a^2 d\varphi$$

$$\square ABA'B'' = ab \cos\psi d\varphi$$

$$\triangle B''A'B' = \frac{1}{2} b^2 (d\varphi + d\psi)$$

also die ganze umfahrene Fläche:

$$F = \triangle OAA' + \square ABA'B'' + \triangle B''A'B'$$

oder:

$$1) \ldots F = \frac{a^2}{2} d\varphi + ab \cos\varphi d\varphi + \frac{b^2}{2} (d\varphi + d\psi)$$

Geht die Rolle von $D$ nach $D'$, so ist der Weg (vergl. Erkl. 101):

$$DD'' = a\, d\varphi \cdot \cos\psi$$

und

$$D'D'' = c(d\varphi + d\psi)$$

dabei dreht sie sich um einen Winkel:

$$\frac{2r\pi}{n} \cdot dv$$

$\frac{2r\pi}{n}$ stellt dabei einen Teil der Drehung dar. $r$ ist der Radius der Rolle, und $n$ jene Zahl, die angibt, in wieviel Teile die Rolle

**Erkl. 101.** Ist $a$ der Radius, ferner $d\varphi$ die Länge des Bogens für den Radius $= 1$, so ist der Flächeninhalt des Sektors:

$$\frac{1}{2} a^2 \cdot d\varphi$$

Ferner ist der Flächeninhalt des Viereckes $AA'BB''$ gleich der Basis $b$ multipliziert mit der Höhe. Die Höhe ist aber gleich:

$$AA' \cos\psi$$

wobei:

$$AA' = a\, d\varphi$$

also hat man:

$$ab \cos\psi d\varphi$$

für den Flächeninhalt von $AA'BB''$.

Das kleine Dreieck $HDH'$ kann man nämlich als rechtwinklig und die Seite $AA'$ als eben betrachten. Dann ist:

$$AA' \perp OA \;,\; A'D \perp AB$$

**Erkl. 102.** Die Rolle kann sich nur senkrecht zu $AB$ bewegen, geht also $B$ nach $B'$, so bewegt sie sich längs eines Weges, den man ersetzen kann:

1) durch den Weg $\perp$ zu $AB$, also parallel und gleich $A'D$, d. h. wie oben abgeleitet wurde:

$$a\,d\varphi\cos\psi$$

2) durch jenen Weg, der dem Bogen $B''B'$ in der Entfernung $c$ entspricht, d. h.:

$$c\,(d\varphi + d\psi)$$

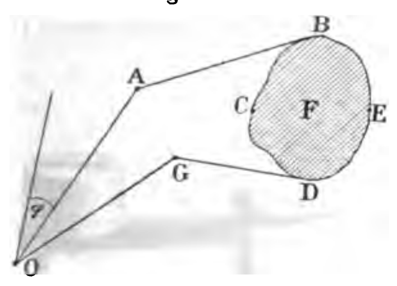
**Erkl. 108.** Nach den Prinzipien der Integralrechnung ist:

$$\int dx = x$$

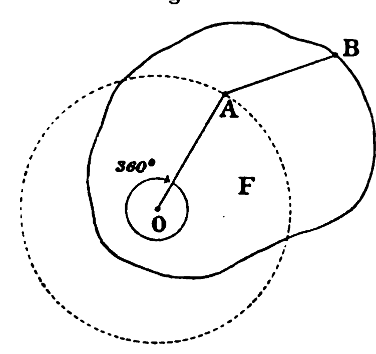
$$\int_\alpha^\beta dx = \beta - \alpha$$

(Vergl. auch Kleyers Lehrbuch der Integralrechnung.)

Figur 167.




Figur 168.




**Bemerkung.** Die Konstanten $k$ und $l\pi$ bestimmt man am besten durch Befahren bekannter Flächen, mit dem Pol ausserhalb $F$ und mit dem Pol innerhalb, dann wird:

$$k = \frac{F}{v_\varepsilon - v_A}$$

$$l\pi = F' - \frac{F}{v_\varepsilon - v_A}(v'_\varepsilon - v'_A)$$

Natürlich wird man mehrere Bestimmungen machen und aus den Resultaten das Mittel nehmen.

geteilt ist. Wir haben also (vergleiche Erkl. 101):

$$2)\ \ldots\ \frac{2r\pi}{n}\,dv = a\,d\varphi\cos\psi + c(d\varphi + d\psi)$$

Daraus folgt:

$$a\cos\psi\,d\varphi = \frac{2r\pi}{n}\,dv - c(d\varphi + d\psi)$$

Wird dieses in die erste Gleichung eingesetzt, so folgt:

$$dF = \frac{2r\pi}{n}\cdot dv + \frac{a^2 + b^2 - 2bc}{2}\,d\varphi + \frac{b(b-2c)}{2}\,d\psi$$

also durch Integration:

$$F = \frac{2r\pi}{n}(v_\varepsilon - v_A) + \frac{a^2+b^2-2bc}{2}(\varphi_\varepsilon - \varphi_A) + \frac{b(b-2c)}{2}(\psi_\varepsilon - \psi_A)$$

dabei bezeichnet der Index $\varepsilon$ den Wert des betreffenden Winkels am Ende und $A$ den Wert am Anfange der Operation.

In dieser letzten Gleichung ist die ganze Theorie des Polarplanimeters enthalten (vergleiche Erkl. 103).

Betrachten wir nun zwei Fälle, die vorkommen können.

Nehmen wir an, wir hätten beim Punkte $B$ angefangen, die Fläche $BEDC$ zu befahren und gehen wir von $E$, $D$, $C$ bis wieder zu $B$ über, so ist (vergl. Figur 167):

$$\varphi_A = \varphi_\varepsilon$$
$$\psi_A = \psi_\varepsilon$$

d. h. der Anfangswert des betreffenden Winkels gleich dem Endwert. Wir haben also:

$$\text{I}\ \ldots\ F = \frac{2r\pi}{n}\cdot(v_\varepsilon - v_A)$$

Nehmen wir an (vergl. Figur 168), wir hätten den Punkt $O$ (den sogenannten Pol des Polarplanimeters) in der Figur selbst, dann ist:

$$\psi_\varepsilon = \psi_A$$

aber:

$$\varphi_\varepsilon - \varphi_A + 360^0 = \varphi_A + 2\pi$$

demnach:

$$\varphi_\varepsilon - \varphi_A = 2\pi$$

Wir haben also in diesem Falle:

$$\text{II}\ .\ .\ F = \frac{2r\pi}{n}(v_\varepsilon - v_A) + \frac{a^2+b^2-2bc}{2}\cdot 2\pi$$

wenn wir:

$$\frac{2r\pi}{n} = k$$

$$a^2 + b^2 - 2bc = l$$

setzen:

$$F = k(v_\varepsilon - v_A)$$

**wenn der Pol ausserhalb und:**

$$F = k(v_\varepsilon - v_A) + l\pi$$

**wenn der Pol innerhalb der Figur liegt, deren Flächeninhalt bestimmt werden soll.**

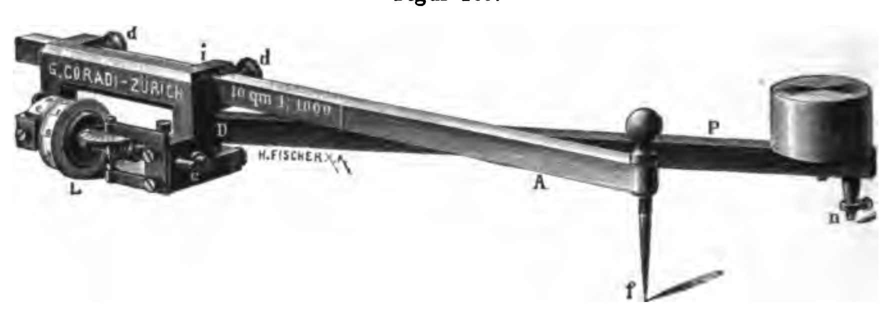
---

**Frage 177.** Wie ist das Planimeter konstruiert?

**Bemerkung.** Die Figur 169, sowie die Beschreibung ist der „Praktischen Anleitung zum Gebrauch und zur gründlichen Prüfung des einfachen Polar-Planimeters von G. Coradi in Zürich entnommen. Diese berühmte Firma baut noch andere Modifikationen Nr. II und III (vergl. Figur 170 und 171).

**Antwort.** Das rechte Ende der Laufrollenachse liegt exzentrisch in dem Cylinder $c$, so dass durch Drehen des letzteren die Achse parallel zum mathematischen Fahrarm (die durch die Fahrstiftspitze $f$ und die Polarachse $D$ gedachte Verbindungslinie) gestellt werden kann. Das linke Ende der Achse liegt zentrisch in einem kleineren Cylinder, welcher vermittels einer Stahlschraube mit eingreifendem Rande zur Beseitigung des Spielraums aus- und eingeschoben werden kann. Beide Cylinder werden mittels Druck-

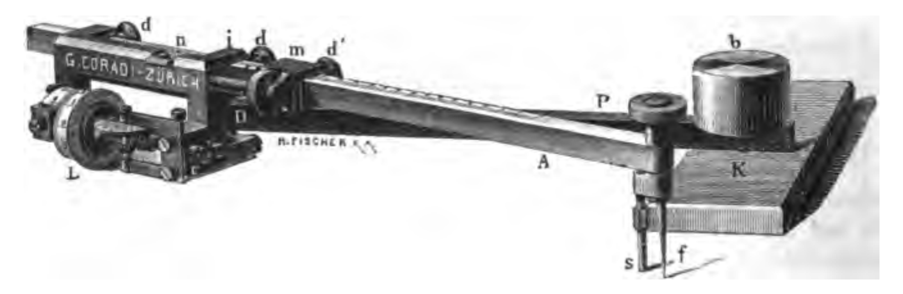
Figur 169.




Figur 170.




Figur 171.



schräubchen in ihren Stellungen gehalten. Die ganzen Umdrehungen der Laufrolle werden durch das Zählrad angegeben, dessen Zähne mit etwas Spielraum in das an der Laufrollenachse befindliche Gewinde eingreifen und dessen Teilkreis bei jeder Umdrehung der Rolle um einen Teil vorwärts rückt. Der Arm $P$ trägt an seinem Ende eine Nadelspitze, welche den Drehpunkt (Pol) des ganzen Instrumentes bildet und während der Operation an seiner Stelle bleiben muss. Am Ende des Fahrarmes $A$ ist der Fahrstift $f$ senkrecht eingeschraubt.

---

**Frage 178.** Wie wird das Polarplanimeter gebraucht?

**Bemerkung.** Bevor man das Instrument zu Flächenberechnungen benützt, überzeugt man sich im allgemeinen von dem guten Zustand desselben. Die geteilte Laufrolle muss sehr leicht spielen und einen kaum fühlbaren Spielraum zwischen ihren Körnern haben; der Nonius darf den Teilkreis der Rolle nicht berühren und soll auch nicht zu weit abstehen, um ein scharfes Ablesen zu ermöglichen; es ist gut, wenn man von Zeit zu Zeit ein Stückchen dünnes Postpapier zwischen Nonius und Teilkreis hineinschiebt, um etwa eingedrungenen Staub zu entfernen. Das Zählrad soll sehr leicht gehen und genügend Spielraum im Gewinde der Laufrollenachse haben. Die Achse des Polarms soll leicht gehen, darf aber nicht den geringsten Spielraum zwischen ihren Körnern haben; man überzeugt sich hiervon am besten, indem man Fahr- und Polarm parallel zu einander stellt, und dann den Polarm auf- und abwärts zu bewegen sucht, ausser einiger Federung darf keine Bewegung des Polarms in dieser Richtung möglich sein. Fahr- und Polararm, sowie der Fahrstift sind wohl vor Verbiegung zu schützen.

Besondere Sorgfalt ist auf die Konservierung der Rolle als des wichtigsten Teils des Instrumentes zu verwenden. Man gebe wohl acht, dass der Rand der Rolle oder die feinen Spitzen der Rollenachse nicht durch Stoss oder Fall beschädigt werden. Von Zeit zu Zeit soll auch das alte, etwa verharzte Oel an den Spitzen der Laufrollenachse entfernt werden, indem man, um ein Herausnehmen derselben zu vermeiden, einen in Petroleum getauchten Zwirnfaden über die Spitzen der Achse an der

**Antwort.** Soll das Polarplanimeter gebraucht werden, so befestigt man den Pol ausserhalb und in die Nähe der zu befahrenden Figur. Die Polstellung innerhalb ist zu vermeiden. Grosse Figuren werden in kleinere zerlegt. (Vergl. Anweisung VIII, p. 234.)

Nun setzt man die Fahrstiftspitze auf einen leicht zu merkenden Punkt des Umfangs der Figur, wobei man gut thut, um den Einstellungsfehler zu vermindern, den Anfangspunkt so zu wählen, dass die beiden Arme des Instrumentes nahezu rechtwinklig stehen. Nun kann man entweder den Stand des Zählrades, der Rollenteilung und des Nonius aufnotieren, oder durch Verschieben des Polgewichts den Nullpunkt der Rollenteilung auf den Nullpunkt des Nonius bringen. Das Zählrad stehe beispielsweise auf 3, die Rollenteilung auf 0.

Nun führt man mit möglichster Genauigkeit die Fahrstiftspitze auf der Grenzlinie der Figur, in der Richtung, wie der Zeiger an der Uhr sich bewegt, bis genau zum Anfangspunkt zurück. Hierbei dreht sich das Instrument um den Pol, während die Rolle eine bald gleitende, bald vor-, bald rückwärts rollende Bewegung annimmt.

Das genaue Nachfahren der Figuren wird erleichtert, wenn man den Ballen der Hand auf ein Stückchen Papier auflegt, welches eine glatte und eine rauhe Oberfläche hat (letztere nach oben) und auf demselben die Hand wie auf einem Schlitten herumführt. Die Verwendung eines Lineals zum Nachfahren der geradlinigen Teile des Umfangs wird vielfach empfohlen, doch erhält man hierdurch leicht einen positiven oder negativen Umfahrungsfehler, während beim Nachfahren aus freier Hand die Fehler bald positiv, bald negativ sind, sich also gegenseitig eher aufheben. Ferner ist bei Benützung eines Lineals

Lagerstelle derselben hinwegzieht, wobei die Laufrolle durch Unterlegen des Rollenrahmens freischwebend gemacht wird; hierauf bringt man an jede Spitze mit einem zugespitzten Hölzchen ein klein wenig vom feinsten Oel.

**Bemerkung.** Nebenstehend wurde angenommen, dass die Zeichnung genau im Massstab 1 : 500 gezeichnet ist. Sollte ein anderes Verhältnis bestehen, so wird der Flächenwert eines Noniusteiles ein anderer und zwar, wenn derselbe für:

$$\frac{1}{500} = 2$$

war, so wird er bei gleicher Fahrarmlänge für:

$$\frac{1}{500 \cdot n} = 2 \cdot n^2$$

also für:

$$\frac{1}{1000} = \frac{1}{500 \cdot 2} = 2 \cdot 2^2 = 8$$

$$\frac{1}{2500} = \frac{1}{500 \cdot 5} = 2 \cdot 5^2 = 50$$

u. s. w. Allgemein war er für das Verhältnis:

$$\frac{1}{h} = f$$

so wird er für das Verhältnis:

$$\frac{1}{h \cdot n} = f \cdot n^2$$

zum Nachfahren darauf zu achten, dass kein seitlicher Druck auf den Knopf des Fahrstifts ausgeübt wird, infolge dessen der Fahrstab vermöge seiner Führung sich nicht in der durch die Fahrstiftspitze bedingten Lage befindet und somit gleichfalls ein Umfahrungsfehler entsteht.

Hat man sich nun überzeugt, dass die Fahrstiftspitze nach erfolgter einmaliger Umfahrung wieder genau auf dem Anfangspunkt steht, so wird an Rolle und Zählrad abgelesen. Letzteres stehe auf 4, d. h. der Index desselben stehe zwischen dem 4. und 5. Teilstrich, der Nonius an der Rollenteilung zeige auf 13,75, — 13 liest man direkt an der Rolle ab, 7 und 1/2 Zehntel am Nonius, da weder der siebente noch der achte Strich des Nonius genau auf einen Teilstrich der Rolle zeigen; die Rolle hat sich also während der Umfahrung um 1000 + 137,5 = 1137,5 Noniuseinheiten vorwärts bewegt. Diese Ablesung wird nun noch mit dem auf dem Fahrstab angegebenen Flächenwerte der Noniuseinheit multipliziert, dieser sei bei 1 : 500 2 qm, so hat man 1137,5 × 2 = 2275,0 qm den gesuchten Flächeninhalt der Figur. Hat man vor der Umfahrung die Rollenteilung nicht auf 0 eingestellt, so ist der Stand des Nonius und Zählrades als erste Ablesung zu notieren, z. B. 3157,5, und von der nach der Umfahrung erfolgten zweiten Ablesung 4295,0 abzuziehen und die Differenz mit dem Werte der Noniuseinheit zu multiplizieren.

Es empfiehlt sich, die Fläche zweimal zu umfahren, einmal vorwärts und einmal rückwärts und das arithmetische Mittel als richtiges Resultat zu nehmen. Im allgemeinen merke man, dass je weniger Noniusteile die Fläche enthält, also je kleiner sie ist, desto mehr Umfahrungen nötig werden.

## Frage 179. Wie wird das Polarplanimeter geprüft?

**Bemerkung.** Eine genaue Anleitung wird in der oben erwähnten Broschüre von G. Coradi gegeben. Dieselbe Firma liefert auch neuere Formen, das **Rollplanimeter** und das **Kugelplanimeter**, welches letztere füglich als Ideal eines Flächenmessers betrachtet werden darf. (Vergl. G. Coradi: Die Kugelplanimeter. Zürich. Selbstverlag. Preis 1 *M.*) Der Fehlerwert bei letzterem ist 10—20mal kleiner als beim Polarplanimeter.

Ein einfaches Planimeter kostet 55 Fr. = 45 *M.*, ein genaueres 77 Fr. Ein Kugelrollplanimeter bester Konstruktion 215 Fr.

**Antwort.** Um das Polarplanimeter zu prüfen, zeichne man sich entweder Kreise von bekanntem Inhalt oder gleichseitige Dreiecke. Für solche seien einige bequeme Werte angeführt:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Inhalt = | 1000 qmm, | Seite | 48 mm, |
| „ = | 10000 „ | „ | 152 „ |
| „ = | 20000 „ | „ | 215 „ |

Man hat nun darauf zu achten:

I. ob sich die Differenzen der Ablesungen bei wiederholtem Umfahren einer und derselben Figur gleich bleiben;

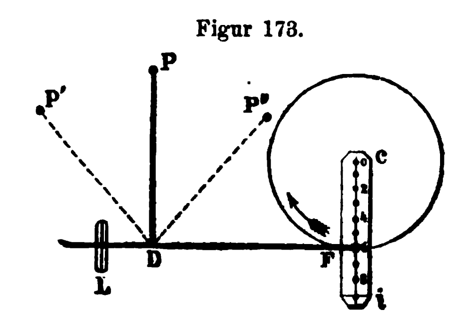
II. ob dieses auch der Fall ist bei allen Polstellungen;

Das Rollplanimeter besitzt den Vorzug, dass es von der Beschaffenheit des Papiers nahezu unabhängig ist und in einer Richtung sich bis ins unbegrenzte Fortbewegen lässt. Das Kugelplanimeter besitzt dieselben Vorzüge.

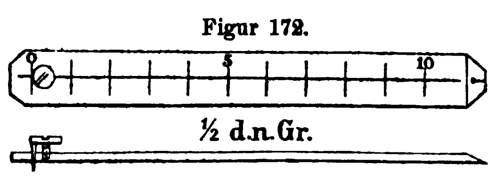
**Bemerkung.** Allgemein wird angenommen, dass bei Anwendung mechanischer Hilfsmittel Umfahrungsfehler ohne weiteres ausgeschlossen seien. Dies ist durchaus unrichtig, wie auf Grund vieler Versuche mit verschiedenen Personen behauptet werden kann. Erfolgt nämlich beim Bewegen des Fahrstifts in einem durch einen Radius des Kontroll-Lineals gegebenen Kreis der Druck auf den Knopf des Fahrstifts nicht immer tangential, so entsteht, obgleich die Fahrstiftspitze die Kreislinie nicht verlassen kann, eine Federung, infolge deren der Fahrarm eine andere als die durch die Fahrstiftspitze bedingte Lage annimmt, woraus dann namentlich bei grossen Kreisen ganz erhebliche Umfahrungsfehler entstehen, wie jeder sich selbst überzeugen und nachrechnen kann. Es empfiehlt sich daher, sowohl den Fahrstift als auch das Zentrum des Kontroll-Lineals mit einem Gewichtchen zu beschweren und nicht am Knopf des Fahrstifts, sondern am Kontroll-Lineal zu führen!

**Bemerkung.** Polarplanimeter werden von guten Firmen stets in tadellosem Zustande versendet. Man wird daher, wenn man dasselbe nicht missbraucht, stets ein gutes Instrument in Händen haben. Sollte dasselbe aber doch mangelhaft sein, so empfiehlt es sich, dasselbe dem Erzeuger zur Berichtigung zu übersenden. Das Selbstkorrigieren ist, einfachste Fälle ausgenommen, immer misslich.

Figur 173.




Figur 172.




III. ob der abgelesene Flächeninhalt in allen Fällen dem wirklichen, innerhalb der gestatteten Grenzen entspricht.

Die Genauigkeit kann zu 0,5 Prozent der gemessenen Fläche angenommen werden.

Bei Vornahme der Prüfung des Planimeters hat man sich vor allem von den ausserhalb des Instruments liegenden Fehlerquellen frei zu machen. Man verwende ein auf einem ebenen Reissbrett eben und glatt aufgespanntes Papier. Da zu einer rationellen Prüfung des Planimeters eine grosse Anzahl von Umfahrungen erforderlich ist, und Umfahrungsfehler bei der Prüfung ausgeschlossen sein sollen, so verwendet man hierzu mit Vorteil mechanische Hilfsmittel. Als solches empfiehlt sich vor allem das sogenannte Kontroll-Lineal (vergl. Fig. 172), ein Massstäbchen von dünnem Messingblech, auf welchem eine genaue Einteilung in Centimeter angebracht ist. Im Kreuzungspunkt des Nullstrichs mit der Längenlinie ist ein feines Loch gebohrt, in welches eine Nadel senkrecht eingesteckt und durch eine Schraube gehalten wird. An den Kreuzungspunkten der übrigen Teilstriche ist je eine kleine kegelförmige Vertiefung angebracht, in welche die Fahrstiftspitze eingesetzt werden kann. Das eine Ende des Lineals ist abgeschrägt und trägt einen Indexstrich zur Einstellung auf den Anfangspunkt der Umfahrung, welcher durch eine feine, nach dem Zentrum gerichtete Bleistiftlinie auf dem Papier markiert wird. Die Anwendung des Kontroll-Lineals dürfte am besten aus stehender Skizze (vergl. Figur 173) zu ersehen sein.

Mit Hilfe des Kontrol-Lineals werden also Kreise von genau bekannten Flächen umfahren.

---

**Frage 180.** Was ist das Kugelrollplanimeter?

**Antwort.** Das Kugelplanimeter unterscheidet sich vom Polarplanimeter dadurch,

**Bemerkung.** Nachstehende Betrachtungen sind dem Werkchen „Die Kugelplanimeter" von G. Coradi entnommen. Die Kugelplanimeter wurden auf Grund der Andeutungen von F. Hohman in Bamberg von G. Coradi konstruiert und sind als die besten Repräsentanten der Flächenmesser zu betrachten.

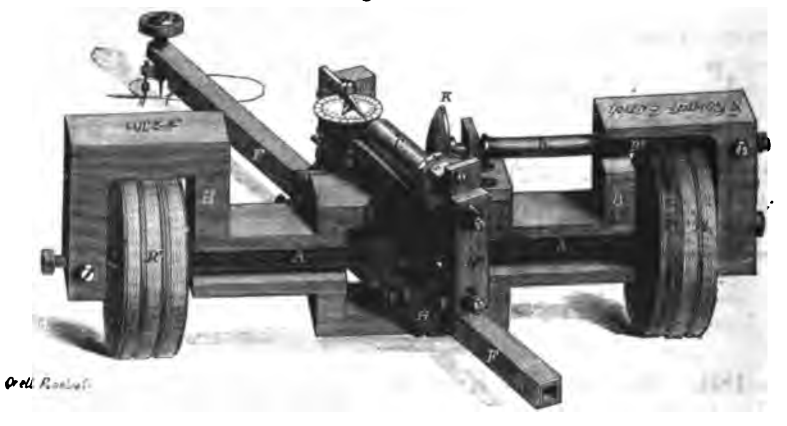
**Bemerkung.** In der Zeichnung sind die Lager der Achse *b* fest mit dem Gestell *B* verbunden und es mussten bei den ersten Instrumenten dieser Art der richtige Eingriff der beiden Zahnräder dadurch erzielt werden, dass das eine in einer verschiebbaren Stahlplatte befindliche Lager der Achse *A* mittels einer Korrektionsschraube dem Rädchen $R^3$ genähert oder entfernt wurde. Damit der Eingriff des Rädchens $R^3$ automatisch erfolge, ist jetzt die Achse *B* in einem Rahmen eingelagert, welcher um eine horizontale, zwischen Spitzenschrauben gehende Achse beweglich ist; eine Spiralfeder, die einerseits mit dem Rahmen, anderseits an der Körnerschraube der Achse *A* eingehängt ist, zieht den Rahmen soweit abwärts, dass die beiden Räder stets richtig in einander eingreifen; die Achse *b* läuft einerseits mit einer fein ausgearbeiteten gehärteten Spitze in einer Körnerschraube, anderseits in einem konischen Halslager auf gehärteter Stahlplatte.

**dass es sich nicht wie das Polarplanimeter um einen Punkt dreht, sondern wie ein Wagen in gerader Linie sich fortbewegt. Es ist deshalb ein Linearplanimeter.**

**In dem Gestell *B* ist die Achse *a* eingelagert. Mit dieser Achse *a* sind fest zwei Cylinder *R* verbunden, die genau gleichen Durchmesser haben. Der eine dieser Cylinder ist mit einer feinen Verzahnung versehen, in welche das an der Achse *b* befestigte Zahnrädchen $R^3$ eingreift. In der Mitte des Gestelles *B* ist die vertikale Drehachse des Fahrarms *F* angebracht, bestehend aus zwei Stahlschrauben, deren gehärtete Spitzen in zwei Körner eingreifen, die in der Fahrarmhülse *H* so eingebohrt sind, dass ihre Verbindungslinie (also die Fahrarmachse) vertikal steht zum Fahrarm und die durch dieselbe und die Fahrstiftspitze *f* gelegte Ebene parallel zum mechanischen Fahrarm steht. Letzterer besteht aus einem vierkantigen hohlen Messingstab, der in $1/2$ mm eingeteilt ist. Bewegt man nun das Instrument, indem man es am Knopf des Fahrstifts umfasst, so drehen sich die beiden Cylinder *R* um die Achse *A* und geben dem Gestell *B* ohne weiteres eine geradlinige Führung auf dem Plan. Die Bewegung der Cylinder wird durch das Rädchen $R^3$ und die Achse *b* dem Kugelsegment eingeteilt und dieses wiederum teilt seine Bewegung voll und ganz dem Cylinder *C* mit und zwar im Verhältnis des Halbmessers des (vertikalen) Berührungskreises. Dreht man bei stillstehendem Wagen den Fahrarm um seine Achse, so bleibt das Kugelsegment still stehen und der Cylinder wälzt sich auf dem grössten Horizontalkreise der Kugel, wodurch nur der Halbmesser des Berührungskreises geändert wird.**

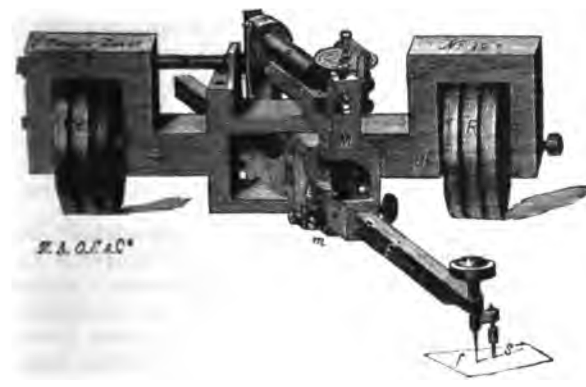


Figur 174.



**Frage 181.** Auf welchen Prinzipien beruht das Kugelrollplanimeter?

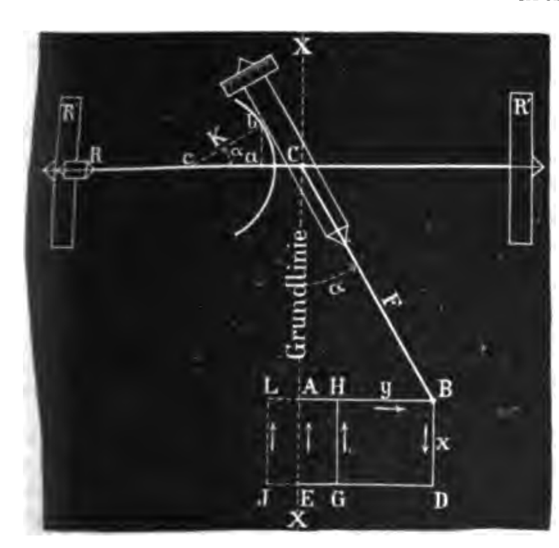
Figur 175.



**Bemerkung.** Wird der Fahrarm bei stillstehendem Wagen um seine Achse gedreht, so entstehen wohl kleine Drehungen der Messrolle, diese heben sich aber beim Befahren einer geschlossenen Figur auf und sind demnach ohne Einfluss auf das Resultat.

**Erkl. 104.** Die Fläche eines Rechteckes ist gleich Grundlinie mal Höhe.

Figur 176.




**Antwort.** Das Prinzip, auf welchem das Rollplanimeter beruht, ergibt sich aus nachstehenden Betrachtungen:

Bewegt man das Instrument auf der Zeichnungsebene vorwärts, so beschreibt die Drehachse des Fahrarms eine gerade Linie. Steht der Fahrarm rechtwinklig zur Achse $A$ der beiden Laufwalzen $RR$, so steht auch die Fahrstiftspitze auf dieser Linie. Wir wollen sie die Grundlinie nennen (vergl. Fig. 176). Der Cylinder $C$ berührt dann die Kugel in der Verlängerung ihrer Drehachse oder in ihrem Pol, es findet also bei der Befahrung der Grundlinie keine Drehung der Messrolle statt.

Wir wollen nun zeigen, dass bei der Befahrung der Strecke $BD$ (vergl. Fig. 176) die Fläche des Rechteckes $ABDE$ ausgedrückt werden kann durch die Abwickelung der Messrolle multipliziert mit einer von der Beschaffenheit des Instrumentes abhängigen Konstanten.

Sei $BD = x$, $AB = y$, so wird diese Fläche $= xy$.

Bewegt sich der Stift $B$ nach $D$, also um die Stelle $x$, so bewegt sich auch ein Punkt am Umfange der Laufwalzen $R'$ um $x$ und analog ein Punkt am Umfang des Rädchens $R$, und ein Punkt $b$ des Berührungskreises vom Halbmesser:

$$ab = r$$

um die Grösse:

$$x \cdot \frac{r}{R}$$

Nun ist aber:

$$\triangle abc \sim \triangle ABC$$

also:

$$\frac{r}{bc} = \frac{AB}{BC}$$

Sei nun:

$$AB = y$$
$$CB = F$$
$$bc = K$$

so wird:

$$\frac{r}{K} = \frac{y}{F}$$

also:

$$r = y \cdot \frac{K}{F}$$

So dass also:

$$x \frac{r}{R} = xy \frac{K}{F \cdot R}$$

**Erkl. 105.** Denn es ist:

$CB = F =$ der Länge des Fahrarmes,

$bc = K =$ dem Radius der Berührungskugel ($K$) und

$R =$ dem Radius des Rädchens $R$, alle diese drei Grössen bleiben für dasselbe Instrument konstant.

Der Wert der Konstante des Kugelrollplanimeters muss nun wie bekannt bestimmt werden. Man kann sich dabei mit Vorteil des oben erwähnten Kontrolllineals bedienen.

Also wird die Bewegung des Punktes $b$ gleich:

$xy$ mal einer vom Instrumente abhängigen Konstanten (vergl. Erkl. 105), d. h.:

$xy =$ der Bewegung des Punktes $b$ mal dem reciproken Wert dieser Konstanten. Stellt man sich nun das Rechteck unendlich schmal vor, so wird dasselbe ein Flächenelement für beliebige Kurvenbegrenzung darstellen.

---

**Frage 182.** Wie gross ist die Genauigkeit der einzelnen Planimeter?

**Antwort.** Ueber die Genauigkeit der einzelnen Planimeter gibt nachfolgende Zusammenstellung der Fehlergrenzen, welche sich auf die ausgedehnten und rationellen Untersuchungen des Herrn Professor Lorber an der k. k. Bergakademie in Leoben stützt, Auskunft. Aus derselben geht zur Genüge die grosse Ueberlegenheit der Kugelplanimeter hervor.

| Grösse der umfahrenen Fläche | Der mittlere Fehler einer Umfahrung mit dem Kontrolllineal beträgt in Bruchteilen der Fläche beim | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | einfachen Polarplanimeter | Welti-Starke's Linearplanimeter | freischwebenden Kugelplanimeter | Kugelrollplanimeter | |
| qcm | Noniuseinheit: 10 qmm | Noniuseinheit: 1 qmm | Noniuseinheit: 1 qmm | Noniuseinheit: 1 qmm | Noniuseinheit: 0,2 qmm |
| 10 | 1/75 | 1/588 | 1/625 | 1/555 | 1/2000 |
| 20 | 1/148 | 1/1000 | 1/1111 | 1/1000 | 1/3333 |
| 50 | 1/335 | 1/1852 | 1/2083 | 1/1083 | 1/6250 |
| 100 | 1/682 | 1/2857 | 1/3333 | 1/3448 | |
| 200 | 1/1274 | 1/4255 | 1/5128 | 1 5555 | |
| Preise der Instrumente | 50—80 Fr. | 400 Fr. | 125—170 Fr. | 150—200 Fr. | |

Natürlich hängt der Grad der Genauigkeit wesentlich von der Vertrautheit und Genauigkeit bei der Handhabung ab.

---

## 4. Ueber Flächenteilung.

**Frage 183.** Wie wird praktisch die Flächenteilung ausgeführt?

**Bemerkung.** Es kann nicht genug empfohlen werden, stets mehr als absolut notwendig Grössen zu messen. Man hat dann eine Kontrolle der Rechnung und Beobachtung, die mitunter sehr wertvoll sein kann.

**Antwort.** Um das praktische Verfahren bei Flächenteilung unter gegebenen Bedingungen wohl zu veranschaulichen, wählen wir folgendes Beispiel (vergl. Fig. 176).

Nehmen wir an, es sei das Viereck $ABCD$ parallel der Richtung $EF$ in zwei gleiche Teile zu teilen. Die Bonität wird als gleich vorausgesetzt. Die Arbeit wird wie folgt ausgeführt: Man geht aufs Feld mit Messband oder Latten, Baken und dem Theodolit. Dort

## Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der **ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert, um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft.

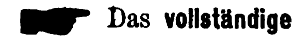
5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

---

 Das **vollständige**

## Inhaltsverzeichnis

### der bis jetzt erschienenen Hefte

kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

---

**Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.**

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

1289. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Vermessungskunde (Geodäsie).
Erster Teil.
Forts. v. Heft 1288. — Seite 145—160.
Mit 18 Figuren.



Vollständig gelöste



# Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
**Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten**
erläutert durch
**viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,**
aus allen Zweigen
der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — **aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie**; des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's**; der **Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
**zum einzig richtigen und erfolgreichen**
**Studium**, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

**Dr. Adolph Kleyer,**
**Mathematiker**, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

# Vermessungskunde
## (Geodäsie).
### Erster Teil.

Nach **System Kleyer** bearbeitet von **Dr. W. Láska.**

Fortsetzung von Heft 1288. — Seite 145—160. Mit 18 Figuren.

**Inhalt:**



**Stuttgart 1894.**
Verlag von Julius Maier.

**Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.**

# PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form**, mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch **alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich **aber auch die überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

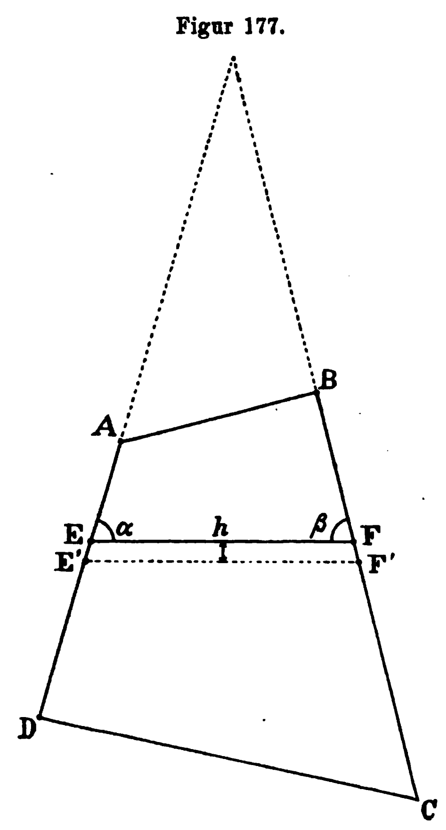
Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen**, die gehabten **Regeln, Formeln,** Sätze etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und Fachgenossen **aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc , welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. **Kleyer**, Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

**Stuttgart.** **Die Verlagshandlung.**

Figur 177.




werden alle Winkel $ABCD$ und alle Seiten gemessen. Alsdann wird genähert ein Punkt $E$ genommen und in der angegebenen Richtung $F$ abgesteckt.

In $E$ und $F$ erfolgt die Winkelmessung der Richtungen $AFD$ resp. $BEC$. Ueberdies werden die Seiten $AE$ und $BF$, eventuell auch $ED$ und $FC$ gemessen.

Hiemit ist die Feldarbeit vollendet.

Zu Haus angekommen rechne man die Flächen $ABEF$ und $EDFE$ aus und setze nach $cf$:

$$ABEF = EDFE$$

im allgemeinen wird dieses nicht der Fall sein. Es wird vielmehr:

$$ABEF = EDFE = -f$$

Man muss daher die Fläche:

$$ABEF \text{ um } \frac{1}{2}f$$

und

$$EDFE \text{ um } \frac{1}{2}f$$

um die Zweiteilung zu erhalten, d. h. statt der Strecke $EF$ ist $E'F'$ zu ziehen, wobei:

$$EFE'F' = \frac{1}{2}f$$

Denken wir uns das Trapez $ABEF$ zu einem Dreiecke ergänzt, so wird der Flächeninhalt dieses Dreieckes gleich:

$$\overline{EF}^2 \cdot \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

Somit:

$$\frac{1}{2}f = (\overline{E'F'}^2 - \overline{EF}^2)\frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

Da nun hier alles bis auf $E'F'$ bekannt ist, so kann man hieraus $E'F'$ berechnen. Für die Längen $EE'$ und $FF'$ ergibt sich (vergl. Erkl. 106):

$$EE' = (E'F' - EF)\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$FF' = (E'F' - EF)\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

Hiemit ist die Auflösung vollendet. Es ist selbstverständlich, dass ein beliebiges Polygon auf diese Weise geteilt werden kann.

**Erkl. 106.** Sei $EFF'E'$ (vergl. Fig. 177) das Trapezoid im geeigneten Massstab.

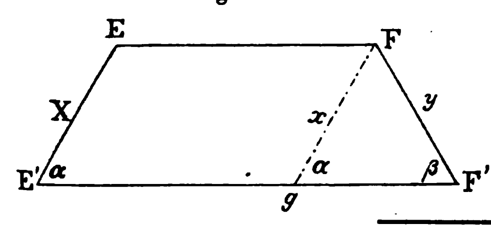
Man ziehe $FG \parallel EE'$, so wird im Dreieck $GFF'$, nach dem Sinussatze, da:

$$GF' = E'F' - EF$$

$$EE' = x = GF'\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$FF' = y = GF'\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

Figur 178.

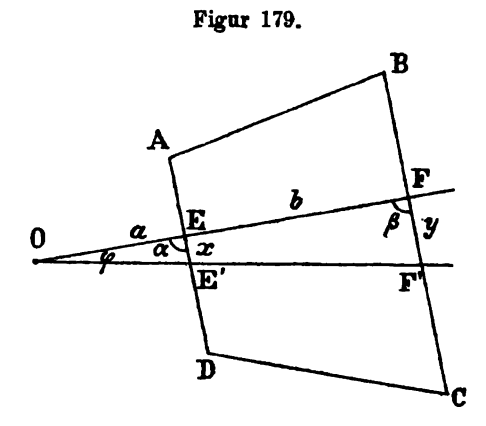



## 5. Aufgaben über Flächenteilungen.

**Aufgabe 44.** Ein Viereck soll so in zwei gleiche Teile geteilt werden, dass die Teilungslinie durch einen gegebenen Punkt geht.

**I. Auflösung.** Sei $O$ (vergl. Fig. 179) der gegebene Punkt, durch welchen die

Figur 179.




Teilungslinie gehen soll und $OM$ die hypothetisch abgesteckte Strecke; bezeichnen wir wie oben den berechneten Fehler mit $f$, ferner $OE = a$, $EF' = b$, $EE' = x$, $FF' = y$, $\sphericalangle OEE' = \alpha$, $\sphericalangle OFF' = \beta$, so haben wir:

$$\triangle OFF' - \triangle OEE' = EE'FF' = \frac{1}{2}f$$

also (vergl. Erkl. 107):

$$\text{I} \ldots (a+b)y\sin\beta - ax\sin\alpha = f$$

Da aber, wenn $\sphericalangle FOF' = \varphi$ gesetzt wird, im $\triangle OEE'$:

$$\frac{x}{a} = \frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi - \alpha)}$$

und im $\triangle OFF'$:

$$\frac{y}{a+b} = \frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi + \beta)}$$

so folgt durch Einsetzen in die Gleichung:

$$(a+b)^2 \sin\beta \frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi+\beta)} - a^2 \frac{\sin\varphi \sin\alpha}{\sin(\varphi+\alpha)} = f$$

oder wenn man die Gleichung mit:

$$\sin(\varphi+\alpha)\sin(\varphi+\beta)$$

multipliziert:

$$(a+b)^2 \sin\beta \sin\alpha \sin(\varphi+\alpha) - a^2 \sin\varphi \sin\alpha \sin(\varphi+\beta) = f$$

Da nun:

$$\sin(\varphi+\Theta) = \sin\varphi\cos\Theta + \cos\varphi\sin\Theta$$

so folgt:

$$(a+b)^2 \sin\beta\cos\alpha\sin^2\varphi + (a+b)^2\sin\beta\sin\alpha\sin\varphi\cos\varphi$$
$$- a^2\sin\alpha\cos\beta\sin^2\varphi - a^2\sin\alpha\sin\beta\sin\varphi\cos\varphi = f$$

oder wenn:

$$A = (a+b)^2\sin\beta\cos\alpha - a^2\sin\alpha\cos\beta$$
$$B = [(a+b)^2 a^2]\sin\alpha\sin\beta$$

gesetzt wird:

$$A\sin^2\varphi + B\sin\varphi\cos\varphi = f$$

Da nun (vergl. Erkl. 108):

$$\sin\varphi\cos\varphi = \frac{1}{2}\sin 2\varphi$$

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi)$$

so folgt:

$$B\sin 2\varphi - A\cos 2\varphi = 2f - A$$

Setzt man also:

$$B = \varrho\cos\Theta$$
$$A = \varrho\sin\Theta$$

so folgt:

$$\varrho(\cos\Theta\sin 2\varphi - \sin\Theta\cos 2\varphi) = 2f - A$$

oder:

$$\text{II} \ldots \varrho\sin(2\varphi - \Theta) = 2f - A$$

Dabei wird:

$$1) \ldots \operatorname{tg}\Theta = \frac{\varrho\sin\Theta}{\varrho\cos\Theta} = \frac{A}{B}$$

$$\varrho = \sqrt{(\varrho\cos\Theta)^2 + (\varrho\sin\Theta)^2} = \sqrt{A^2+B^2}$$

**Erkl. 107.** Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkte zweier Seiten in den Sinus des eingeschlossenen Winkels.

**Bemerkung.** Man findet andere Aufgaben über Flächenteilungen in Sachs, Lehrbuch der Planimetrie, Teil V, Seite 75 und 147.

**Erkl. 108.** Es ist für alle Winkel:

$$2\sin\varphi\cos\varphi = \sin 2\varphi$$

ferner:

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi)$$

Denn:

$$\sin 2\varphi = \sin(\varphi+\varphi) = \sin\varphi\cos\varphi + \cos\varphi\sin\varphi$$
$$= 2\sin\varphi\cos\varphi$$
$$\cos 2\varphi = \cos(\varphi+\varphi) = \cos\varphi\cos\varphi - \sin\varphi\sin\varphi$$
$$= \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$$

Da nun:

$$\cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi$$

so folgt:

$$\cos 2\varphi = 1 - 2\sin^2\varphi$$

also:

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi)$$

oder:

$$2) \ldots \varrho = \frac{A}{\sin \Theta} = \frac{B}{\cos \Theta}$$

die Formeln 1) und 2) eignen sich besonders für logarithmische Rechnung. Aus II folgt sodann:

$$\sin(2\varphi - \Theta) = \frac{2f - A}{\varrho}$$

Hieraus ergibt sich $\varphi$ und mit diesem:

$$x = a \frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi + \alpha)}$$

$$y = (a + b) \frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi + \beta)}$$

Damit ist die Aufgabe in jeder Hinsicht gelöst.

**II. Auflösung.** Es werde angenommen, dass die Koordinaten der Punkte gegeben sind und zwar:

$$A \cdots x_1 y_1$$
$$B \cdots x_2 y_2$$
$$C \cdots x_3 y_3$$
$$D \cdots x_4 y_4$$
$$O \cdots x_5 y_5$$

Die Koordinaten der gesuchten Punkte seien:

$$E' \cdots xy$$
$$F' \cdots x'y'$$

Dann haben wir folgende Gleichungen (vergl. Erkl. 109):

I. $OE'F'$ in einer Geraden:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_5 & y_5 \\ 1 & x & y \\ 1 & n' & y' \end{vmatrix} = 0$$

II. $AE'D$ in einer Geraden:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x & y \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} = 0$$

III. $BF'C$ in einer Geraden:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x' & y' \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0$$

IV. Es muss:

$$AE'BF = E'DCF$$

oder in Determinantenform ausgedrückt:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x & y \\ 1 & x' & y' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x' & y' \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x' & y' \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x_4 & y_4 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x' & y' \end{vmatrix}$$

**Erkl. 109.** Sind $xy$ $x'y'$ $x''y''$ die Eckpunkte eines Dreiecks, so ist der doppelte Flächeninhalt gegeben durch die Determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x' & y' \\ 1 & x'' & y'' \end{vmatrix} = 2F$$

Liegen die drei Punkte auf einer Geraden, so ist $F = 0$, also auch:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x' & y' \\ 1 & x'' & y'' \end{vmatrix} = 0$$

Die Determinante lautet ausgewertet:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x' & y' \\ 1 & x'' & y'' \end{vmatrix} = x'y + x''y' + xy'' - xy' - x'y'' - yx''$$

Vergleiche Weichold, Lehrbuch der Determinanten und Cranz, Lehrbuch der analytischen Geometrie.

Die nebenstehende Auflösung empfiehlt sich in der Praxis nicht. Wir haben sie nur angeführt, um zu zeigen, wie elegant formell sich dieses Problem lösen lässt. Theoretisch ist es durch nebenstehende Formeln gelöst, praktisch ist damit soviel wie nichts gewonnen.

## 6. Aufgaben über Teilungen.

**Anmerkung 7.** Die nachfolgenden Aufgaben haben meistens für die Praxis wenig Bedeutung, aber sie behalten immer ihren eigentümlichen Wert; zum mindesten enthalten sie einen guten Uebungsstoff für landmesserische Bestrebungen; und wer

sich mit solchen Teilungsberechnungen vertraut gemacht hat, wird oft auch in der Praxis Anwendungen dafür finden, welche dem Nichtgeübten entgehen. In Bezug auf die geometrischen Konstruktionen sei bemerkt, dass sie zuweilen auch in der Praxis angewendet werden, wohl aber nur dann, wenn nicht allzugrosse Genauigkeit gefordert wird und wenn das Massverhältnis grösser als 1 : 500 ist.

**Aufgabe 45.** Ein Dreieck von gleicher Bonität soll in zwei Teile von einem Eckpunkte aus geteilt werden. Das Verhältnis der beiden Teile soll $m:n$ sein.

Figur 180.

**Auflösung.** Sei $ABC$ das gegebene Dreieck und $C$ jener Punkt, von dem aus dasselbe geteilt werden soll, dann haben wir, wenn $D$ den Teilungspunkt bezeichnet, offenbar (vergl. Fig, 180):

$$\text{I} \ldots AD + DB = AB$$

Ziehen wir die Höhe $CE$, so ist der Inhalt von:

$$ADC = \frac{1}{2} AD \cdot CE$$

$$DCB = \frac{1}{2} DB \cdot EC$$

Diese Inhalte sollen sich aber verhalten wie $m:n$, wir haben also:

$$\frac{1}{2} AD \cdot CE = \frac{1}{2} BD \cdot CE = m:n$$

oder (vergl. Erkl. 110):

$$\text{II} \ldots AD : BD = m:n$$

Aus den Gleichungen I und II berechnet sich $AD$ und $BD$ leicht. Man erhält (vergl. Erkl. 111):

$$AD = \frac{AB}{1 + \frac{n}{m}}$$

$$AB = \frac{AB}{1 + \frac{m}{n}}$$

Die geometrische Konstruktion ist einfach, man teile $AB$ im Verhältnis $m:n$ und verbinde den Teilungspunkt mit $C$.

**Erkl. 110.** Eine Proportion wird nicht geändert, wenn man ein äusseres und ein inneres Glied zugleich durch dieselbe Zahl dividiert (nicht $\frac{1}{2} CE$).

**Erkl. 111.** Es ist aus II:

$$AD = BD \frac{m}{n}$$

dieses in I eingesetzt gibt:

$$BD + BD \frac{m}{n} = BD\left(1 + \frac{m}{n}\right) = AB$$

$$BD = \frac{AB}{1 + \frac{m}{n}}$$

---

**Aufgabe 46.** Ein Dreieck soll von einem auf einer Seite liegenden Punkte $D$ so in zwei Teile geteilt werden, dass sich die Flächen wie $m:n$ verhalten.

**I. Auflösung.** Man denke sich die Teilung ausgeführt. Dann schneidet die Teilungslinie die Basis $AB$ im Punkte $E$ (vergl. Figur 181).

Man hat alsdann:

$$\text{I} \ldots H:h = AC:AD$$

Ferner ist:

$$ADE : ACB - ADE = m:n$$

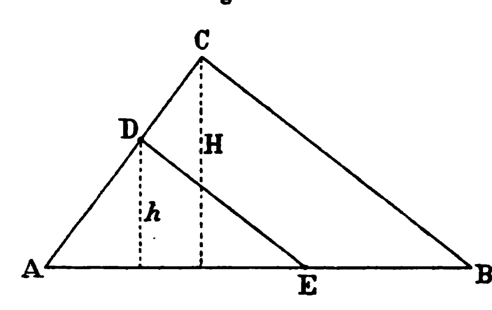
Nun ist aber:

$$\triangle ADE = \frac{1}{2} AE \cdot h$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} AB \cdot H$$

**Bemerkung.** Sehr zahlreiche und instruktive Aufgaben über die Teilung von Figuren vom geometrischen Standpunkte findet man in Sachs, Lehrbuch der Planimetrie. Man wird gut thun, auch die dort sich vorfindenden Fälle zu studieren.

Figur 181.




**Erkl. 112.** Es ist:

$$\triangle ACF = \triangle ADF + \triangle DFC$$
$$\triangle AED = \triangle ADF + \triangle DFE$$

Nun sind aber:

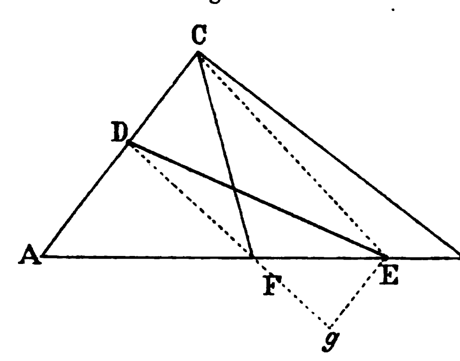
$$\triangle DFC = \triangle DFE$$

weil sie gleiche Basis $DF$ und gleiche Höhe $EG$ haben, denn nach der Konstruktion war:

$$DG \parallel CE$$

gezogen. Nun lautet aber ein planimetrischer Satz: Dreiecke über gleicher Basis sind gleich, wenn ihre Höhen gleich sind.

Figur 182.




also:

$$\frac{1}{2}AE\cdot h : \frac{1}{2}AB\cdot h - \frac{1}{2}AE\cdot h = m:n$$

oder:

$$\text{II} \ldots 1 : \frac{AB}{AE}\frac{H}{h} - 1 = m:n$$

Da nun nach der Gleichung I:

$$\frac{H}{h} = \frac{AC}{AD}$$

folgt:

$$1 : \frac{AB\cdot AC}{AE\cdot AD} - 1 = m:u$$

oder:

$$\frac{AB\cdot AC}{AE\cdot AD} = 1 + \frac{m}{n}$$

hieraus rechnet sich $AE$ wie folgt:

$$AE = \frac{AB\cdot AC}{AD\left(1+\frac{m}{n}\right)}$$

hiemit ist die Aufgabe gelöst.

**II. Auflösung.** Man teile die Basis $AB$ nach der Aufgabe 43 im Verhältnisse $m:n$, so erhält man den Punkt $F$. Verbinde hierauf $F$ mit $D$ und ziehe von $C$ aus (vergleiche Figur 182):

$$CE \parallel DF$$

so ist $E$ der gesuchte Punkt $E$. Die Verbindungslinie $DE$ teilt das Dreieck im Verhältnisse von $m:n$.

Um dieses zu beweisen, braucht man nur zu zeigen, dass:

$$\triangle ACF = \triangle ADE$$

(vergl. Erkl. 112):

Diese zweite Auflösung eignet sich vorzüglich zur Konstruktion.

Man wird wohl in der Praxis, wenn es sich um eine grössere Genauigkeit handelt, die rechnerische Auflösung vorziehen.

---

**Aufgabe 47.** Ein Dreieck soll parallel zu einer Seite im Verhältnis $m:n$ geteilt werden (vergl. Figur 183).

**I. Auflösung.** Man hat offenbar, wenn $DE$ die Teilungslinie darstellt:

$$\triangle DCE : \triangle ABC - \triangle DCE = m:n$$

oder auch:

$$\triangle DCE : \triangle ABC = m : m+n$$

also:

$$DE\cdot CF : AB\cdot gC = m : m+n$$

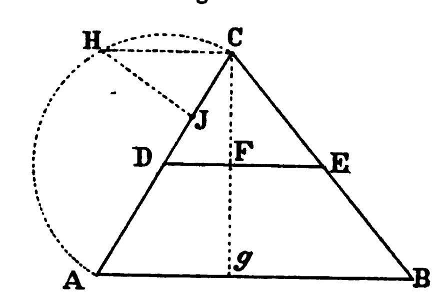
Nun ist aber:

$$DE : AB = CF : Cg$$

also wenn man diese Verhältnisse miteinander multipliziert:

$$\overline{DE}^2\cdot CF : \overline{AB}^2\cdot gC = m\cdot CF : (m+n)\,Cg$$

Figur 183.




**Erkl. 113.** Ein Verhältnis bleibt ungeändert, wenn man ein inneres und ein äusseres Glied durch dieselbe Zahl dividiert (hier $CF$ und $GC$).

**Erkl. 114.** Ein planimetrischer Satz lautet: Wird über einer Strecke $AC$ ein Halbkreis errichtet und zieht man in einem beliebigen Punkt $J$ die Senkrechte, welche den Halbkreis in $H$ schneidet, so ist:

$$\overline{CH}^2 = CJ \cdot AC$$

Das heisst (vergl. Erkl. 113):

$$\overline{DE}^2 : \overline{AB}^2 = m : m + n$$

oder:

$$DE = AB \sqrt{\frac{m}{m+n}}$$

Nun aber verhält sich:

$$DE : AB = CD : AC$$

man hat also auch:

$$\text{I} \ldots CD = AC \cdot \sqrt{\frac{m}{m+n}}$$

Diese Formel führt zu einer Konstruktion.

**II. Auflösung.** Man teile $CA$ im Verhältnis von $m:n$, so dass also:

$$CJ : CA = m : m + n$$

dann ist:

$$CJ = CA \frac{m}{m+n}$$

Nun konstruiere man über $AC$ einen Halbkreis und ziehe:

$$JH \perp AC$$

so wird (vergl. Erkl. 114):

$$\overline{HC}^2 = CJ \cdot CA$$

Nun ist aber:

$$CJ = CA\left(\frac{m}{m+n}\right)$$

also:

$$\overline{HC}^2 = \overline{CA}^2\left(\frac{m}{m+n}\right)$$

oder:

$$\text{II} \ldots HC = CA \sqrt{\frac{m}{m+n}}$$

Vergleicht man diese Gleichung mit I., so folgt:

$$HC = CD$$

---

**Aufgabe 48.** Ein Dreieck $ABC$ soll durch eine, durch einen ausserhalb liegenden Punkt $D$ gehende Gerade im Verhältnis $m:n$ geteilt werden (vergl. Figur 184).

**Auflösung.** Es sei (vergl. Figur 183) die Lage des Punktes $D$ gegeben durch den Winkel $DCB = \gamma$ und durch die Länge $DC = p$.

Sodann hat man, wenn $DF$ die Teilungslinie ist:

$$\frac{\triangle CEF}{\triangle ABC} = \frac{m}{m+n}$$

Nun ist aber, wenn $CE = x$, $CF = y$ $CB = a$, $CA = b$ gesetzt wird:

$$\triangle CEF = \frac{1}{2} xy \sin \gamma$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$$

also:

$$\text{I} \ldots \frac{xy}{ab} = \frac{m}{m+n}$$

Figur 184.

**Bemerkung.** Man vergleiche auch die Auflösung dieser Aufgabe in Kleyers Lehrbuch der ebenen Trigonometrie, Seite 807. Daselbst findet man noch andere analoge Aufgaben behandelt, deren Auflösungen wir dem Leser empfehlen.

**Erkl. 115.** Multipliziert man die Gleichung:

$$xy = ab\frac{m}{m+n}$$

mit der Identität:

$$\sin\delta\sin(\delta+\gamma) = \sin\delta\sin(\delta+\gamma)$$

so folgt, da das Produkt unabhängig ist von der Reihenfolge der Faktoren:

$$x\sin\delta\cdot y\sin(\delta+\gamma) = ab\frac{m}{m+n}\sin\delta\sin(\delta+\gamma)$$

**Erkl. 116.** Es ist identisch:

$$(\xi+\eta)^2 = (\xi-\eta)^2 + 4\xi\eta$$

also:

$$\xi+\eta = \sqrt{(\xi-\eta)^2+4\xi\eta}$$

Ferner haben wir:

$$\triangle DCE + \triangle CEF = \triangle DCF$$

also:

$$px\sin\partial + xy\sin\gamma = py\sin(\delta+\gamma)$$

oder:

$$-x\sin\delta + y\sin(\delta+\gamma) = \frac{xy}{p}\sin\gamma$$

Nun ist aber:

$$xy = ab\frac{m}{m+n}$$

also wird:

$$\text{II} \ldots\; y\sin(\delta+\gamma) - x\sin\delta = \frac{ab}{p}\,\frac{m\sin\gamma}{m+n}$$

und zugleich (vergl. Erkl. 115):

$$x\sin\delta\cdot y\sin(\delta+\gamma) = \frac{abm}{m+n}\sin\delta\sin(\delta+\gamma)$$

Setzen wir:

$$x\sin\delta = \xi$$
$$y\sin(\delta+\gamma) = \eta$$
$$\frac{ab}{p}\,\frac{m\sin\gamma}{m+n} = r$$
$$\frac{abm}{m+n}\sin\delta\sin(\delta+\gamma) = s$$

so haben wir:

$$\eta - \xi = r$$
$$\xi\eta = s$$

Aus diesen Gleichungen folgt (vergleiche Erkl. 116):

$$\eta + \xi = \sqrt{r^2+4s}$$

Dadurch sind $\xi$ und $\eta$ besimmt. Wir erhalten mit diesen:

$$x = \frac{\xi}{\sin\delta}$$

$$y = \frac{\eta}{\sin(\delta+\gamma)}$$

womit die Aufgabe gelöst ist. Zur Prüfung der Rechnung kann die Gleichung:

$$xy = ab\frac{m}{m+n}$$

verwendet werden.

---

**Aufgabe 49.** Es soll ein Dreieck parallel zu einer gegebenen Geraden im Verhältnis $m:n$ geteilt werden.

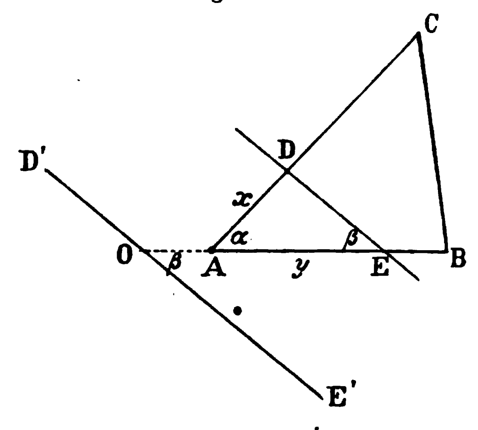
**Auflösung.** Sei $D'E'$ die gegebene Gerade, ferner $DE$ die Teilungslinie (vergleiche Figur 185). Der Parallelismus sei durch den Winkel $\beta = \sphericalangle BOE'$ definiert.

Sodann haben wir, wenn $AD = x$, $AE = y$ gesetzt wird, ferner $\sphericalangle DAE = \alpha$ analog wie bei der vorhergehenden Aufgabe:

$$\text{I.} \ldots\; xy = ab\frac{m}{m+n}$$

wobei $AC = a$, $AB = b$ gesetzt wurde.

Figur 185.




**Erkl. 117.** Da $DE \parallel D'E'$, so muss der Winkel:

$$\sphericalangle BOE' = \sphericalangle DEO$$

sein. Dann gibt der Sinussatz:

$$\frac{x}{y} = \frac{\sin\beta}{\sin[180 - (\alpha + \beta)]}$$

Da aber:

$$\sin[180 - (\alpha + \beta)] = \sin(\alpha + \beta)$$

so folgt hieraus das angegebene Resultat.

Im $\triangle AED$ ist aber nach dem Sinussatz (vergl. Erkl. 117):

$$\text{II.} \ldots \frac{x}{y} = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

Multipliziert man diese Gleichungen miteinander, so folgt (vergl. Erkl. 117):

$$xy \cdot \frac{x}{y} = x^2 = \frac{abm\sin\beta}{(m+n)\sin(\alpha+\beta)}$$

Dividiert man sie, so ergibt sich:

$$xy \cdot \frac{x}{y} = y^2 = \frac{abm\sin(\alpha+\beta)}{(m+n)\sin\beta}$$

Man hat also:

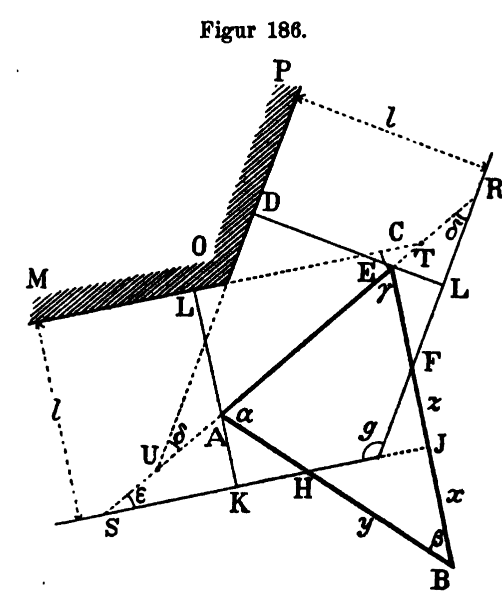
$$x = \sqrt{\frac{abm\sin\beta}{(m+n)\sin(\alpha+\beta)}}$$

$$y = \sqrt{\frac{(m+n)\sin\beta}{abm\sin(\alpha+\beta)}}$$

womit die Auflösung vollendet ist.

**Aufgabe 50.** Ein Dreieck $ABC$ soll parallel zu zwei Geraden $MOP$ so im Verhältnis $m:n$ geteilt werden, dass die Entfernung $C$ der beiden Parallelen gleich lang werde (vergl. Figur 186).

Figur 186.




**Auflösung.** Sei $FgH$ die verlangte Teillinie. Setzt man $FJ = z$, $JB = z'$, $BH = y$, so folgt:

$$\frac{\triangle HJB + \triangle gJF}{\triangle ABC} = \frac{m}{m+n}$$

oder (vergl. Erkl. 119):

$$\frac{xy\sin\beta + z^2 r}{ca\sin\beta} = \frac{m}{m+n}$$

Dabei ist $AB = c$, $BC = a$ gesetzt worden und:

$$r = \frac{\sin(\gamma+\varepsilon)\sin(\gamma+\delta)}{\sin(\delta+\varepsilon)}$$

Wir haben also:

$$\text{I} \ldots xy\sin\beta + z^2 r = \frac{m}{m+n}ca\sin\beta$$

Nach dem Sinussatz ist aber aus dem $\triangle HJB$:

$$\frac{x}{y} = \frac{\sin(\alpha - \varepsilon)}{\sin(180^0 - \sphericalangle gJF)}$$

also da (vergl. Erkl. 118):

$$\sin(180^0 - \sphericalangle gJF) = \sin(\varepsilon + \gamma)$$

auch:

$$\text{II} \ldots \frac{x}{y} = \frac{\sin(\alpha - \varepsilon)}{\sin(\varepsilon - \gamma)}$$

**Erkl. 118.** Da $Rg \parallel PO$, so wird:
$$\sphericalangle TRF = \sphericalangle OUA = \delta$$
Da ferner $OT \parallel Sg$, so wird:
$$\sphericalangle ASH = \sphericalangle OTA = \varepsilon$$
Nun ist aber im $\triangle CRF$, der Winkel $\gamma = \sphericalangle ACB$, der Aussenwinkel also:
$$\gamma = \delta + \sphericalangle CFR$$
Ebenso ist im $\triangle SHA$, $\alpha$ der Aussenwinkel, also:
$$\alpha = \varepsilon + \sphericalangle AHS$$
Ferner ist der Winkel bei $g = 180 - (\delta + \varepsilon)$, im $\triangle SgR$.

Dann ist im $\triangle FgJ$ die Seite $FJ = z$, ferner:
$$\sphericalangle gFJ = \sphericalangle CFR = \gamma - \delta$$
und
$$\sphericalangle FgJ = 180^0 - \sphericalangle HgF$$
$$= 180^0 - [180^0 - (\delta + \varepsilon)] = \delta + \varepsilon$$
Damit ergibt sich der Flächeninhalt vom $\triangle FgJ$ wie folgt:
$$F = \frac{1}{2} z \cdot gF \cdot \sin(\gamma - \delta)$$
Nun ist aber nach dem Sinussatz:
$$\frac{gF}{z} = \frac{\sin \sphericalangle gJF}{\sin(\delta + \varepsilon)}$$
oder:
$$gF = z \frac{\sin \sphericalangle gJF}{\sin(\delta + \varepsilon)}$$
Wir haben aber:
$$\sphericalangle gJF = 180^0 - (\delta + \varepsilon + \gamma - \delta)$$
$$= 180^0 - (\varepsilon + \gamma)$$
also da:
$$\sin[180^0 - (\varepsilon + \gamma)] = \sin(\varepsilon + \gamma)$$
auch:
$$gF = z \frac{\sin(\varepsilon + \gamma)}{\sin(\delta + \varepsilon)}$$
und hiemit:
$$F = \frac{1}{2} z^2 \frac{\sin(\varepsilon + \gamma)\sin(\gamma - \delta)}{\sin(\delta + \varepsilon)}$$

**Erkl. 119.** Man schreibe die Gleichung III in der Form:
$$\lambda + (c - y)\sin(\alpha - \varepsilon) - \lambda' - (a - x)\sin(\gamma - \delta)$$
$$- z\sin(\gamma - \delta)$$
oder kurz:
$$A - zB = 0$$
wobei $A$ und $B$ bei unserem Verfahren als gegeben zu betrachten sind. Diese Gleichung gibt:
$$z = \frac{A}{B}$$
Stimmt dieses $z$ mit dem supponierten $z'$ überein, so ist $z$ der wahre Wert.

Ist dagegen:
$$z' - z = \text{positiv}$$
so hat man offenbar $z'$ zu gross gewählt; ist:
$$z' - z = \text{negativ}$$
dann zu klein.

Um auch noch der Bedingung gleicher Verhältnisse zu genügen, ziehen wir durch $A$ und $C$ Senkrechte $OK$ resp. $DL$ zu den Parallelen.

Da $LA$ und $DC$ direkt durch die Messung gewonnen werden, so sind sie als bekannt anzusehen. Wir haben also:
$$LA + AK = DC + CL$$
als die Bedingung der Gleichheit.

Setzen wir:
$$LA = \lambda \ , \ DC = \lambda'$$
Im $\triangle CLT$ haben wir:
$$CL = [a - (x + z)]\sin(\gamma - \delta)$$
ferner im $\triangle AKH$:
$$AK = (c - y)\sin(\alpha - \varepsilon)$$
so dass wir haben:
$$\text{III} \ldots \lambda + (c - y)\sin(\alpha - \varepsilon)$$
$$-\{\lambda' + [a - (x + z)]\sin(\gamma - \delta)\} = 0$$
Somit haben wir drei Gleichungen für drei Unbekannte $xyz$, aus welchen diese berechnet werden können.

Es wäre höchst unpraktisch, die direkte Lösung der Gleichungen I—III zu entwickeln.

Man kommt hier durch Versuche viel schneller zum Ziele. Das Verfahren ist folgendes (vergl. Erkl. 119).

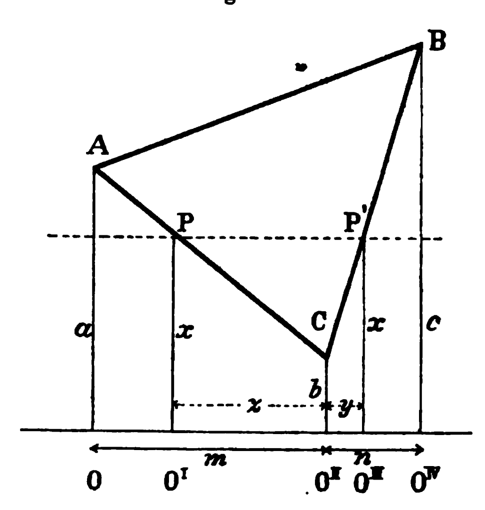
Man nehme einen plausiblen Wert für $z$ an und rechne aus I und II $x$ und $y$, was auf das Ausziehen einer Quadratwurzel hinauskommt.

Mit den so berechneten Werten geht man in die Gleichung III ein. Hat man ein richtiges $z$ angenommen, so werden die Werte $xyz$ derselben genügen.

Im allgemeinen wird dieses nicht geschehen. Man wiederholt dieselbe Operation mit einem anderen $z$, welches zeigen wird, ob man sich dem wahren Werte nähert oder nicht. Nähert man sich dem wahren Wert, so fahre man in dieser Richtung fort.

**Aufgabe 51.** Ein durch Koordinaten gegebenes Dreieck soll parallel der Ordinatenachse in zwei gleiche Teile geteilt werden.

Figur 187.




**Erkl. 120.** Der Flächeninhalt eines Trapezes ist gleich dem Produkte aus der halben Summe der parallelen Seiten in ihre Entfernung.

**Erkl. 121.** Es soll:

$$\triangle ABC = 2 \triangle CPP'$$

nach der Aufgabe. Man hat also:

$$\frac{(a+c)}{2}(m+n) - \frac{a+b}{2}m - \frac{b+c}{2}n$$
$$= 2x(z+y) - (x+b)z - (x+b)y$$

oder:

$$(a+c)(m+n) - (a+b)m - (b+c)n$$
$$4x(z+y) - 2(x+b)z - 2(x+b)y$$

d. i.:

$$am + an + cm + cn - am - bm - bn - cn$$
$$= 4xz + 4xy - 2xz - 2bz - 2xy - 2by$$

woraus:

$$m(c-b) + n(a-b) = 2x(z-y)$$
$$- 2b(z+y) = 2(x-b)(z+y)$$

folgt.

**Auflösung.** Es sei $ABC$ das gegebene Dreieck (vergl. Fig. 186), die Ordinaten der Punkte $A$, $B$, $C$ seien beziehungsweise $a, c, b$.

Ferner werde bezeichnet die Differenz der Abscissen der Punkte $C$ und $A$ mit $m$ und jene der Punkte $B$ und $C$ mit $n$. Die Ordinate der Teilungslinie sei $x$ und die Abscissenunterschiede der Schnittpunkte gegen die Abscisse von $C$ seien $z$ und $y$ (vergl. Figur 187). Sodann haben wir:

$$\text{I} \ldots y : n = (x-b) : (c-b)$$
$$\text{II} \ldots z : m = (x-b) : (a-b)$$

ferner ist:

$$\triangle ABC = OABO^{\text{IV}} - OACO^{\text{II}} - O''CBO^{\text{IV}}$$

und analog:

$$\triangle CPP' = O^{\text{I}}PP'O^{\text{III}} - O'PCO^{\text{II}}$$
$$- O^{\text{II}}CP'O^{\text{III}}$$

Im ersteren Falle haben wir (vergleiche Erkl. 120):

$$\triangle ABC = \frac{a+c}{2}(m+n) - \frac{a+b}{2}m$$
$$- \frac{b+c}{2}n$$

im letzteren:

$$\triangle CPP' = x(z+y) - \frac{x+b}{2}z - \frac{x+b}{2}y$$

also zusammengezogen (vergl. Erkl. 121):

$$\text{III} \ldots m(c-b) + n(a-b) = 2(y+z)(x-b)$$

Aus den Gleichungen I und II folgt:

$$y = \frac{n}{c-b}(x-b)$$
$$z = \frac{m}{a-b}(x-b)$$

also durch Addition:

$$z + y = \frac{n(a-b) + m(c-b)}{(a-b)(c-b)}(x-b)$$

Setzt man diesen Wert in die Gleichung III ein, so ergibt sich weiter:

$$m(c-b) + n(a-b) = 2\frac{n(a-b) + m(c-b)}{(a-b)(c-b)}(x-b)^2$$

oder wenn beiderseits durch:

$$2[m(c-b) + n(a-b)]$$

dividiert und mit:

$$(a-b)(c-b)$$

multipliziert wird:

$$(x-b)^2 = \frac{(a-b)(c-b)}{2}$$

oder:

$$x - b = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a-b}\sqrt{c-b}$$

**Bemerkung.** Sollte nicht $1:2$ das Verhältnis sein, sondern $1:p$, so hat man:

$$x - b = \pm\frac{1}{\sqrt{p}}\sqrt{a-b}\sqrt{c+b}$$
$$y = \pm\frac{n}{\sqrt{p}}\sqrt{\frac{a-b}{c-b}}$$
$$z = \pm\frac{m}{\sqrt{p}}\sqrt{\frac{c-b}{a-b}}$$

Man braucht bloss in Gleichung III statt 2 $p$ zu setzen um sofort diese Formeln zu erhalten.

Setzt man diesen Wert in die Gleichungen I und II ein, so folgt wieder:

$$y = \pm \frac{n}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{a-b}{c-b}}$$

$$z = \pm \frac{m}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{c-b}{a-b}}$$

---

**Aufgabe 52.** Es soll ein Dreieck geteilt werden, welches wie in der vorhergehenden Aufgabe durch Koordinaten gegeben ist. Die Teilungslinie soll mit der Ordinatenachse einen Winkel $\alpha$ einschliessen und das Teilungsverhältnis $1:p$ sein.

**Auflösung.** Man hat nur das in der vorhergehenden Aufgabe Durchgeführte zu wiederholen. Deshalb überlassen wir die Durchführung dem Leser zur Uebung und fügen nur die Hauptzüge bei.

Man hat folgende Gleichungen, wenn $x_1$ und $x_2$ die Ordinaten der Teilungspunkte sind:

$$\text{I} \ldots m(c-b) + n(a-b) = p[y(x_1-b) + z(x_2-b)]$$

$$\text{II} \ldots y:n = (x_2-b):(c-b)$$

$$\text{III} \ldots z:m = (x_1-b):(a-b)$$

$$\text{IV} \ldots \frac{x_2-x_1}{z+y} = \operatorname{tg}\alpha$$

Aus II, III und I ergibt sich:

$$(c-b)(a-b) = p(x_1-b)(x_2-b)$$

aus II, III und IV folgt:

$$(x_2-b)\left(1-\frac{n\operatorname{tg}\alpha}{c-b}\right) = (x_1-b)\left(1+\frac{m\operatorname{tg}\alpha}{a-b}\right)$$

aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich:

$$x_1 - b = \frac{1}{\sqrt{p}}\sqrt{(c-b)(a-b)}\sqrt{\frac{1-\frac{n\operatorname{tg}\alpha}{c-b}}{1+\frac{m\operatorname{tg}\alpha}{a-b}}}$$

$$x_2 - b = \frac{1}{\sqrt{p}}\sqrt{(c-b)(a-b)}\sqrt{\frac{1+\frac{m\operatorname{tg}\alpha}{a-b}}{1-\frac{n\operatorname{tg}\alpha}{c-b}}}$$

**Bemerkung.** Die Auflösungen dieser und der vorhergehenden Aufgabe sind einer Mitteilung des Verfassers in der Zeitschrift für Vermessungswesen, herausgegeben von Dr. W. Jordan, entnommen. In dieser Zeitschrift findet der Leser noch eine grosse Anzahl verwandter Probleme von verschiedenen Verfassern.

---

**Aufgabe 53.** Ein Viereck $ABCD$ (vergl. Fig. 188) soll parallel zur Seite $AB$ im Verhältnis $m:n$ geteilt werden.

**Auflösung.** Denkt man sich $BC$ und $AD$ bis zum Schnitt verlängert, so hat man offenbar, wenn die Fläche von $ABDC$ mit $F$ bezeichnet wird und

$$\frac{EFBA}{F} = \frac{m}{m+n}$$

also:

$$EFBA = \frac{Fm}{m+n}$$

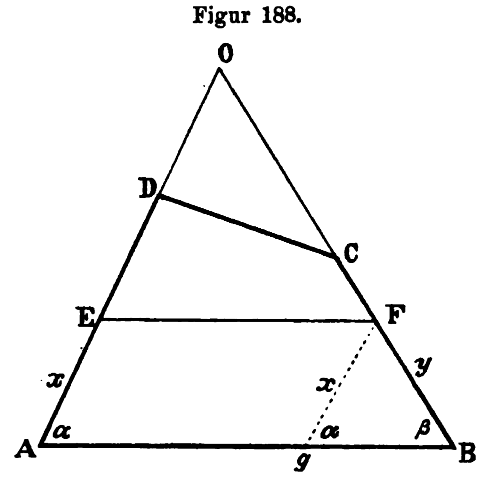
ferner ist:

$$EFBA = ABO - OEF$$

also (vergl. Erkl. 122):

$$EFBA = \frac{\overline{AB}^2}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta} - \frac{\overline{EF}^2}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}$$

Figur 188.




**Erkl. 122.** Sei $AB$ die Basis eines Dreiecks, ferner $\alpha$ und $\beta$ die Winkel an der Basis, so ist der Flächeninhalt desselben gleich:

$$\frac{1}{2}\,\frac{\overline{AB}^2}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$$

**Erkl. 123.** Es ist nämlich:

$$x\cos\alpha\sin\beta + y\cos\beta\sin\beta = a\sin\beta$$
$$x\sin\alpha\cos\beta - y\cos\beta\sin\beta = 0$$

also:

$$x(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta) = a\sin\beta$$

oder da:

$$\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta)$$
$$x\sin(\alpha+\beta) = a\sin\beta$$

wir haben also:

$$\text{I} \ldots \frac{Fm}{m+n} = \frac{\overline{AB}^2 - \overline{EF}^2}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$$

Hieraus rechnet sich leicht $EF$ aus. Wir finden:

$$EF = \sqrt{\overline{AB}^2 - \frac{Fm}{m+n}(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta)}$$

Zur Bestimmung der Abschnitte $x$ und $y$ hat man aus dem $\triangle FgB$ nach dem Sinussatze:

$$\text{II} \ldots \frac{x}{y} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

ferner nach dem Cosinussatz, da:

$$gB = AB - Ag = AB - EF$$
$$\text{III} \ldots AB - EF = x\cos\alpha + y\cos\beta$$

setzen wir:

$$AB - EF = a$$

so folgt:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta = a$$
$$x\sin\alpha - y\sin\beta = 0$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $\sin\beta$ und die zweite mit $\cos\beta$ und addieren, so ergibt sich (vergl. Erkl. 123):

$$x\sin(\alpha+\beta) = a\sin\beta$$

und analog ergibt sich:

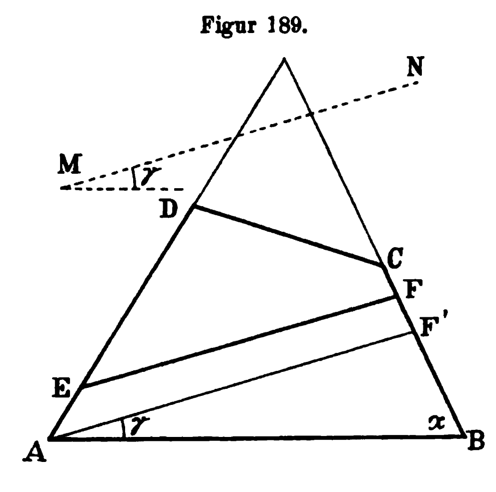
$$y\sin(\alpha+\beta) = a\sin\alpha$$

wodurch $x$ und $y$ berechnet wird.

---

**Aufgabe 54.** Ein Viereck $ABCD$ soll parallel zu einer Geraden $MN$ im Verhältnis $m:n$ geteilt werden.

Figur 189.




**Auflösung.** Diese Aufgabe kann auf die vorhergehende zurückgeführt werden. Ist die Parallelität von $MN$ gegeben durch den Winkel $\gamma$, den $MN$ mit $AB$ einschliesst, so rechne man das Dreieck (vergl. Figur 189) $ABF'$. Sei nun $EF$ die Teilungslinie und sei:

$F$ der Flächeninhalt von $ABCD$

$f$ „ „ „ $ABEF$

so soll:

$$\frac{F}{f} = \frac{m+n}{m}$$

bezeichnen wir nun mit:

$\lambda$ den Flächeninhalt von $ABF'$

so wird es sich darum handeln, das Viereck $AF'CD$ parallel zu einer Seite ($AF'$) zu teilen nach einem bestimmten Verhältnis. Dies ist aber die vorhergehende Aufgabe.

Es erübrigt nur noch, das Verhältnis anzugeben.

**Bemerkung.** Eine verwandte Aufgabe, wo die Teilungslinie durch einen Eckpunkt gehen soll, findet man behandelt in Kleyers Lehrbuch der ebenen Trigonometrie, Seite 809.

**Erkl. 124.** Man hat:

$$\frac{F-\lambda}{f-\lambda} = x$$

da aber:

$$\frac{F}{f} = \frac{m+n}{m}$$

so wird:

$$F = f\frac{m+n}{m}$$

also:

$$x = \frac{f\frac{m+n}{m}}{f-\lambda}$$

Multipliziert man Zähler und Nenner mit $m$, so erhält man das nebenstehende Resultat.

Setzen wir dieses Verhältnis gleich $x$, so wird:

$$\frac{F-\lambda}{f-\lambda} = x$$

und auch (vergl. Erkl. 124):

$$\frac{f(m+n)-\lambda m}{m(f-\lambda)} = x$$

woraus sich das Verhältnis $x$ leicht erkennen lässt.

---

**Aufgabe 55.** Ein Dreieck $ABC$ ist von einem Punkte $D$ aus so in drei Teile zu teilen, dass sie sich wie:

$$q_1 : q_2 : q_3$$

verhalten.

Figur 190.

**Auflösung.** Man setze (vergl. Fig. 190):

$$BE = x, \quad CF = z, \quad Ag = y$$
$$AB = a, \quad CB = c, \quad AC = b$$
$$AD = m, \quad CD = p, \quad BD = n$$

so hat man, wenn die ganze Fläche des Dreiecks $ABC$ mit $F$ bezeichnet wird (vergl. Erkl. 125):

$$ym \sin\alpha + m(a-x)\sin\beta = \frac{2q_1}{q_1+q_2+q_3}F$$

$$xn \sin\gamma + n(c-z)\sin\delta = \frac{2q_2}{q_1+q_2+q_3}F$$

$$zp \sin\eta + p(b-y)\sin\varepsilon = \frac{2q_3}{q_1+q_2+q_3}F$$

Dieses sind aber lineare Gleichungen, deren Auflösung keine Schwierigkeit bietet.

**Erkl. 125.** Der Flächeninhalt von:

$$AEDg = \triangle AED + \triangle ADg = \frac{1}{2}m(a-x)\sin\beta + \frac{1}{2}ym\sin\alpha$$

denn der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkte zweier Seiten in den Sinus des eingeschlossenen Winkels.

---

**Aufgabe 56.** Ein rechteckiges Stück Acker $ABCD$ enthält ein anderes $BFEg$ in sich, das ebenfalls rechteckig ist. Die Bonität des ersteren ist $p$, die des letz-

**Auflösung.** Setze $Eg = a$, $Bg = b$, $gC = c$, ferner $FL = x$, so hat man:

teren $q$. Da jedoch längs $DC$ die Strasse geht, so soll $FBEg$ in ein $LBMC$ verwandelt werden (vergl. Figur 191).

Figur 191.

$$xb \cdot p = c(a-x) \cdot q$$

oder:

$$x(pb + cq) = ca$$

woraus:

$$x = \frac{ca}{pb + cq}$$

folgt.

Denn:

$xb =$ Fläche von $FLEH$
$(a-x)c =$ „ „ $HgMC$

Die $x$ Flächen haben die Bonitäten $p$ und $q$, demnach ist der Wert von:

$$FLEH = xb \cdot p$$

und jener von:

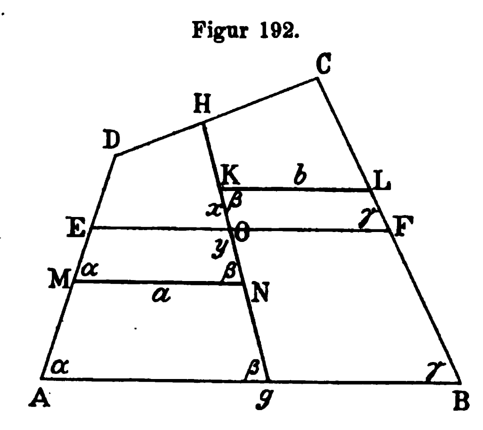
$$HgMC = (a-x)c \cdot q$$

Diese Werte sollen einander gleich sein, was obige Gleichung liefert. Man versteht nämlich unter Bonität den Geldwert der Flächeneinheit.

---

**Aufgabe 57.** Ein viereckiges Stück $ABCD$, bestehend aus $AgHD$ Acker und $gBCH$ Wiese mit den Bonitäten $p$ resp. $q$, soll parallel zur Seite $AB$ in zwei gleichwertige Teile geteilt werden.

Figur 192.




**Erkl. 126.** Zeichnen wir uns das Trapez $EMNO$ wie folgt (vergl. Figur 193), dann ist der Flächeninhalt desselben gleich:

$$MNQE - OQN = ah - \frac{1}{2} y^2 \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha \sin\beta}$$

Nun ist:

$$h = \frac{y}{\sin\beta}$$

also wird der Flächeninhalt des Trapezes sein:

$$\frac{ay}{\sin\beta} - \frac{1}{2} y^2 \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha \sin\beta}$$

**Auflösung.** Diese Aufgabe lässt sich wie folgt lösen. Man teile auf bekannte Weise $AgHD$ und $gBCH$ parallel zu $AB$ in gleiche Teile, so dass:

$$DHNM = AgNM$$
$$gBLK = KLHC$$

(in der Figur 192 absichtlich nicht entsprechend gezeichnet).

Sei ferner $EF$ die wahre Teilungslinie. Dann wird:

$$MNOE \cdot p = OFLK \cdot q$$

sein müssen. Bezeichnen wir die als gegeben zu betrachtenden Strecken $MN$ mit $a$, $KL$ mit $b$; dann haben wir zunächst:

$$\text{I} \;. \;. \;. \; x + y = \overline{gK} - \overline{gN}$$

wobei $x = OK$, $y = ON$. $\overline{gK}$ und $\overline{gN}$ sind infolge der Teilung gegeben.

Nun ist (vergl. Erkl. 126):

$$MNOE \cdot p = p\left(\frac{ay}{\sin\beta} - \frac{1}{2} y^2 \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha \sin\beta}\right)$$

und analog:

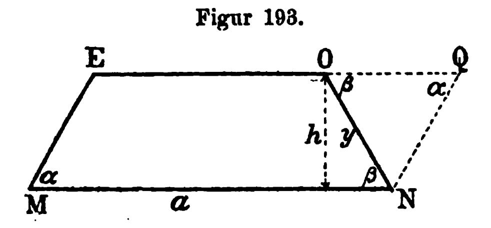
$$OFLK \cdot q = q\left(\frac{bx}{\sin\beta} - \frac{1}{2} y^2 \frac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin\beta \sin\gamma}\right)$$

wir haben also:

$$\text{II} \;. \;. \;. \; py\left(a - \frac{1}{2} y \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}\right)$$
$$= qx\left(b - \frac{1}{2} x \frac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin\beta \sin\gamma}\right)$$

Man merke wohl, dass dieses letzte Glied je nach der Form des Trapezes addiert oder subtrahiert werden muss.

Figur 193.




**Erkl. 127.** Liegt eine Gleichung von der Form:

$$x^2 P + x Q = R$$

vor, so dividiere man sie durch $P$, wodurch entsteht:

$$x^2 + x \frac{Q}{P} = \frac{R}{P}$$

Addiert man hierauf beiderseits $\frac{1}{4}\frac{Q^2}{P^2}$, so wird:

$$x^2 + x\frac{Q}{P} - \frac{1}{4}\frac{Q^2}{P^2} = \left(x + \frac{1}{2}\frac{Q}{P}\right)^2 = \frac{R}{P} + \frac{1}{4}\frac{Q^2}{P^2}$$

Zieht man nun beiderseits die Wurzel, so folgt:

$$x + \frac{1}{2}\frac{Q}{P} = \pm\sqrt{\frac{R}{P} + \frac{1}{4}\frac{Q}{P^2}}$$

Aus den beiden Gleichungen lässt sich nun $x$ und $y$ bestimmen.

Die Gleichungen I und II haben die Form:

$$x + y = N$$

$$xA + x^2 A' = yB + y^2 B'$$

Aus der ersten folgt:

$$y = N - x$$

dieses in die zweite eingesetzt gibt:

$$xA + x^2 A' = B(N - x) + B'(N - x)^2$$

oder geordnet:

$$x^2(A' - B') + x(A + B + 2B'N) = BN + B'N^2$$

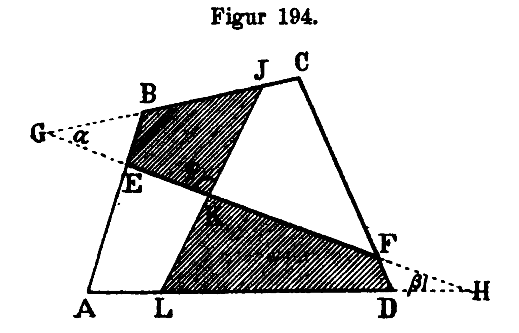
Hieraus muss $x$ berechnet werden (vergl. Erkl. 127).

Man hat hier zwei Lösungen. Welche von ihnen der Aufgabe entspricht muss der spezielle Fall lehren, der gegeben ist. Es müssen $x$ und $y$ stets positiv genommen werden.

---

**Aufgabe 58.** Zwei Landwirte haben zwei Feldstücke neben einander, diese bilden zusammen ein Viereck $ABCD$. Der Landwirt A hat eine Wiese $EBCF$ und der Landwirt B einen Acker $EADF$. Die Bonität dieser Stücke sei $p:q$. Der Landwirt A möchte mit B einen Teil $r$ seines Besitztums gegen Ackerland eintauschen. Wie muss die Teillinie gelegt werden?

Figur 194.




**Auflösung.** Diese Aufgabe lässt sich wie folgt formulieren. Ein Viereck (vergl. Fig. 194) $ABCD$, welches durch die Linie $EF$ in Vierecke $EBCF$ und $EADF$ geteilt ist, soll durch die Linie $JL$ so geteilt werden, dass die Vierecke $BEKJ$ und $FDLK$ einen gegebenen Flächeninhalt haben. Man verlängere die Seiten $BC$ und $AD$ bis sie die verlängerte Seite $EF$ in $G$ und $H$ treffen. Da das Viereck und darin eine Linie $EF$ gegeben ist, so können die Dreiecke $GBC$ und $DFH$ in allen Stücken berechnet werden. Da aber der Flächeninhalt von $BJEK$ und $LKDF$ gegeben ist, so ist auch der Flächeninhalt der Dreiecke $JKG$ und $LKH$ gegeben.

Setzt man:

$$GK = x$$

$$\sphericalangle GKJ = \varphi$$

so ist:

$$\triangle GKJ = \frac{x^2}{2}\frac{\sin\alpha\sin\varphi}{\sin(\alpha+\varphi)}$$

$$\triangle KHL = \frac{(a-x)^2\sin\beta\sin\varphi}{\frac{1}{2}\sin(\varphi+\beta)}$$

**Bemerkung.** Diese Aufgabe kommt in der Praxis oft vor. Es geschieht, dass längs $AD$ der Weg führt und B nur über das Grundstück des A auf den Weg gelangen kann.

wobei $GH = a$ gesetzt wurde und

$$\sphericalangle CGK = \alpha$$
$$\sphericalangle KHL = \beta$$

Nun ist aber:

$$\triangle GKJ = m$$

und

$$\triangle KHL = n$$

gegeben. Man hat also (vergl. Erkl. 128):

$$\text{I} \ldots 2m \sin(\alpha + \varphi) = x^2 \sin\alpha \sin\varphi$$
$$\text{II} \ldots 2n \sin(\beta + \varphi) = (a - x)^2 \sin\beta \sin\varphi$$

Dieses sind die Fundamentalgleichungen des Problems. Hier sind zwei Unbekannte $\varphi$ und $x^2$ um diese zu eliminieren.

**Erkl. 128.** Es ist:

$$\sin(\alpha + \varphi) = \sin\alpha \cos\varphi + \cos\alpha \sin\varphi$$

und analog:

$$\sin(\beta + \varphi) = \sin\beta \cos\varphi + \cos\beta \sin\varphi$$

Setzt man dieses in I und II und sondert die zu $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ zugehörigen Grössen, so erhält man das nebenstehende Resultat.

Man hat (vergl. Erkl. 128):

$$\sin\varphi (2m \cos\alpha - x^2 \sin\alpha) + \cos\varphi \cdot 2m \sin\alpha = 0$$
$$\sin\varphi [2n \cos\beta - (a - x)^2 \sin\beta] + \cos\varphi \cdot 2n \sin\beta = 0$$

Die Division beider Gleichungen gibt:

$$\frac{2m \cos\alpha - x^2 \sin\alpha}{2n \cos\beta - (a - x)^2 \sin\beta} = \frac{m \sin\alpha}{n \sin\beta}$$

d. h. eine quadratische Gleichung in Bezug auf $x$. Dieselbe kann auch geschrieben werden:

$$(2m \cos\alpha - x^2 \sin\alpha)\, n \sin\beta = [2n \cos\beta - (a - x)^2 \sin\beta]\, m \sin\alpha$$

oder geordnet:

$$x^2(-n \sin\alpha \sin\beta + m \sin\alpha \sin\beta) + 2xa \sin\beta \cdot m \sin\alpha = (2n \cos\beta - a^2 \sin\beta)\, m \sin\alpha - 2mn \cos\alpha \sin\beta$$

oder:

$$x^2 \sin\alpha \sin\beta (m - n) - 2axm \sin\alpha \sin\beta = 2mn(\sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta) - a^2 m \sin\alpha \sin\beta$$

d. h.:

$$x^2 - \frac{2ax}{m - n} = \frac{2mn}{m - n} \cdot \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin\alpha \sin\beta} - \frac{a^2 m}{m - n}$$

Hieraus kann $x$ wie oben berechnet werden (vergl. Erkl. 127).

---

**Aufgabe 59.** Zwei aneinander stossende Grundstücke $ABCD$ und $CDGH$, deren Bonitäten sich wie $p : a$ verhalten, sollen in drei Teile geteilt werden, deren Werte sich wie $P : P' : P''$ verhalten.

Die Seiten $AB$, $CD$, $GH$ sind parallel (vergl. Figur 195).

**Auflösung.** Sei $F$ die Fläche von $ABCD$ und $w$ der Wert dieses Grundstückes, so ist (vergl. Erkl. 129):

$$w = pF$$

wo $p$ die Bonität bezeichnet.

Ebenso findet man für $DCGH$:

$$w' = qF'$$

also ist der Gesamtwert:

$$w = w + w' = pF + qF'$$

Man kann auch:

$$w = P + P' + P''$$

setzen, wenn man unter den Verhältniszahlen direkt sich den Preis denkt.

**Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.**

**Der ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert, um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft.

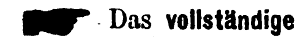
5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

---



Das **vollständige**

## Inhaltsverzeichnis

### der bis jetzt erschienenen Hefte

kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

---

**Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.**

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

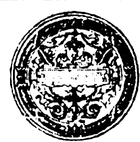
1290. Heft. | Preis des Heftes 25 Pf. | Vermessungskunde (Geodäsie). Erster Teil. Forts. v. Heft 1289. — Seite 161—176. Mit 26 Figuren.



Vollständig gelöste

# Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten
erläutert durch
**viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,**
aus allen Zweigen
der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.): — aus **allen Zweigen** der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie**; des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's**; der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar-** u. **Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
**zum einzig richtigen und erfolgreichen**
**Studium**, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von



**Dr. Adolph Kleyer,**
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in **Frankfurt a. M.**
unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

# Vermessungskunde
## (Geodäsie).
### Erster Teil.

Nach **System Kleyer** bearbeitet von **Dr. W. Láska.**

Fortsetzung von Heft 1289. — Seite 161—176. Mit 26 Figuren.

**Inhalt:**



**Stuttgart 1894.**
Verlag von Julius Maier.

## Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

# PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar **in vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen und alsdann auch alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

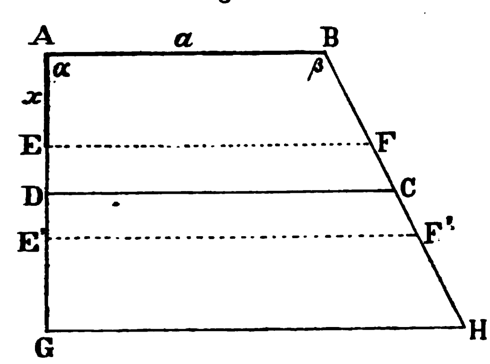
Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der **mathematischen** Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen** in **allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige Kraft verleihen** und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc, welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. **Kleyer,** Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

Figur 195.




**Erkl. 129.** Es möge darauf hingewiesen werden, dass die Bonität nichts anderes als den Wert der Flächeneinheit darstellt, demnach ist der Gesamtwert gleich der Bonität mal Fläche, aber gemessen durch dieselbe Flächeneinheit, für welche die Bonität definiert ist.

**Bemerkung.** Als weitere Unbekannte ist nun $E'G = y$ einzuführen und das Gesagte zu wiederholen.

Dann wird natürlich:

$$EE' = AG - x - y$$

Die Werteinheitsfläche (d. h. diejenige Fläche, welche man für eine Werteinheit, z. B. Mark erhält), wird also sein:

$$\frac{pF + qF'}{P + P' + P''}$$

Seien nun die Preise der geteilten Stücke der Reihe nach $f f' f''$, so wird:

$$f = \frac{pF + qF'}{P + P' + P''} P$$

$$f' = \frac{pF + qF'}{P + P' + P''} P'$$

$$f'' = \frac{pF + qF'}{P + P' + P''} P''$$

Ist $u$ die Fläche des ersten Teiles, welcher ganz im Feld von der Bonität $p$ liegt, so ist sein Preis $up$.

Wir haben also:

$$up = \frac{pF + qF'}{P + P' + P''} P$$

oder:

$$u = \frac{pF + qF'}{P + P' + P''} \frac{P}{p}$$

Sei nun $AE = x$, $AB = a$, $\sphericalangle EAB = \alpha$, $\sphericalangle ABF = \beta$, so wird, da $ABEF$ ein Trapezoid ist (vergl. Frage 183):

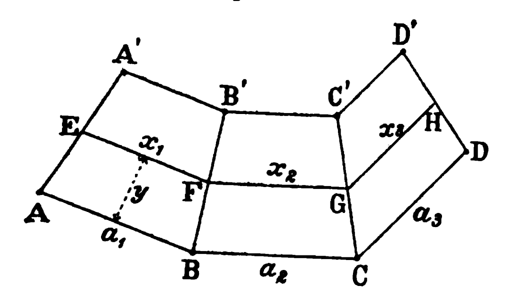
$$u = \left(a + \frac{x}{2} \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}\right) x \sin\alpha$$

Hieraus lässt sich nun $x$ berechnen. Wir führen dieses Beispiel nicht weiter aus, indem es in der Folge nichts Neues bietet.

---

**Aufgabe 60.** Ein Vieleck $ABCD$ $A'B'C'D'$ soll durch die gebrochene Linie $EFGH$ so geteilt werden, dass die entstandenen Flächen ein Verhältnis $m : n$ haben (vergl. Figur 196).

Figur 196.




**Erkl. 130.** Es werde ein Trapez für sich betrachtet. Dann ist (vergl. Figur 197):

$$a_1 = AM + MN + NB = y \operatorname{ctg} A + x_1 + y \operatorname{ctg} \frac{B}{2}$$

**Auflösung.** Setzen wir:

$$EF = x_1 \quad FG = x_2 \quad GH = x_3$$

$$AB = a_1 \quad BC = a_2 \quad CD = a_3$$

und ist $y$ der Parallelabstand, so haben wir (vergl. Erkl. 130):

$$a_1 = x_1 + y\left(\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} \frac{B}{2}\right)$$

$$a_2 = x_2 + y\left(\operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2}\right)$$

$$a_3 = x_3 + y\left(\operatorname{ctg} \frac{C}{2} + \operatorname{ctg} D\right)$$

$ABCD$ bezeichnen die an $ABCD$ liegenden Winkel.

Setzt man:

$$a_1 + a_2 + a_3 = [a]$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = [x]$$

$$\operatorname{ctg} A + 2 \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + 2 \operatorname{ctg} \frac{C}{2} + \operatorname{ctg} D = S$$

denn im $\triangle AME$ ist:

$$\operatorname{ctg} A = \frac{AM}{y}$$

also:

$$AM = y \operatorname{ctg} A$$

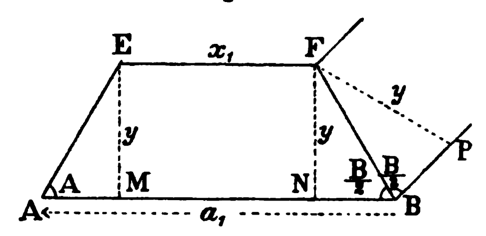
Dass der Winkel bei $B$ halbiert wird, erkennt man sofort, denn es ist:

$$\triangle AFB \cong \triangle BFP$$

oder:

$$FB = FB$$
$$FN = FP = y$$
$$\measuredangle FNB = \measuredangle FPB = 90^0$$

Figur 197.




**Erkl. 181.** Es ist allgemein:

$$(m + n)(m - n) = m^2 - n^2$$

**Erkl. 182.** In der Figur 197 ist:

$$\sin A = \frac{y}{AE}$$

also wird:

$$AE = y : \sin A$$

Analog sind die übrigen Gleichungen zu beweisen.

so folgt durch Addition der obigen Gleichungen:

$$\text{I} \ldots [a] = [x] + yS$$

Sei ferner $F$ die ganze gegebene Fläche und $f$ die Fläche $AEFG \parallel DCBA$, so ist:

$$\frac{f}{F} = \frac{m}{m+n}$$

Nun ist aber:

$$f = ABFE + BFGC + CGHD$$
$$= y\frac{x_1 + a_1}{2} + y\frac{x_2 + a_2}{2} + y\frac{x_3 + a_3}{2}$$
$$= \frac{y}{2}\{[x] + [a]\}$$

also wird:

$$\text{II} \ldots y[x] + y[a] = \frac{2Fm}{m+n}$$

Schreibt man die Gleichungen I und II wie folgt:

$$[a] - [x] = yS$$
$$[a] + [x] = \frac{1}{y}\frac{2Fm}{m+n}$$

so gibt die Multiplikation (vergl. Erkl. 131):

$$[a]^2 - [x]^2 = \frac{2SFm}{m+n}$$

oder:

$$[x] = \sqrt{[a]^2 - \frac{2SFm}{m+n}}$$

sodann wird aus I:

$$y = \frac{[a] - [x]}{S}$$

Hat man einmal $y$, so wird (vergleiche Erkl. 132):

$$AE = y : \sin A$$
$$BF = y : \sin\frac{B}{2}$$
$$CG = y : \sin\frac{C}{2}$$
$$DH = y : \sin D$$

## 7. Grenzregulierung.

**Aufgabe 61.** Eine gebrochene Linie $ABC$ soll in eine gerade verwandelt werden (vergl. Figur 198).

**Erkl. 183.** Der Inhalt des Dreiecks:

$$ABC = \frac{1}{2} ba \sin\alpha$$

ebenso ist:

$$AB_1C = \frac{1}{2} bx \sin\beta$$

**Auflösung.** Sei $ABC$ die gegebene Gerade. Man ziehe $BB_1 \parallel AC$ und verbinde $A$ mit $B_1$, so ist $AB_1$ die neue Grenze, denn es ist:

$$\triangle ACB = \triangle AB_1C$$

weil sie gleiche Basis $AC$ und gleiche Höhe haben.

Soll diese Teilung eine genaue sein, so müssen im Felde die Strecken:

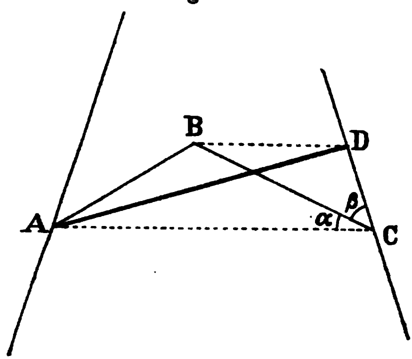
da diese einander gleich sein sollen, so ist:

$$ba \sin \gamma = bx \sin \delta$$

Nur entfällt $b$ beiderseits und es bleibt:

$$a \sin \gamma = x \sin \delta$$

Figur 198.




$$AC = b$$
$$BC = a$$

sowie die Winkel:

$$\sphericalangle ACB = \alpha$$
$$\sphericalangle BCD = \beta$$

gemessen werden. Ist sodann $B_1C = x$, so folgt (vergl. Erkl. 133):

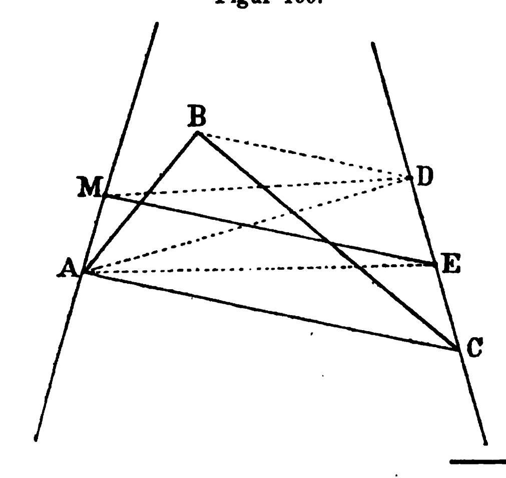
$$ba \sin \alpha = bx \sin \beta$$

also:

$$x = a\frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

**Aufgabe 62.** Es liege derselbe Fall vor, wie in der vorhergehenden Aufgabe. Es soll aber die Teilungslinie durch einen Punkt $M$ gehen (vergl. Figur 199):

Figur 199.




**Auflösung.** Man bestimme den Punkt $D$, wie in der vorhergehenden Aufgabe. Verbinde $M$ mit $D$, ziehe $AE \parallel MD$, so trifft $AE$ die Seite $DC$ in $E$. Verbindet man $M$ mit $N$ und verlängert, so hat man die gewünschte Grenze.

Der Beweis ist leicht. Es ist:

$$\triangle ABC = \triangle ADC$$

ferner:

$$\triangle ADC = \triangle AEC + \triangle ADE$$

Da aber:

$$\triangle AEM = \triangle ADE$$

so ist auch:

$$\triangle ADC = \triangle AEC + \triangle AEM$$

**Aufgabe 63.** Eine gebrochene Grenze $ABCDE$ soll in eine gerade verwandelt werden (vergl. Figur 200).

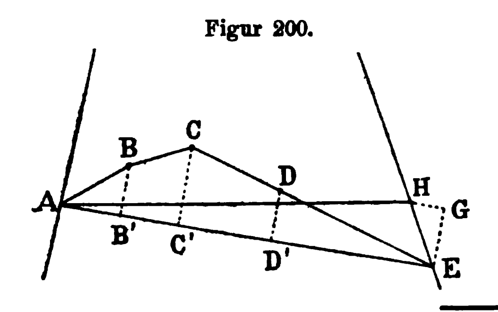
**Auflösung.** Man verbinde $A$ mit $E$ und berechne den Inhalt der Fläche $ABCDE$ nach der Formel:

$$F = ABCDE = \frac{1}{2} AB' \cdot BB' + \frac{1}{2}(BB' + CC')B'C' + \frac{1}{2}(CC' + DD')C'D' + \frac{1}{2} DD' \cdot D'E$$

Diesen Inhalt betrachte man als den Inhalt eines Dreiecks über der Basis $AE$, dessen Höhe $x$ unbekannt ist. Man hat also:

$$F = \frac{1}{2} x \cdot AE$$

Figur 200.



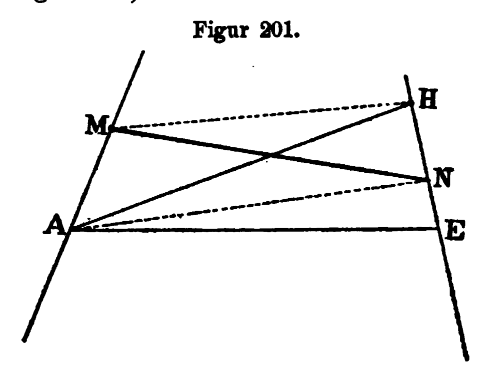

woraus:

$$x = \frac{2F}{AE}$$

folgt. Hiermit ist die Höhe berechnet. Nun ziehe man $EG \perp AE$, $GH \perp EG$ und verbinde $H$ mit $A$, so gibt $HA$ die gesuchte Grenze.

**Aufgabe 64.** Es sei die gebrochene Grenze der vorhergehenden Aufgabe gegeben. Man sucht eine gerade Grenze, die durch einen Punkt $M$ geht (vergl. Figur 201).

Figur 201.




**Auflösung.** Soll die neue Grenze durch einen Punkt $M$ gehen, so bestimme man sich wie vorher den Punkt $H$. Ziehe $AN \parallel MH$ und verbinde $M$ mit $N$, so gibt $MN$ die neue Grenze. Denn:

$$\triangle AHE = \triangle ANE + \triangle ANH$$

Da ferner:

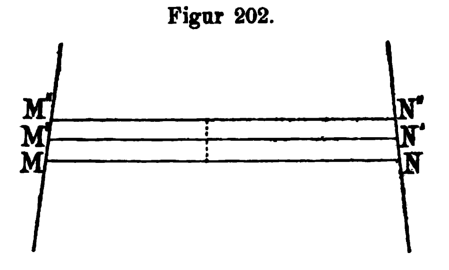
$$\triangle ANH = \triangle ANM$$

so folgt:

$$\triangle AHE = \square AENM$$

**Aufgabe 65.** Eine recht verwickelte Grenzregulierung liege vor. Wie verfährt man am rationellsten in diesem Falle? (Vergl. Figur 202).

Figur 202.




**Bemerkung.** Das nebenstehend verwandte Verfahren ist äusserst fruchtbar für die Lösung solcher Aufgaben, wo die direkte Lösung mit vieler Mühe nur zu erreichen sein würde. Es ist äquivalent der Newtonschen Regel für die Auflösung der Gleichungen.

**Auflösung.** Liegt eine komplizierte Grenzregulierung vor, so kommt man in der Regel durch Versuche rascher zum Ziel als durch Rechnung.

Man kann dann verfahren wie folgt: Es sei $MN$ eine angenommene Teilungslinie. Dieselbe gebe einen Fehler $F$, eine zweite parallele $M'N'$ gebe einen Fehler $F'$.

Sei ferner $M''N''$ diejenige Grenze, die den Fehler 0 gibt.

Diese Grenze ist bestimmt, sobald man die Strecke $NN''$ kennt.

Setzten wir für den Fehler eine lineare Funktion:

$$a + bx$$

wobei $a$ und $b$ unbestimmte Koëffizienten sind. Dann haben wir, wenn wir $x$ bei $N$ anfangen lassen:

$$a + b \cdot 0 = F$$
$$a + b \cdot NN' = F'$$

**Erkl. 184.** Aus:

$$a + b \cdot 0 = F$$

folgt:

$$a = F$$

Wird nun dieses Resultat in:

$$a + b \cdot NN' = F'$$

eingesetzt, so wird:

$$b \cdot NN' = F' - a = F' - F$$

also:

$$b = \frac{F' - F}{NN'}$$

demzufolge:

$$x = -\frac{a}{b} = -F : \frac{F' - F}{NN'}$$

oder:

$$x = -\frac{F \cdot NN'}{F' - F}$$

also wird (vergl. Erkl. 134):

$$a = F$$

$$b = \frac{F' - F}{NN'}$$

Suchen wir nun jenen Wert von $x$ für den:

$$a + bx = 0$$

so muss:

$$x = -\frac{a}{b}$$

Also muss:

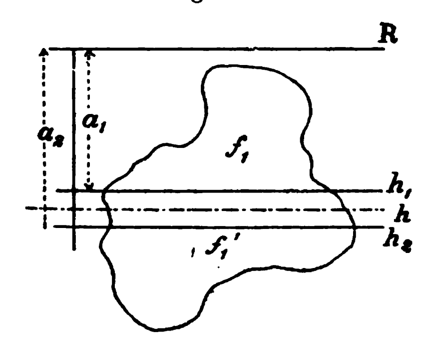
$$x = NN'' = -\frac{F \cdot NN'}{F' - F}$$

sein. Damit ist die neue Grenze bestimmt.

---

**Aufgabe 66.** Eine sehr unregelmässige Figur soll parallel zu einer Richtung in zwei gleiche Teile geteilt werden.

Figur 203.




**Auflösung.** Es sei (vergl. Figur 203) $R$ die gegebene Richtung. Man ziehe irgend eine hypothetische Teilungsstrecke $h_1 \parallel R$ und berechne mit Hilfe des Planimeters (vergl. Frage 173) die beiden Flächen:

$$f_1 \text{ und } f_1'$$

und sehe nach, ob:

$$f_1 - f_1' = 0$$

Bekommt man:

$$f_1 - f_1' = g_1$$

so rechne man wieder mit einer hypothetischen Teilungsrichtung $h_2$ die Grösse:

$$f_2 - f_2' = g_2$$

dann ist der Abstand $a$ der wahren Teilungsrichtung von der Geraden $R$:

$$a = a_2 + \frac{-g_2}{g_1 - g_2}(a_1 - a_2)$$

Vergleiche vorhergehende Aufgabe.

$a_1$ und $a_2$ sind Abstände der Richtungen $h_1$ und $h_2$ von der gegebenen Geraden $R$. Statt $R$ kann natürlich eine jede beliebige zu $R$ parallele Gerade genommen werden.

Auf diese Weise werden alle komplizierten Teilungs- und Grenzregulierungs-Aufgaben berechnet. Statt des Planimeters kann auch unter Umständen direkte Flächenberechnung erfolgen.

# VI. Die Kurvenabsteckung.

## 1. Das Abstecken der Geraden.

**Aufgabe 67.** Es soll eine sehr lange gerade Linie abgesteckt werden.

**I. Auflösung.** Um eine gerade Linie abzustecken, muss man vorerst die beiden Endpunkte durch zwei Baken bezeichnen. Diese werden senkrecht im Boden befestigt und dann mittels Senkblei auf ihr Senkrechtstehen geprüft und berichtigt. Sodann sucht sich der Landmesser jenen Endpunkt auf, in welchem er die Sonne (vergl. Erkl. 135) im Rücken hat, wenn dieses überhaupt angeht. Die an diesem Punkte stehende Bake ($A$) soll etwas kürzer sein, als die übrigen, damit der Landmesser über sie hinvisieren kann. Sodann lässt er einen Gehilfen von dem anderen Ende ($B$) etwa 100—150 Meter in der Richtung der Linie vortreten. Der ihn ansehende Gehilfe hält die Bake ($C$) in ausgestrecktem Arme frei und möglichst hoch zwischen dem Daumen und dem Zeigefinger, so dass das mit dem eisernen Schuh beschlagene Ende lotrecht und nahe am Boden liegt. Während nun der Landmesser über die kürzere Bake visiert, gibt er dem Gehilfen Zeichen zur Bewegung nach rechts oder links, bis eine Bake die hintere deckt (vergl. Erkl. 136). Dieser lässt sodann seine Bake zwischen den Fingern zu Boden gleiten und stösst sie senkrecht zu Boden ein und berichtigt sie mit der Lotschnur, tritt aus der Linie, damit der Landmesser noch einmal die Bake auf ihre Senkrechtstellung in der Linie prüfen kann (vergl. Erkl. 137). Dieses Verfahren wird solange fortgesetzt, bis die ganze Linie mit Baken abgesteckt ist.

**II. Auflösung.** Hat man keinen Gehilfen, so kann man sich der Kreuzscheibe oder des Spiegelkreuzes oder endlich des Prismenkreuzes bedienen, deren Theorie in Frage 116 bis 13 mitgeteilt wurde.

**III. Auflösung.** Man stellt sich in einem der Endpunkte mit einem Theodolit oder Nivellierinstrument auf und visiert in der Richtung des anderen. Hierauf werden die Horizontalkreise festgeklemmt und die Baken, vom anderen Endpunkte angefangen, eingerichtet, indem man sie mit dem Vertikalfaden des Fernrohrs zur Deckung bringt.

**Erkl. 135.** An der Orientierung gegen die Sonne liegt darum viel, weil, wenn der Landmesser die Sonne möglichst im Rücken hat, er einerseits durch in die Augen fallende Sonnenstrahlen im Sehen nicht gestört wird und andererseits die einzurichtenden Baken von der beleuchteten Seite sieht.

**Erkl. 136.** Die nebenstehende Methode erleidet eine Modifikation beim sehr unebenen, z. B. stark aufsteigenden Terrain dadurch, dass man die Zwischenräume zwischen den Baken um so kleiner wählen muss, je abschüssiger die Thalwände verlaufen. Es ist angezeigt, die Linien im unebenen Felde mittels eines Theodolits durchzufluchten. (Siehe jenes Kapitel, welches über den Theodolit handelt.)

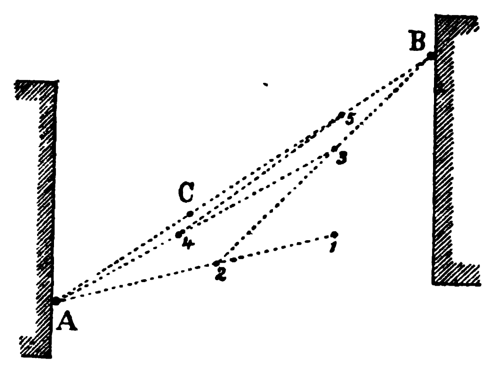
**Erkl. 137.** Um zu prüfen, ob die Baken genau in gerader Linie stehen, bringe man das Auge bald rechts, bald links vom Anfangspunkt und vergleiche, ob die Stäbe nacheinander regelmässig auftreten. Ist z. B. der zweite Stab früher sichtbar als der dritte etc., vom Geometer aus gezählt, so stehen die Baken richtig. Kommt aber ein entfernter Stab früher zum Vorschein, als ein weniger entfernter, so liegt ein Fehler vor.

---

**Aufgabe 68.** Zwischen zwei gegebenen Punkten, über welche nicht visiert werden kann, einen dritten Punkt in gerader Linie abzustecken.

**I. Auflösung.** Die Auflösung des vorliegenden Problems richtet sich nach den Verhältnissen und Messgerätschaften.

Figur 204.



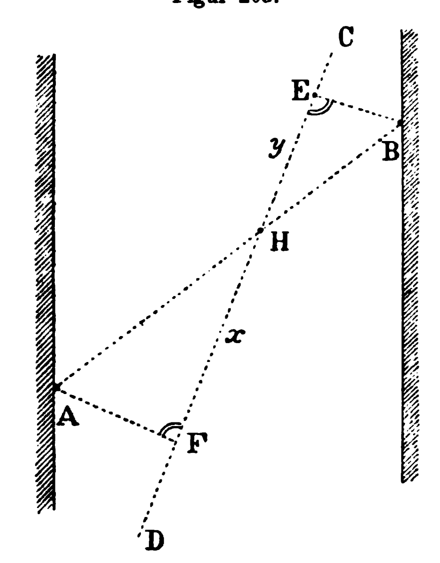

Wir wollen zunächst einen der einfachsten Fälle betrachten. **Zwischen zwei Punkten $A$ und $B$, die an einer Mauer bezeichnet sind, soll ein Punkt abgesteckt werden.** Dabei wollen wir annehmen, dass wir, ausgenommen Baken, keine anderen Gerätschaften besitzen (vergleiche Figur 204).

Man bezeichne einen Punkt 1 und stecke sodann einen Punkt 2 so ab, dass $A$, 1 und 2 in einer Geraden liegen, was wir symbolisch mit:

$$\overline{A\,1\,2}$$

bezeichnen wollen. Sodann einen Punkt 3, so dass $\overline{2\,3\,B}$ wird, ferner 4, so dass $\overline{A\,4\,3}$, sodann 5, dass $\overline{B\,5\,4}$ und so fort, bis man zu vier Punkten gelangt (etwa $A\,C\,5\,B$), die in einer Geraden liegen (vergl. Erkl. 138).

Figur 205.




**II. Auflösung.** (Vergleiche Figur 205.) Besitzt man ein Instrument, welches 90° abzustecken gestattet, sowie ein Messband, so kann man verfahren, wie folgt: Man steckt eine Gerade $CD$ ab und sucht auf ihr jene Punkte $E$ und $F$ aus, für welche:

$$\sphericalangle BED = \sphericalangle AFC = 90^0$$

Werden sodann $EB$ und $AF$, sowie $EF$ gemessen, und

$$EH = x\ ,\ FH = y$$

gesetzt, so haben wir die Gleichungen:

$$x + y = EF$$

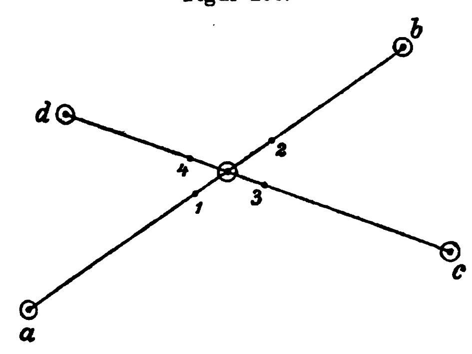
$$\frac{x}{AF} = \frac{y}{EB}$$

**Erkl. 138.** Man sieht, wie umständlich und zugleich wenig genau dieses Verfahren ist. Etwas rascher ist das direkte Aufsuchen eines Zwischenpunktes mittels Spiegel- oder Prismenkreuz (siehe II. Auflösung).

---

**Aufgabe 69.** Auf dem Felde sind zwei Strecken abgesteckt, man sucht ihren Schnittpunkt?

Figur 206.




**Auflösung.** Seien (vergl. Figur 206) $a, b, c, d$ die durch Baken bezeichneten Punkte. Man schalte in der Nähe des Schnittpunktes in $ab$ zwei Punkte 1 und 2 ein, ebenso in $cd$ zwei Punkte 3 und 4. Der Schnittpunkt wird dann vermittels zweier Schnüre aufgesucht.

Das soeben beschriebene Verfahren führt rasch zum Ziele.

---

**Aufgabe 70.** Auf dem Felde sind drei Punkte $A, B, C$ gegeben. Man verfügt nur über ein Messband und soll sehr genau den Fusspunkt $D$ der Senkrechten von $A$ auf $BC$ bestimmen (vergleiche Figur 207).

Figur 207.

**Auflösung.** Man messe alle drei Seiten:

$$AC = b$$
$$AB = c$$
$$BC = a$$

Sodann berechne man den

$$\sphericalangle ABC = \beta$$

und weiter aus dem rechtwinkligen Dreieck $BCD$:

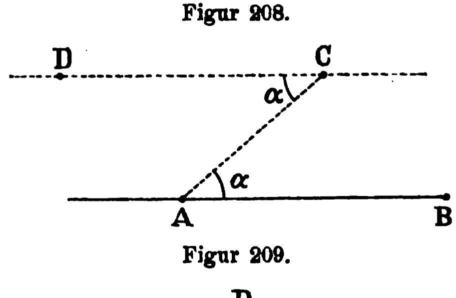
$$x = BD = c \cos \beta$$

Man hat dann nur von $B$ aus, in der Richtung $BC$ die Strecke $x$ abzumessen, um den Punkt $D$ zu erhalten.

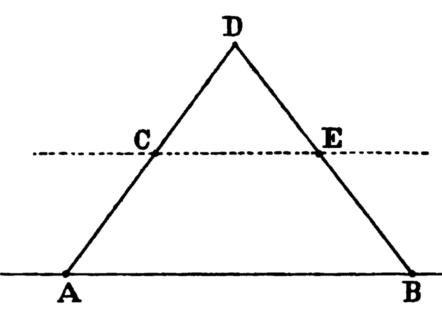
---

**Aufgabe 71.** Es soll eine zu einer gegebenen Linie Parallele auf dem Felde ausgesteckt werden, die durch einen gegebenen Punkt geht.

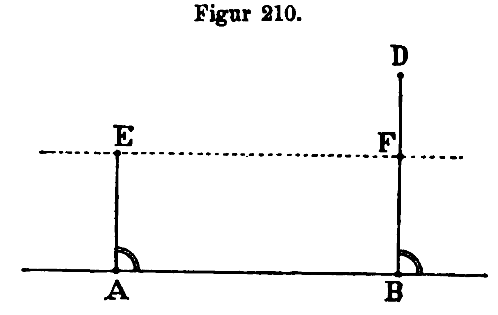
Figur 208.




Figur 209.




Figur 210.




**I. Auflösung.** Mit Hilfe eines Theodolits sei $AB$ die gegebene Gerade (vergl. Figur 208) und $C$ der gegebene Punkt ausserhalb, durch den die Parallele gehen soll. Man wählt einen beliebigen Punkt auf $AB$, etwa $A$, und misst den Winkel $\alpha$, wobei $B$ ein möglichst entfernter Gegenstand sein soll. Hierauf begebe man sich mit dem Instrument nach $C$ und visiere von dort $A$ an, hierauf drehe man das Instrument um den Winkel $\alpha$ und stecke einen Punkt $D$ in der Visur ab. Dieser im Verein mit $C$ bestimmt die parallele Gerade.

**II. Auflösung.** Mit Hilfe des Messbandes allein kann auch eine Parallele abgesteckt werden. Man trage (vergleiche Figur 209) in die Verlängerung von $AC$ die Länge:

$$CD = AC$$

auf. Wähle hierauf einen beliebigen Punkt $B$ auf der gegebenen Geraden. Wird $BD$ gemessen und sodann:

$$DE = EB$$

ausgesteckt, so bestimmt $C$ mit $D$ die zu $AB$ parallele Linie.

**III. Auflösung.** Hat man ein Instrument, das nur einen rechten Winkel abzustecken erlaubt, so werden $E$ und $B$ durch Baken bezeichnet und man sucht auf $B$ den Punkt $A$ auf, dass $\sphericalangle EAB = 90^0$. Sodann steckt man $DB \perp AB$ aus und trägt auf diese die Länge $FB = EA$ auf (vergl. Figur 210).

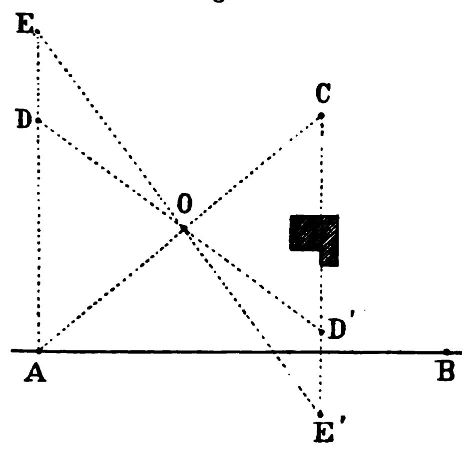
Es ist selbstverständlich, dass auch ein Instrument mit beliebigem, aber konstantem

Winkel in gleicher Weise zur Absteckung einer Parallele verwendet werden kann. Man wird aber, wo es halbwegs angeht, immer die Auflösung mit Hilfe eines Theodolits wählen.

---

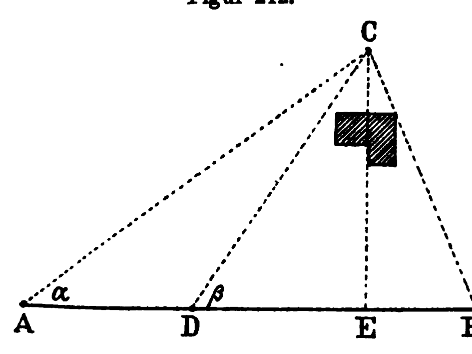
**Aufgabe 72.** Es seien zwei Punkte $AB$ gegeben, ferner ein dritter Punkt $C$, von dem aus auf $AB$ eine Senkrechte gefällt werden soll. In dieser Senkrechten liegt aber ein Hindernis. Diese Aufgabe ist 1) bloss mit Messband und Winkelspiegel auszuführen, 2) mit dem Theodolit.

Figur 211.




**Bemerkung.** Diese Auflösung löst zugleich das Problem: **Eine Parallele zu $AE$ durch $C$ zu legen.**

Figur 212.




**I. Auflösung.** Man stecke beliebige Punkte $E$ und $D$ so ab, dass (vergleiche Figur 211):

$$EA \perp AB$$
$$DA \perp AB$$

Sodann stecke man auf $AC$ den Punkt $O$ so ab, dass:

$$AO = OC$$

Werden nun die Punkte $E'$ und $D'$ so abgesteckt, dass:

$$OE = OE'$$
$$OD = OD'$$

so liegen $D'E'$ in der auf $AB$ durch $C$ gehenden Senkrechten. Denn es ist nach Konstruktion:

$$\triangle ODA \backsim \triangle OD'C$$
$$\triangle OEA \backsim \triangle OE'C$$

also:

$$AE \parallel CE'$$

Da aber:

$$AE \perp AB$$

muss auch:

$$CE' \perp AB$$

sein.

**II. Auflösung.** Ist $C$ unzugänglich und $A$ von $B$ ziemlich weit entfernt, so bestimme man auf $AB$ einen Punkt $D$ (vergl. Fig. 212). Hierauf werden gemessen:

$$AD = a$$
$$\sphericalangle CAB = \alpha$$
$$\sphericalangle CDB = \beta$$

Sei sodann:

$$CE \perp AB$$

so ist im $\triangle CED$:

$$CE = DE \operatorname{tg} \beta$$

und im $\triangle ECA$:

$$CE = (DE + a) \operatorname{tg} \alpha$$

also:

$$DE \operatorname{tg} \beta = (DE + a) \operatorname{tg} \alpha$$

oder:

$$DE (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha) = a \operatorname{tg} \alpha$$

d. h.:

$$DE = \frac{a \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha} = \frac{a \sin \alpha \cos \beta}{\sin (\beta - \alpha)}$$

---

**Aufgabe 73.** Es soll über einen unzugänglichen Punkt $B$ der Geraden $AB$ sehr genau diese Senkrechte errichtet werden.

Figur 213.

**Erkl. 139.** Im Dreieck $ADC$ haben wir nach dem Sinussatz (vergl. Kleyers Trigonometrie):

$$DC : AC = \sin\beta : \sin\alpha$$

also:

$$DC = AC \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

ebenso wird im Dreieck $BCD$:

$$BC : CD = \sin\delta : \sin CBD$$

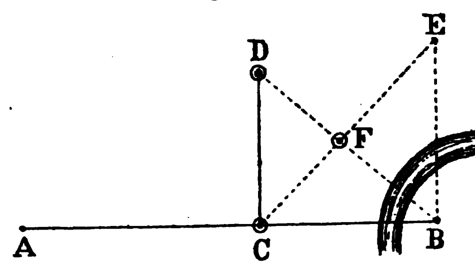
Nun ist aber:

$$\sphericalangle \gamma = \sphericalangle \delta + \sphericalangle CBD$$

also:

$$\sphericalangle CBD = \sphericalangle \gamma - \delta$$

Figur 214.




**Erkl. 140.** Die Aehnlichkeit der Dreiecke $DCF$ und $EFB$ folgt aus nachstehenden Betrachtungen:

$$\sphericalangle DFC = \sphericalangle EFB$$

als Gegenwinkel. Da

$$DC \parallel BE$$

so ist:

$$\sphericalangle DCE = \sphericalangle CEB$$

und analog:

$$\sphericalangle CDB = \sphericalangle DBE$$

also sind alle drei Winkel paarweise einander gleich, demnach die Dreiecke ähnlich.

**I. Auflösung.** Man bestimme sich auf der Geraden $AB$ einen Punkt $C$ und messe:

$$AC = a$$

sodann wähle man sich einen beliebigen Punkt $D$ und messe im $\triangle ACD$ alle Winkel ($\alpha, \beta, \gamma$ vergl. Figur 213) und auch den

$$\sphericalangle BDC = \delta$$

Dann ist im $\sphericalangle ADC$ (vergl. Erkl. 139):

$$1) \ldots DC = a \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

ferner im $\triangle CDB$:

$$2) \ldots BC = DC \cdot \frac{\sin\delta}{\sin(\gamma - \delta)}$$

Ferner ist:

$$3) \ldots AB = AC + BC = a + BC$$

also auch gegeben. Aus dem rechtwinkligen $\triangle ABE$ folgt weiter:

$$4) \ldots AE = \frac{AB}{\cos\beta}$$

womit $AE$ gegeben ist. Weiter haben wir im $\triangle ADC$:

$$5) \ldots AD = a \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$$

also:

$$6) \ldots DE = AE - AD$$

Um den Punkt $E$ zu finden, braucht man also nur auf der Verlängerung von $AD$ die Strecke $DE$ abzumessen.

Zur Kontrolle kann in $E$ der Winkel $\varepsilon$ gemessen werden. Es muss:

$$\beta + \varepsilon = 90^0$$

**II. Auflösung.** Soll die Absteckung von $E$ ohne Theodolit bloss mit Messband und Winkelspiegel oder Prismenkreuz gemacht werden, wobei natürlich die Genauigkeit nicht so gross sein wird, wie bei dem vorhergehenden Verfahren, so kann man operieren wie folgt (vergl. Figur 214):

Man wähle sich auf $AB$ einen Punkt $C$ und errichte $DC \perp AB$. Dann suche man mit dem Winkelspiegel auf $DB$ denjenigen Punkt $F$, für welchen:

$$CF \perp DB$$

und messe:

$$CF = a$$
$$DF = b$$

Sodann ist (vergl. Erkl. 140):

$$\triangle DCF \sim \triangle EFB$$

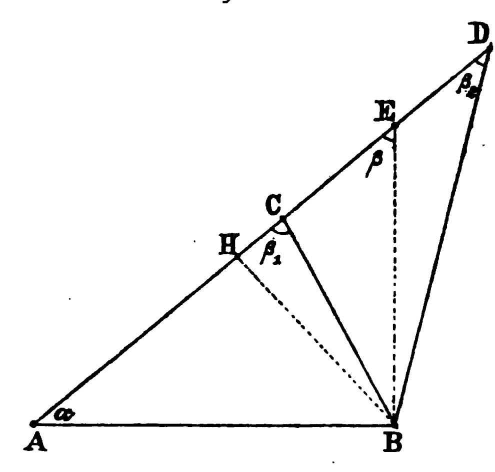
also:

$$EF = \frac{CF \cdot BF}{DF}$$

und wegen:

$$\triangle BCF \sim \triangle CFD$$

Figur 215.




**Erkl. 141.** Es ist in den rechtwinkligen Dreiecken $CBH$, $EHB$, $DBH$ nach Kleyers Trigonometrie:

$$\begin{cases} CH = BH \operatorname{ctg} \beta_1 \\ EH = BH \operatorname{ctg} \beta \\ DH = BH \operatorname{ctg} \beta_2 \end{cases}$$

Dividiert man die erste Gleichung durch die zweite resp. dritte, so folgen die nebenstehenden Formeln.

**Erkl. 142.** Wir haben:

$$\frac{CH}{CH+x} = \frac{\operatorname{ctg}\beta_1}{\operatorname{ctg}\beta}$$

also:

$$CH \cdot \operatorname{ctg}\beta = CH \operatorname{ctg}\beta_1 + x \operatorname{ctg}\beta_1$$

d. h.:

$$CH(\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\beta_1) = x \operatorname{ctg}\beta_1$$

Analog folgt aus:

$$\frac{CH}{CH+a} = \frac{\operatorname{ctg}\beta_1}{\operatorname{ctg}\beta_2}$$

$$CH(\operatorname{ctg}\beta_2 - \operatorname{ctg}\beta_1) = a \operatorname{ctg}\beta_1$$

Dividiert man die drittletzte dieser Gleichungen durch die letzte, so folgt:

$$x = a \frac{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\beta_1}{\operatorname{ctg}\beta_2 - \operatorname{ctg}\beta_1}$$

vergl. Kleyers Goniometrie, Formel 8).

$$= a \frac{\frac{\cos\beta}{\sin\beta} - \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}}{\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} - \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}}$$

Wird nun Zähler und Nenner auf gleichen Nenner gebracht und beachtet, dass allgemein:

$$\sin(m-n) = \sin m \cos n - \cos m \sin n$$

ist, so folgt das nebenstehende Resultat.

auch:

$$BF = \frac{FC \cdot FC}{DF}$$

Wir haben also:

$$EF = \frac{a \cdot BF}{b}$$

und

$$BF = \frac{a \cdot a}{b}$$

also:

$$EF = \frac{a^3}{b^2}$$

Aus dieser Gleichung ist $EF$ zu berechnen. Dieses Verfahren ist aber wenig praktisch.

**III. Auflösung.** Man stelle sich mit dem Theodolit im Punkt $A$ auf und bezeichne irgend eine Richtung, die durch den Winkel $\alpha$ gegeben ist. In dieser Richtung wähle man zwei Punkte $C$ und $D$ nahe der senkrechten Richtung und messe (vergleiche Figur 215):

$$CD = a$$

ferner die Winkel:

$$\sphericalangle ACB = \beta_1$$
$$\sphericalangle ADB = \beta_2$$

Es soll nun der Punkt $E$ gefunden werden, für welchen:

$$\sphericalangle AEB = 90^0 - \alpha = \beta$$

ist. Setzt man (vergl. Figur 215):

$$CE = x$$
$$ED = y$$

so hat man zunächst:

$$x + y = a$$

ferner ist, wenn:

$$BH \perp AD$$

ist (vergl. Erkl. 141):

$$\frac{CH}{EH} = \frac{\operatorname{ctg}\beta_1}{\operatorname{ctg}\beta}$$

$$\frac{CH}{DH} = \frac{\operatorname{ctg}\beta_1}{\operatorname{ctg}\beta_2}$$

nun ist:

$$EH = CH + x$$
$$DH = a + CH$$

wir haben also:

$$\frac{CH}{CH+x} = \frac{\operatorname{ctg}\beta_1}{\operatorname{ctg}\beta}$$

$$\frac{CH}{CH+a} = \frac{\operatorname{ctg}\beta_1}{\operatorname{ctg}\beta_2}$$

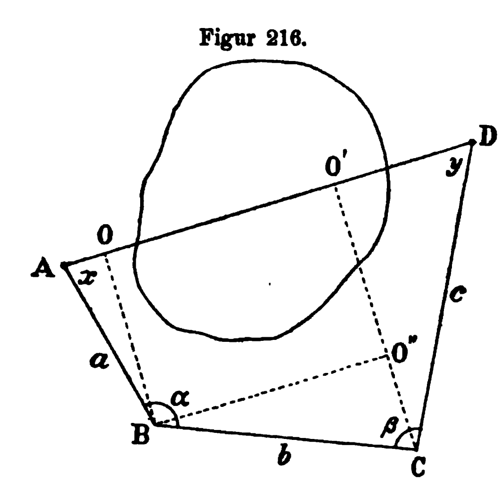
Aus diesen Gleichungen folgt (vergleiche Erkl. 142):

$$x = a \cdot \frac{\sin\beta_2}{\sin\beta} \cdot \frac{\sin(\beta_1 - \beta)}{\sin(\beta_1 - \beta_2)}$$

Diese letztere Formel ist für die logarithmische Berechnung sehr geeignet.

**Aufgabe 74.** Durch einen Wald, der ziemlich ausgedehnt ist, soll ein Weg gebaut werden. Es handelt sich um die Absteckung seiner Richtung (vergleiche Figur 216).

Figur 216.




**Erkl. 143.** Es ist:

$$z = OA + OO' + O'D$$
$$= a \sin x + b \sin(\alpha + x - 180) + c \sin y$$

da aber:

$$\sin(\alpha + x - 180) = -\sin[180^0 - (\alpha + x)]$$

und allgemein:

$$\sin[180^0 - (\alpha + x)] = \sin(\alpha + x)$$

so wird:

$$\sin(\alpha + x - 180^0) = -\sin(\alpha + x)$$

**Erkl. 144.** Es ist:

$$\cos(360 - \varphi) = \cos\varphi$$
$$\cos(\varphi - 180^0) = \cos(180^0 - \varphi) = -\cos\varphi$$

ferner:

$$\cos(\varphi + \psi) = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi$$

**Bemerkung.** Natürlich wird man bei ausgedehnteren Objekten mehr Seiten und mehr Winkel zu messen haben, aber das Verfahren ändert sich nicht, auch die Formeln behalten ihre Gestalt, nur haben sie entsprechend mehr Glieder.

**I. Auflösung.** Seien $A$ und $D$ die beiden Punkte, durch welche der Weg projektiert ist. Man ziehe von $A$ gegen $D$ einen Polygonzug $ABCD$, in welchem gemessen werden:

$$AB = a\ ,\ BC = b\ ,\ CD = c$$

ferner die Winkel:

$$ABC = \alpha\ ,\ BCD = \beta$$

Es handelt sich um die Bestimmung der Winkel:

$$DAB = x \text{ und } ADC = y$$

eventuell auch um die Länge:

$$AD = z$$

Wir haben zunächst für die Winkelsumme im Viereck $ABCD$:

$$\text{I} \ldots \underline{x + y + \alpha + \beta = 360^0}$$

Ferner ist, wenn $BO \parallel O'C$ und $\perp$ zu $AD$, ferner $BO'' \parallel AD$ gezogen wird:

$$AD = z = AO + OO' + O'D$$

Nun ist:

$$AO = AB \sin x = a \sin x$$
$$OO' = BO'' = BC \sin(OBC)$$
$$\sphericalangle O''BC = \sphericalangle ABC - \sphericalangle ABO''$$
$$= \alpha - (180 - x)$$

Wir haben also:

$$OO' = -b \sin(\alpha + x)$$

Endlich ist:

$$O'D = c \sin y\ .$$

also (vergl. Erkl. 143):

$$\text{II} \ldots \underline{z = a \sin x - b \sin(\alpha + x) + c \sin y}$$

Endlich ist:

$$OC' = O'O'' + O''C$$
$$OC' = OB + O''C$$

nun ist aber:

$$OB = a \cos x$$
$$O''C = b \cos[\alpha - (180 - x)]$$
$$OC' = c \cos y$$

Wir haben also:

$$\text{III} \ldots \underline{c \cos y = a \cos x + b \cos(\alpha + x)}$$

Hiermit haben wir drei Gleichungen für die Unbekannten $xyz$ gewonnen.

Ersetzen wir in der letzten Gleichung aus I:

$$y \text{ durch } 360^0 - (\alpha + \beta + x)$$

so folgt:

$$c \cos[360^0 - (\alpha + \beta + x)] = a \cos x$$
$$+ b \cos(\alpha + x - 180)$$

oder (vergl. Erkl. 144):

$$c \cos(\alpha + \beta + x) = a \cos x - b \cos(\alpha + x)$$

Daraus folgt:

$$c \cos(\alpha + \beta) \cos x - c \sin(\alpha + \beta) \sin x = a \cos x - b \cos \alpha \cos x + b \sin \alpha \sin x$$

Ordnet man, so folgt:

$$\sin x [b \sin \alpha + c \sin(\alpha + \beta)] = \cos x [c \cos(\alpha + \beta) + b \cos \alpha + a]$$

$$\text{oder: } \operatorname{tg} x = \frac{c \cos(\alpha + \beta) + b \cos \alpha + a}{b \sin \alpha + c \sin(\alpha + \beta)}$$

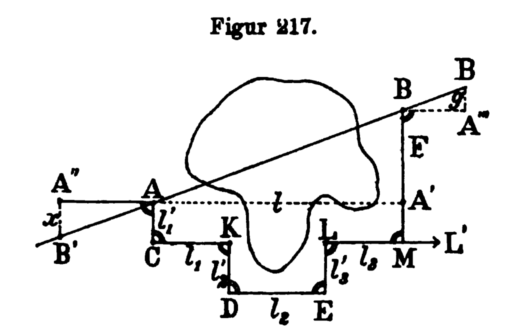
Ist $x$ berechnet, so ergibt sich leicht:

$$y = 360^0 - (\alpha + \beta) + x)$$

und

$$z = a \sin x + b \sin(\alpha + x - 180^0) + c \sin y$$

womit die Aufgabe gelöst ist.




Figur 217.

**II. Auflösung.** Wird nicht die äusserste Genauigkeit verlangt, so kann man auch verfahren wie folgt. Es wird vorausgesetzt, dass man ein Winkelinstrument mit konstantem Winkel $= 90^0$ hat.

Wir bezeichnen einen Punkt $A''$, der ungefähr in der abzusteckenden Richtung $AB$ liegt und messen die Länge:

$$AA'' = a$$

Sodann errichten wir (vergl. Figur 217):

$$AC \perp AA''$$
$$KC \perp CA$$
$$KD \perp KC$$
$$ED \perp DK$$
$$EL \perp DE$$
$$LL' \perp EL$$

dabei werden die Längen:

$$CK = l_1, \quad AC = l_1', \quad EL = l_3'$$
$$DE = l_2, \quad KD = l_2'$$

gemessen. Nun suche man auf $AL'$ jenen Punkt $M$ für den $\sphericalangle LMB = 90^0$, also $LM \perp BM$, messe die Länge:

$$MB = L$$

und stecke den Punkt $A'$ in einer Entfernung:

$$MA' = (l_1' + l_2') - l_3'$$

ab. Dann haben wir drei ähnliche Dreiecke:

$$AA''B' \backsim AA'B \backsim BA'''B''$$

also haben wir:

$$\frac{A''B'}{AA''} = \frac{A'B}{AA'} = \frac{A'''B''}{BA'''}$$

Nun ist aber:

$AA''$ gemessen, also bekannt

$AA' = l = l_1 + l_2 + l_3$, also bekannt

$$A'B = MB - MA'$$
$$= L - [(l_1' + l_2') - l_3']$$

$BA'''$ = beliebig zu nehmen, aber $\perp MB$, also auch bekannt. Hieraus lassen sich nun:

$$A''B' = AA'' \frac{A'B}{AA''}$$

und

$$B''A''' = BA''' \cdot \frac{A'B}{AA''}$$

**Bemerkung.** Es ist ratsam, der Kontrolle wegen, wenn die Strecke $AB$ eine etwas grössere Ausdehnung besitzt, und es angeht, das Hindernis auch von der andern Seite zu umgehen. Man nimmt dann aus den gewonnenen Resultaten das Mittel. Nur dürfen die Seitenlängen $AC$, $CK$, $KD$ nicht zu gross genommen werden, weil dann die einfachen Winkelinstrumente nicht genaue Resultate geben, das Winkelfernrohr am Stativ natürlich ausgenommen. Die Methode der Polygonumschliessung mit einem Theodolit liefert die genauesten Resultate.

leicht berechnen. Steckt man diese Längen $\perp$ zu $AA''$ resp. $BA'''$, so erhält man die Punkte $B'$ und $B''$, also auch beiderseits die Richtung $AB$.

---

**Aufgabe 75.** In die Verbindungslinie zweier Punkte, die sehr weit von einander entfernt sind, und zwischen welchen Hindernisse aller Art stehen, sollen mehrere Punkte eingeschaltet werden.

**I. Auflösung.** Seien $A$ und $B$ die gegebenen Punkte. Man führe einen Linienzug $ACDEB$, bei welchem die Winkel $C$, $D$, $E = 90^0$ werden und messe die Strecken (vergl. Figur 218):

$$AC = a, \quad CD = b,$$
$$DE = c, \quad EB = d$$

Setzt man:

$$\sphericalangle CAB = \varphi$$
$$CA = x, \quad EN = y$$

so wird:

$$\sphericalangle \text{ bei } M = 90 - \varphi$$
$$\sphericalangle \text{ „ } N = \varphi$$

und man hat:

$$CM = x = AC \operatorname{tg}\varphi = a \operatorname{tg}\varphi$$
$$DM = DN \cdot \operatorname{tg}\varphi$$
$$\frac{BE}{EN} = \operatorname{tg}\varphi$$

oder:

$$x = a \operatorname{tg}\varphi$$
$$b - x = (c - y) \operatorname{tg}\varphi$$
$$d = y \operatorname{tg}\varphi$$

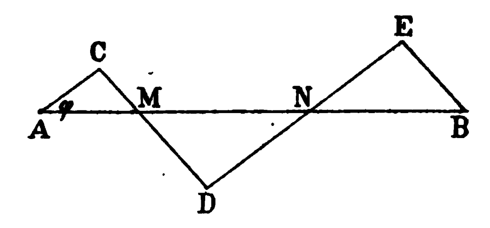
oder:

$$b - x = (c - y)\frac{x}{a}$$
$$d = y\frac{x}{a}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen liefert (vergl. Erkl. 145):

$$x = a \cdot \frac{b + d}{a + c}$$
$$y = d\,\frac{a + c}{b + d}$$

Figur 218.




**Erkl. 145.** Die Gleichung:

$$b - x = (c - y)\frac{x}{a}$$

liefert ausmultipliziert:

$$ab - ax = xc - xy$$

da aber:

$$xy = ad$$

so wird:

$$ab - ax = xc - ad$$

oder geordnet:

$$ab + ad = xa + xc$$

d. h.:

$$a(b + d) = x(a + c)$$

oder:

$$x = a\frac{b + d}{a + c}$$

Da ferner:

$$xy = ad$$

so folgt:

$$y = \frac{1}{x} \cdot ad = \frac{ad}{a} \cdot \frac{a + c}{b + d} = d\,\frac{a + c}{b + d}$$

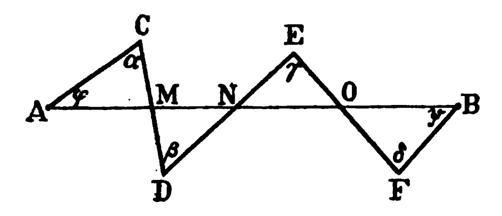
**II. Auflösung.** (Vergl. Figur 219). Ist ein rechtwinkliger Zug, wie oben, nicht möglich, so benützt man einen schiefwinkligen Zug, in welchem alle Winkel und Seiten gemessen werden.

Seien wieder $A$ und $B$ die gegebenen Punkte und $ACDEFB$ der schiefwinklige Zug, in welchem gemessen wurden:

$$AC = a, \quad \sphericalangle ACD = \alpha$$
$$DC = b, \quad \sphericalangle DCE = \beta$$
$$DE = c, \quad \sphericalangle DEF = \gamma$$
$$EF = d, \quad \sphericalangle EFB = \delta$$
$$FB = e$$

---

Figur 219.




**Erkl. 146.** Die Gleichung II lässt sich schreiben wie folgt:

$$\frac{\sin(a+\varphi)}{\sin\varphi} = \frac{a}{x}$$

also:

$$\frac{\sin a\cos\varphi + \cos a\sin\varphi}{\sin\varphi} = \frac{a}{x}$$

d. h.:

$$\sin a \operatorname{ctg}\varphi + \cos a = \frac{a}{x}$$

oder:

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{a - x\cos a}{x\sin a}$$

da nun:

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}$$

so wird:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{x\sin a}{a - x\cos a}$$

Diese Form werden wir sofort anwenden.

Setzt man:

$$\sphericalangle CAB = \varphi, \quad \sphericalangle ABF = \psi$$
$$CM = x, \quad EN = y, \quad EO = z$$

so folgt:

$$\sphericalangle \text{ bei } M = 180^0 - (\varphi + \alpha)$$
$$\sphericalangle \;\; " \;\; N = 180^0 - \{\beta + [180 - (\varphi + \alpha)]\}$$
$$= \varphi - \alpha - \beta$$
$$\sphericalangle \;\; " \;\; O = 180 - [\gamma + \varphi + \alpha - \beta]$$

Endlich:

$$\sphericalangle \psi = \{180^0 - [180 - (\gamma + \varphi + \alpha - \beta)]\}$$

woraus:

$$\text{I} \ldots \psi - \varphi = \gamma + \alpha - \beta$$

folgt.

Ferner ist im $\triangle ACM$ (vergl. Erkl. 146):

$$\text{II} \ldots x = a\frac{\sin\varphi}{\sin(a+\varphi)}$$

im $\triangle MDN$:

$$\text{III} \ldots \frac{b-x}{c-y} = \frac{\sin N}{\sin M}$$

und im $\triangle NEO$:

$$\text{IV} \ldots \frac{y}{z} = \frac{\sin O}{\sin N}$$

und endlich im $\triangle OFB$:

$$\text{V} \ldots \frac{d-z}{e} = \frac{\sin O}{\sin\varphi}$$

Damit haben wir fünf Gleichungen für die fünf Unbekannten:

$$x,\ y,\ z,\ \varphi,\ \psi$$

gewonnen (vergl. Erkl. 147).

**Erkl. 147.** Die direkte Auflösung der angeführten Gleichungen wäre nicht rationell. Man hat daher folgenden Weg einzuschlagen:

Man zeichne sich in einem genügend grossen Massstab den Zug und verbinde $A$ und $B$. Hierauf entnehme man der Zeichnung einen Näherungswert für $x$, der $x_0$ genannt werden möge. Mit diesem rechne man $\varphi_0$ aus der Gleichung II, welche man schreibt wie folgt:

$$\text{II}' \ldots \operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{x_0\sin\alpha}{a - x_0\cos\alpha}$$

Hierauf wird aus der Gleichung I der Wert $\psi_0$ bestimmt. Es ist:

$$\text{I}' \ldots \psi_0 = \gamma + \alpha - \beta + \varphi_0$$

Mit den Werten $\psi_0$ und $\varphi_0$ bestimme man die Winkel:

$$M_0,\ N_0,\ O_0$$

und damit zunächst $z_0$ aus V:

$$\text{V}' \ldots z_0 = d - e\frac{\sin\psi_0}{\sin O_0}$$

und ferner $y_0$ aus IV:

$$\text{IV}' \ldots y_0 = z_0\frac{\sin O_0}{\sin N_0}$$

Rechnet man vermittels der Gleichung III die Grösse $x_1$:

$$\text{III}' \ldots x_1 = b + \frac{\sin N_0}{\sin M_0}(c - y_0)$$

so wird im allgemeinen:

$$x_1 \gtrless x_0$$

sein; es ist:

$$x_0 = x_1$$

wenn der angenommene Wert für $x$, d. h. $x_0$, auch streng der gesuchte ist.

Mit der Annahme $x_0 + \triangle x$ rechne man ebenso wie mit $x_0$ ein neues $x_2$, dann ist der wahre Wert sehr nahe gleich:

$$x_0 + \frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0} \triangle x$$

$\triangle x$ wird gewöhnlich $= 1$ m gesetzt.

---

**Aufgabe 76.** Zwischen zwei Punkte $A$ und $B$ soll ein Punkt $C$ eingeschaltet werden. $A$ und $B$ liegen ziemlich weit von einander und es kann von $D$ weder nach $A$ noch nach $B$ visiert werden.

Figur 220.

**Auflösung.** Seien $A$ und $B$ (vergleiche Figur 220) die gegebenen Punkte. Man wähle sich einen Punkt $D$ in der Nähe des verlangten Punktes $C$ und verbinde $D$ mit $A$ und $B$ durch einen Polygonzug, in welchem alle Seiten mit Ausnahme $AD$ und alle Winkel mit Ausnahme jener bei $A$ und $D$ gemessen werden. Diese nicht gemessenen Grössen werden nach der in der Polygonometrie gegebenen Anleitung berechnet. Analog verbindet man $B$ mit $D$. Sodann sind im $\triangle ABD$ gegeben die Seiten $AB = a$, $BD = b$ und der Winkel $ADB = \gamma$.

Zieht man nun $BD' \parallel AD$, $AD' \parallel DB$ und verbindet $D$ mit $D'$, so schneidet $DD'$ die Gerade $AB$ im Punkte $C$.

Setzt man nun:

$$DC = x$$

$$\sphericalangle ADC = \varphi$$

so wird der Punkt $C$ bestimmt sein, sobald man diese Grössen berechnet hat.

Zunächst hat man die Winkel $\alpha$ und $\beta$ zu bestimmen aus den Gleichungen:

$$1) \ldots \alpha + \beta = 180^0 - \gamma$$

$$2) \ldots \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b}$$

Dieses geschieht in bekannter, oft auseinandergesetzter Art. Dann ist im $\triangle ADC$ (vergl. Erkl. 148):

$$3) \ldots x = a \frac{\sin\beta}{\sin(\varphi + \beta)}$$

und im $\triangle DCB$:

$$3') \ldots x = b \frac{\sin\alpha}{\sin(90 - \varphi - \alpha)}$$

woraus:

$$a \frac{\sin\beta}{\sin(\varphi + \beta)} = b \frac{\sin\alpha}{\sin(90 - \varphi + \alpha)}$$

oder:

$$4) \ldots \frac{\sin(90 + \alpha - \varphi)}{\sin(\varphi + \beta)} = \frac{b \sin\alpha}{a \sin\beta}$$

folgt. Um hieraus $\varphi$ zu berechnen setze man:

$$90 - \alpha - \varphi = \mu$$

$$\varphi + \beta = \nu$$

so wird:

$$5) \ldots A = 90 - \alpha + \beta = \mu + \nu$$

ferner:

$$6) \ldots \frac{\sin\mu}{\sin\nu} = \frac{b \sin\alpha}{a \sin\beta}$$

**Erkl. 148.** Im Dreiecke $ADC$ haben wir nach dem Sinussatze:

$$DC : AD = \sin\beta : \sin[180 - (\varphi + \beta)]$$

da aber:

$$\sin[180 - (\varphi + \beta)] = \sin(\varphi + \beta)$$

so folgt:

$$DC : AD = \sin\beta : \sin(\varphi + \beta)$$

oder:

$$DC = AD \frac{\sin\beta}{\sin(\varphi + \beta)}$$

**Erkl. 149.** Es ist:

$$\frac{\sin(A - \nu)}{\sin\nu} = \frac{\sin A \cos\nu - \cos A \sin\nu}{\sin\nu}$$

also:

$$= \sin A \operatorname{ctg}\nu - \cos A = \frac{b \sin\alpha}{a \sin\beta}$$

daraus folgt:

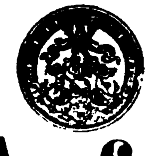
$$\sin A \operatorname{ctg}\nu = \cos A + \frac{b \sin\alpha}{a \sin\beta}$$

oder:

$$\operatorname{ctg}\nu \operatorname{ctg} A + \frac{b \sin\alpha}{a \sin\beta \sin A}$$

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

1291. Heft. | Preis des Heftes 25 Pf. | Vermessungskunde (Geodäsie). Erster Teil. Forts. v. Heft 1290. — Seite 177—192. Mit 20 Figuren.




# Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

**viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,**

aus allen Zweigen

der **Rechenkunst,** der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus **allen Zweigen** der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie;** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's;** der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

**zum einzig richtigen und erfolgreichen**

**Studium** zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

**Dr. Adolph Kleyer,**

Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

# Vermessungskunde

## (Geodäsie).

**Erster Teil.**

Nach **System Kleyer** bearbeitet von **Dr. W. Láska.**

Fortsetzung von Heft 1290. — Seite 177—192. Mit 20 Figuren.

**Inhalt:**



**Stuttgart 1894.**

Verlag von Julius Maier.

**Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.**

# PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form,** mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch **alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der **Lösungen** derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht **vergessenen** mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. **Kleyer,** Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

**Stuttgart.** **Die Verlagshandlung.**

oder:

$$\frac{\sin(A-\nu)}{\sin\nu}=\frac{b\sin\alpha}{a\sin\beta}$$

woraus (vergl. Erkl. 149):

$$\operatorname{ctg}\nu=\operatorname{ctg}A+\frac{b\sin\alpha}{a\sin\beta\sin A}$$

hiedurch ist $\mu$ und $\nu$ berechnet und somit auch $\varphi$. Die Gleichungen 3) oder 3') liefern sodann $x$.

Nehmen wir an, es wäre der Punkt $c$ nicht zugänglich, dann können die Punkte $E$ oder $E'$ abgesteckt werden, die von $x$ um beliebige Winkel $\delta$, $\varepsilon$, abstehen.

Man hat aus dem $\triangle AED$:

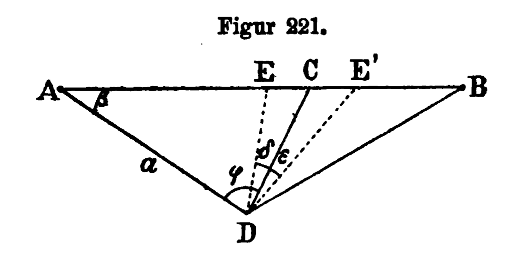
$$DE=a\frac{\sin\beta}{\sin[180^0-\beta-(\varphi-\delta)]}$$

oder:

$$DE'=v\frac{\sin\beta}{\sin[180^0-\beta-(\varphi+\varepsilon)]}$$

wodurch die Punkte $E$ und $E'$ bestimmt sind (vergl. Figur 221).

Figur 221.

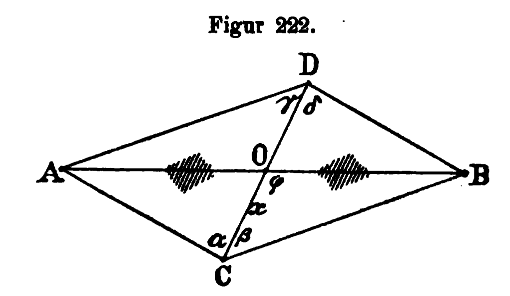



Dieses letztere Verfahren hat man einzuschlagen, wenn im gegebenen Falle Zwischenpunkte zwischen $A$ und $B$ einzuschalten sind.

---

**Aufgabe 77.** Zwei Punkte $A$ und $B$ (vergl. Figur 222) sind gegeben. Ihre Entfernung ist ziemlich gross und zwischen ihnen stehen zwei Hindernisse. Man soll einen dritten Punkt in ihre Verbindungslinie einschalten.

Figur 222.




**Erkl. 150.** Es ist im $\triangle ACB$:

$$\frac{AC}{BC}=\frac{\sin(\varphi+\beta)}{\sin(\varphi-\alpha)}$$

denn es ist:

$$\sphericalangle ABC=180^0-(\varphi+\beta)$$

und

$$\sphericalangle CAB+\alpha=\varphi$$

also:

$$\sphericalangle CAB=\varphi-\alpha$$

ferner hat man allgemein:

$$\sin[180^0-(\varphi+\beta)]=\sin(\varphi+\beta)$$

**Auflösung.** Man suche sich einen Punkt $C$ aus, aus dem $A$ und $B$ sichtbar sind. Ferner stecke man eine Gerade $CD$ aus, deren Länge gemessen wird. Ebenso misst man die Winkel:

$$ACD=\alpha$$
$$DCB=\beta$$
$$ADC=\gamma$$
$$CDB=\delta$$

wozu noch die Seite:

$$CD=d$$

kommt. Die zu berechnende Strecke ist:

$$CO=x$$

und ein Hilfswinkel:

$$\sphericalangle COB=\varphi$$

Man hat im $\triangle CDB$:

$$CB=d\frac{\sin\delta}{\sin(\delta+\beta)}$$

ferner im $\triangle CDA$:

$$AC=d\frac{\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}$$

Weiter im $\triangle ACB$ (vergl. Erkl. 150):

$$\frac{AC}{BC}=\frac{\sin(\varphi+\beta)}{\sin(\varphi-\alpha)}$$

Wir haben aber auch:

$$\frac{AC}{BC}=\frac{AC}{d}:\frac{BC}{d}=\frac{\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}:\frac{\sin\delta}{\sin(\delta+\beta)}$$

**Erkl. 151.** Wir haben:

$$x \sin(\varphi - \alpha) = \sin(\varphi + \beta)$$

also:

$$x \sin\varphi \cos\alpha - x \cos\varphi \sin\alpha = \sin\varphi \cos\beta + \cos\varphi \sin\beta$$

Ordnen wir nach $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$, so folgt:

$$\sin\varphi(x\cos\alpha - \cos\beta) = \cos\varphi(x\sin\alpha + \sin\beta)$$

also:

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{x\sin\alpha + \sin\beta}{x\cos\alpha - \cos\beta}$$

da nun:

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \operatorname{tg}\varphi$$

ist, so folgt die nebenstehende Formel.

Setzt man demnach:

$$\frac{AC}{BC} = x$$

so ist $x$ gegeben und wir haben die Gleichung:

$$x = \frac{\sin(\varphi + \beta)}{\sin(\varphi - \alpha)}$$

aus welcher (vergl. Erkl. 151):

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{x\sin\alpha + \sin\beta}{x\cos\alpha - \cos\beta}$$

Sodann wird aus dem $\triangle AOC$:

$$x = AC\frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\sin\varphi}$$

oder:

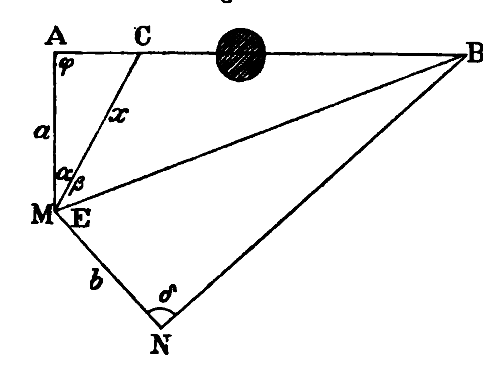
$$x = BC\frac{\sin(\beta + \varphi)}{\sin\varphi}$$

werden beide Werte berechnet, so hat man eine Kontrolle der Rechnung.

---

**Aufgabe 78.** Zwischen zwei Punkten $A$ und $B$ liegt ein Hindernis. Es soll ein Zwischenpunkt $C$ in der Nähe von $A$ eingeschaltet werden. Die Entfernung von $A$ und $B$ ist ziemlich gross und $A$ unzugänglich.

Figur 223.




**Auflösung.** Man wähle einen beliebigen Punkt $M$, von dem aus $H$ und $b$ sichtbar sind. Von diesem aus nehme man einen geeigneten Winkel $\alpha$ und messe überdies seine Ergänzung $\beta$ zu dem $\sphericalangle AMN$, sowie die Seite $AM = a$. Ebenso wähle man einen zweiten Punkt $N$ und messe (vergl. Fig. 223)

$$MN = b$$
$$\sphericalangle BMN = \varepsilon$$
$$\sphericalangle MNB = \delta$$

Setzt man sodann:

$$MC = x$$

so ist das Problem gelöst, sobald man $x$ kennt. Setzt man:

$$\sphericalangle BAM = \varphi$$

so wird im $\triangle MAC$:

$$\frac{x}{a} = \frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi + \alpha)}$$

und im $\triangle CMB$:

$$\frac{MB}{x} = \frac{\sin(\varphi + \alpha)}{\sin(\varphi + \alpha + \beta)}$$

also wenn man diese Gleichungen multipliziert:

$$\frac{MB}{a} = \frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi + \alpha + \beta)} = k$$

$MB$ findet sich leicht aus dem $\triangle MNB$ und zwar wird:

$$MB = \frac{b\sin\delta}{\sin(\delta + \varepsilon)}$$

**Erkl. 152.** Es ist:

$$\sin(\varphi + \alpha + \beta) = \sin\varphi\cos(\alpha + \beta) + \cos\varphi\sin(\alpha + \beta)$$

also:

$$\frac{\sin(\varphi + \alpha + \beta)}{\sin\varphi} = \cos(\alpha + \beta) + \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\sin(\alpha + \beta)$$

**Bemerkung.** Wählt man verschiedene $\alpha$, so erhält man verschiedene $x$ und man kann so beliebig viele Punkte einschalten.

also ist $k$ gegeben. Nun hat man (vergl. Erkl. 152):

$$\frac{\sin(\varphi + \alpha + \beta)}{\sin\varphi} = \frac{1}{k}$$

oder:

$$\cos(\alpha + \beta) + \operatorname{ctg}\varphi \cdot \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{k}$$

woraus:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k \sin(\alpha + \beta)}{1 - k\cos(\alpha + \beta)}$$

Ist $\varphi$ berechnet, so ergibt sich $x$ aus der obigen Gleichung:

$$x = \frac{a \sin\varphi}{\sin(\varphi + \alpha)}$$

Man wähle $b$ immer möglichst gross.

## 2. Das Abstecken der Kreiskurven.

**Frage 184.** Was versteht man unter dem Abstecken einer Kreiskurve?

**Antwort.** Unter dem Abstecken einer Kreiskurve versteht man die Festlegung von Punkten längs der Peripherie eines gegebenen Kreises.

**Frage 185.** Wozu dient das Abstecken der Kreisbögen?

**Bemerkung.** Wir werden im Anhang des II. Teils noch ein Instrument kennen lernen, welches man zur Lösung der folgenden Aufgaben benützen kann.

**Antwort.** Das Abstecken der Kreisbögen dient zur Ueberführung eines Weges oder einer Eisenbahnlinie aus einer Richtung in eine andere. Handelt es sich um einen Landweg oder eine Landstrasse, so kann man sich mit einer mittleren Genauigkeit begnügen, anders aber bei den Eisenbahnen. Da wird genaue Arbeit verlangt. Denn von der Güte der Arbeit hängt hier die Sicherheit des Betriebes, die Leichtigkeit in der Ueberwindung der Bewegungshindernisse, die Schonung des festliegenden und rollenden Materials ab.

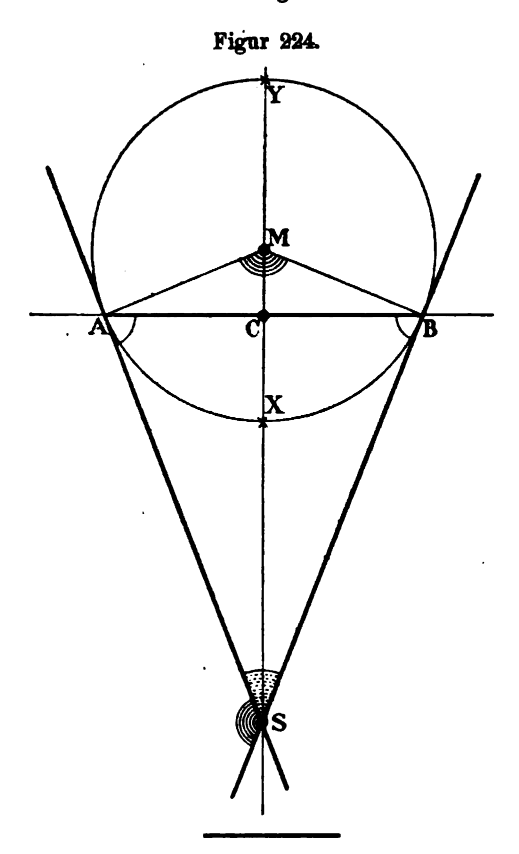
**Frage 186.** Wie lautet das Hauptproblem der Kurvenabsteckung?

**Bemerkung.** Methoden, die in jedem Geometer- und Technikerkalender zu finden sind, haben wir der Raumersparnis wegen nicht besonders angeführt, sondern ganz vom allgemeinen Standpunkt behandelt.

**Antwort.** Das Hauptproblem der Kurvenabsteckung lautet: Es sind zwei Tangenten gegeben und der Radius des sie berührenden Kreises. Es ist der die Tangenten verbindende Kreisbogen abzustecken.

Diese Aufgabe zerfällt in zwei Teile: Abstecken der Hauptpunkte und der Nebenpunkte. Unter den Hauptpunkten werden die Berührungspunkte ($A$, $B$, vergl. Fig. 224) und die Kurvenmitte ($X$) verstanden. Jeder Bogenpunkt, der zwischen diesen liegt, wird ein Zwischen- oder Nebenpunkt genannt.

Figur 224.




**Frage 187.** Welche planimetrischen Sätze kommen hier besonders zur Anwendung?

**Bemerkung.** Es ist:

$\sphericalangle AMS = \sphericalangle SMB$
$\sphericalangle MAS = \sphericalangle MBS = 90^0$
$\sphericalangle CAS = \sphericalangle CBS$
$\sphericalangle ASC = \sphericalangle CSB$

**Antwort.** Unter den planimetrischen Sätzen, die hierbei besonders zur Anwendung kommen, sind zu erwähnen:

1) Der Radius steht auf der Tangente senkrecht.

2) Die von einem Punkt an einen Kreis gezogenen Tangenten sind gleich lang.

3) Die Verbindungslinie des Schnittpunktes zweier Tangenten mit dem Zentrum halbiert den Richtungswinkel und auch den Zentriwinkel der Tangenten (vergl. Figur 224).

**Frage 188.** In welcher Weise wird das Hauptproblem in Angriff genommen?

**Antwort.** Das Hauptproblem kann in zweierlei Weise in Angriff genommen werden:

I. Man steckt zuerst die Tangenten ab und legt hierauf den Kreisbogen an.

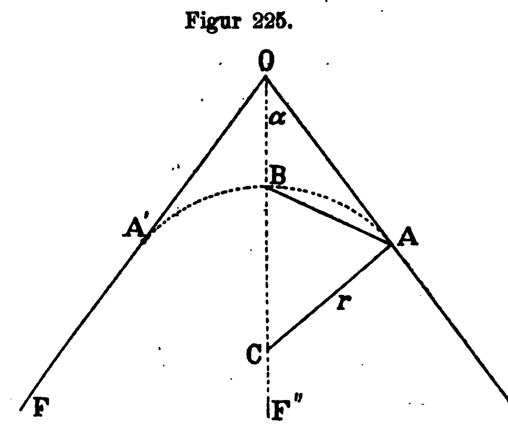
II. Man steckt den Kreisbogen ab und legt die Tangenten an.

Beim Tracieren der Eisenbahnen kommt die erstere Variante fast ausschliesslich vor.

## 3. Aufgaben über Kurvenabsteckung.

**Aufgabe 79.** Es sind zwei Tangenten abgesteckt und der Radius des Kreises gegeben. Man soll die Hauptpunkte bestimmen, vorausgesetzt, dass der Schnittpunkt beider Tangenten zugänglich ist (vergl. Figur 225).

Figur 225.




**Bemerkung.** Als Beispiel diene:

$$\begin{cases} \alpha = 12^0\,46'\,40'' \\ r = 420\,\text{m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} OB = 45{,}54\,\text{m} \\ OA = 200{,}82\,\text{m} \end{cases}$$

**Erkl. 153.** Das Dreieck $ABC$ ist ein gleichschenkliges, also:

$$\sphericalangle CBA = \sphericalangle BAC$$

nun ist aber:

$$\sphericalangle CBA + \sphericalangle BAC = 180^0 - \sphericalangle BCA$$
$$= 180^0 - [90^0 - \alpha]$$
$$= 90^0 + \alpha$$

also ist wegen:

$$\sphericalangle A'BC = \sphericalangle CBA$$

auch:

$$ABC + CBA = ABA = 90^0 + \alpha$$

**Auflösung.** Man misst mit dem Theodolit den Winkel $FOF' = 2\alpha$; dann wird im $\triangle OCA$:

$$OA = r\,\text{tg}\,\alpha$$

ferner:

$$OB = OC - BC = \frac{r}{\sin\alpha} - r$$

oder:

$$OB = r\,\frac{1 - \sin\alpha}{\sin\alpha}$$

Damit sind die Hauptpunkte bestimmt.

Will man auch die Bogenlänge $BA$ haben, so ist:

$$A'A = \frac{(90 - \alpha)^0}{360^0}\,2r\pi$$

Am besten rechnet man so:

| Schema: | Formel: |
|---|---|
| $\log \text{tg}\,\alpha =$ | $\log OA = \log r + \log \text{tg}\,\alpha$ |
| $\log r =$ | $\log OC = \log r - \log \sin\alpha$ |
| $-\log \sin\alpha =$ | |
| $\log r\,\text{tg}\,\alpha =$ | |
| $\log r : \sin\alpha =$ | |
| $OA = r\,\text{tg}\,\alpha =$ | |
| $r : \sin\alpha =$ | |
| $r =$ | |
| $OB = \frac{r}{\sin\alpha} - r =$ | |

Nach der Berechnung stellt man sich wieder mit dem Theodolit in $O$ auf, visiert zuerst den Punkt $F'$ an (vergl. Figur 225), dreht hierauf die Alhidade um den Winkel $\alpha$ und markiert in der Richtung $OC$ einen Punkt $F''$. Hierauf werden von $O$ aus die beiden Längen $OA$ und $OB$ mittels des Messbandes abgemessen.

Zur Kontrolle kann man sich in $B$ aufstellen und mit dem Theodolit den Winkel (vergl. Erkl. 153):

$$ABA' = 90 + \alpha$$

messen, oder noch besser die beiden Winkel:

$$A'BF'' = F''BA = 45 + \frac{\alpha}{2}$$

**Aufgabe 80.** Man soll die vorige Aufgabe für den Fall behandeln, dass der Schnittpunkt der Tangenten unzugänglich ist.

Figur 226.

**Erkl. 154.** Es ist im $\triangle ONB'$:

$$\sphericalangle ONB' = 180^0 - \left[\frac{\gamma}{2} + (180 - \beta)\right]$$
$$= 180^0 - \frac{\gamma}{2} - 180 + \beta$$
$$= \beta - \frac{\gamma}{2}$$

also nach dem Sinussatz;

$$QN = \frac{OB'}{\sin\left(\beta - \frac{\gamma}{2}\right)} \sin\beta$$

da aber:

$$OB' = \frac{m}{\sin\gamma} \sin\alpha$$

so folgt:

$$ON = \frac{m \sin\alpha \sin\beta}{\sin\gamma \sin\left(\beta - \frac{\gamma}{2}\right)}$$

**Auflösung.** In diesem Falle kann das vorliegende Problem auf das vorhergehende zurückgeführt werden, wenn man sich eine Hilfsverbindung ($BB'$, vergl. Fig. 226) wählt und misst:

$$BB' = m$$
$$\sphericalangle ABB' = \alpha$$
$$\sphericalangle BB'A' = \beta$$

Dann ist im $\triangle BOB'$:

$$\sphericalangle \gamma = (\alpha + \beta) - 180^0$$
$$OB = \frac{m}{\sin\gamma} \sin\beta$$
$$OB' = \frac{m}{\sin\gamma} \sin\alpha$$

Rechnet man wie früher:

$$OA = OA' = r \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$$

so wird:

$$B'A' = OA' - OB'$$
$$B'A' = r \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} - \frac{m}{\sin\gamma} \sin\alpha$$

analog:

$$BA = r \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} - \frac{m}{\sin\gamma} \sin\beta$$

ferner ist:

$$OC = \frac{r}{\sin\frac{\gamma}{2}}$$
$$OM = OC - CM = \frac{r}{\sin\frac{\gamma}{2}} - r$$

und (vergl. Erkl. 154):

$$ON = \frac{m \sin\alpha \sin\beta}{\sin\gamma \sin\left(\beta - \frac{\gamma}{2}\right)}$$

also:

$$MN = OM - ON = \frac{r}{\sin\frac{\gamma}{2}} - r - \frac{m \sin\alpha \sin\beta}{\sin\gamma \sin\left(\beta - \frac{\gamma}{2}\right)}$$

Weiter haben wir:

$$NB' = \frac{OB'}{\sin\left(\beta - \frac{\gamma}{2}\right)} \sin\frac{\gamma}{2}$$

und

$$\sphericalangle B'NM = 180^0 - \left(180 - \beta + \frac{\gamma}{2}\right)$$

d. h.:

$$\sphericalangle B'NM = \beta - \frac{\gamma}{2}$$

Man hat also wie folgt zu verfahren: Man stellt sich mit dem Theodolit in $N$ auf,

wobei $N$ durch Abmessung der Strecke $B'N$ auf $BB'$ gewonnen wird und steckt den Winkel $B'NC$ ab, gleich:

$$\beta - \frac{\gamma}{2}$$

Hierauf wird auf der so abgesteckten Richtung die Länge $MN$ abgemessen, wodurch $M$ bestimmt ist.

---

**Aufgabe 81.** Es sei die konvexe Seite unzugänglich, weil die Bahnlinie einen Bergabhang anschneidet. Es sollen die Hauptpunkte abgesteckt werden.

Figur 227.



**Auflösung.** In diesem Falle wähle man auf den Tangenten beliebige Punkte (etwa $B'$ und $B$, vergl. Figur 227). Errichte:

$$BD \perp AB$$
$$B'D' \perp A'B'$$

und mache:

$$BD = B'D' = r$$

dem gegebenen Radius.

Werden dann die Winkel:

$$BDD' = 90 + \beta$$
$$B'D'D = 90 + \alpha$$

sowie die Entfernung:

$$DD' = d$$

gemessen, so ist das $\triangle DD'C$ bestimmt. Wir haben:

$$A'B' = D'C = \frac{d \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$
$$AB = DC = \frac{d \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

Dadurch sind die Punkte $A$ und $A'$ bestimmt.

Macht man nun:

$$AC = r \text{ und } AC \perp AB$$

analog:

$$A'C = r \quad „ \quad A'C \perp A'B'$$

so erhält man den Punkt $C$. Die doppelte Bestimmungsweise gibt zugleich eine gute Kontrolle.

Hierauf wird der Theodolit in $C$ aufgestellt, der Winkel $ACA'$ gemessen und die Richtung:

$$A'CE = \frac{1}{2} ACA'$$

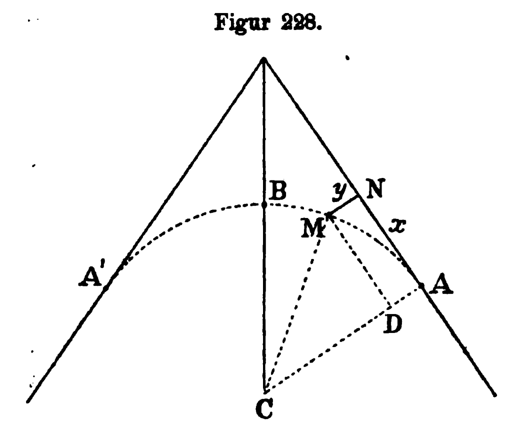
abgesteckt. Trägt man auf diese Richtung von $C$ die Länge $r$ auf, so erhält man den Punkt $E$.

---

**Aufgabe 82.** Es sollen Nebenpunkte abgesteckt werden, vorausgesetzt, dass die Hauptpunkte gegeben sind.

**Auflösung.** Die Absteckung der Nebenpunkte richtet sich bei gegebenen Hauptpunkten nach den Terrainverhältnissen. Die

Figur 228.




**Erkl. 155.** Im $\triangle CDM$ ist nach dem pythagoreischen Lehrsatz:

$$MC^2 = CD^2 + DM^2$$

also:

$$r^2 = CD^2 + x^2$$

woraus:

$$CD = \sqrt{r^2 - x^2} = r\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}$$

folgt.

**Erkl. 156.** Es ist:

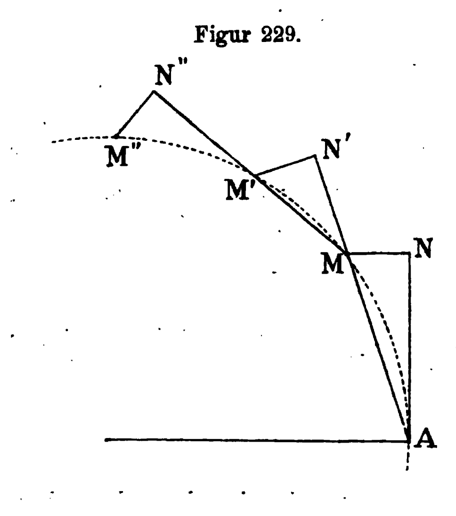
$$1 - \cos\varphi = \sin^2\frac{\varphi}{2} + \cos^2\frac{\varphi}{2} - \cos\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$= \sin^2\frac{\varphi}{2} + \cos^2\frac{\varphi}{2} + \sin^2\frac{\varphi}{2} - \cos^2\frac{\varphi}{2}$$

also:

$$= 2\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

Figur 229.




beste Methode ist die Koordinatenmethode, die wir als I. Auflösung vortragen und zwar aus dem Grunde, weil jeder Punkt für sich bestimmt wird, also von der Ungenauigkeit der anderen unabhängig ist.

**I. Auflösung.** Die gegebenen Hauptpunkte seien (vergl. Figur 228) $AA'$ und $B$. Zur Absteckung eines beliebigen Punktes $M$ müssen seine Koordinaten $AN = x$, $NM = y$ bekannt sein. Dabei ist natürlich:

$$MN \perp NA$$

Die eine Koordinate, nämlich $x$, kann beliebig gewählt werden, es ist also nur noch $y$ zu bestimmen.

Denken wir uns zu diesem Zweck $M$ mit dem Kreiszentrum $C$ verbunden, ebenso $A$, ziehen wir ferner $MD \parallel NA$, so ist, weil $\sphericalangle NAC = 90^0$, das Dreieck $MCD$ ein rechtwinkliges. Dann ist (vergl. Erkl. 155):

$$MN = CA - CD = r - \sqrt{r^2 - x^2}$$

oder:

$$1) \ldots y = r\left(1 - \sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}\right)$$

Setzt man also:

$$2) \ldots \frac{x}{r} = \sin\varphi$$

so wird:

$$\sqrt{1-\frac{x^2}{r^2}} = \sqrt{1-\sin^2\varphi} = \cos\varphi$$

und wir erhalten:

$$y = r(1-\cos\varphi)$$

da aber (vergl. Erkl. 156):

$$y_1 - \cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

so wird:

$$3) \ldots y = 2\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

Indem man also für $x$ verschiedene Annahmen macht, kann man verschiedene Punkte einschalten.

**II. Auflösung.** Man bestimme die erste Ordinate $y_1$, wie in der vorhergehenden Auflösung. Sodann verlängere man $AM$ um (vergl. Figur 230):

$$x_2 = MN'$$

Sei:

$$y_2 = M'N' \perp AN'$$

analog verlängere man $MM'$ um:

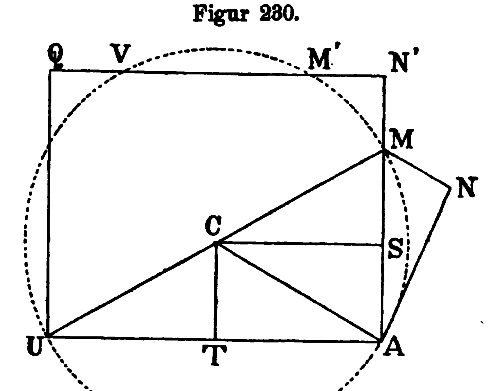
$$x_3 = M'N''$$

und macht:

$$y_3 = N''M'' \perp MN''$$

und so fort.

Figur 230.




**Erkl. 157.** Es ist nach dem pythagoreischen Satz (vergl. Fig. 230) im $\triangle ANM$:

$$AM = l_1 = \sqrt{AN^2 + MN^2}$$

ferner ist:

$$AS = CT = \frac{1}{2} l_1 \ , \ AC = r$$

also im $\triangle TCA$:

$$TA = \frac{1}{2} UA = \frac{1}{2} l_2$$

$$= \sqrt{CA^2 - CT^2} = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} l_1^2}$$

ferner ist:

$$VN' = QN' - QV$$
$$= UA - V'N' = l_2 - y_2$$

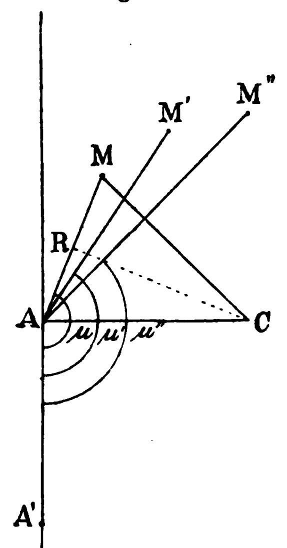
und da nach einem bekannten planimetrischen Satz (vergl. Erkl. 158):

$$N'M' \cdot N'V = N'A \cdot N'M$$

ist, so wird:

$$y_2 (l_2 - y_2) = x_2 (x_2 + l_1)$$

Figur 231.




Für die Berechnung dieser Grössen hat man (vergl. Erkl. 157):

$$l_1 = AM = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

$$l_2 = 2\sqrt{r^2 - \frac{x_1^2 + y_1^2}{4}}$$

$$y^2 = \frac{x_2 (x_2 + l_1)}{l_2 - y_2}$$

Für bestimmte $r$ und für bestimmte $x_1$ kann man sich sofort die Grössen $y_1 \, x_2 \, y_2 \, x_3 \, y_3$ berechnen, wenn man:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4$$

annimmt.

Hat man sich einmal solche Tafeln berechnet, so ist die Absteckung leicht.

Diese Methode ist absolut genau. Man wird sie aber nur im Notfall anwenden und zwar deswegen, weil sich die Fehler des ersten Punktes auf alle übrigen übertragen.

**III. Auflösung.** Ein genaues Verfahren ist das folgende, bei dem auch die Punkte unabhängig von einander bestimmt werden, wo also diese Fehleranhäufung ausgeschlossen ist.

Es ist (vergl. Fig. 231 und Erkl. 159):

$$AM = 2r \cdot \sin \frac{1}{2} \mu$$

$$AM' = 2r \cdot \sin \frac{1}{2} \mu'$$

$$AM'' = 2r \cdot \sin \frac{1}{2} \mu''$$

. . . . . . . . . . .

Man kann sich demnach für verschiedene $\mu$ die Längen:

$$AM \ , \ AM' \ , \ AM''$$

berechnen und dieselben im Felde in die betreffenden Richtungen auftragen.

**IV. Auflösung.** Bei dem Tunnelbau, wo nur wenige Meter zu beiden Seiten zur Verwendung frei stehen, kann man verfahren wie folgt:

Man berechne sich die erste Länge $AM = d$ nach der in der Auflösung III. entwickelten Formel (vergl. Figur 230):

$$1) \ldots d = 2r \sin \frac{\mu}{2}$$

dann wird für:

$$2) \ldots MM' = AM = d$$

$$3) \ldots \mu' = 2(\mu - 90)$$

denn das Dreieck $ACM$ ist ein gleichschenkliges und $AA' \perp AC$, so dass:

$$\sphericalangle CAM = \sphericalangle A'AM - A'AC$$

oder:

$$\sphericalangle CAM = \mu - 90$$

**Erkl. 158.** Ein planimetrischer Satz lautet: Werden von einem Punkt ausserhalb eines Kreises zwei Sekanten ($N'V$, $N'A$) gezogen, so sind die Produkte aus den Schnittpunktsentfernungen gleich und konstant.

**Erkl. 159.** Es ist (vergl. Figur 231):

$$\sphericalangle AMC = \sphericalangle MAC = 180^0 - \mu$$

also:

$$\sphericalangle ACM = 360^0 - 2\mu$$

oder:

$$\frac{1}{2} ACM = 180^0 - \mu$$

Nun ist:

$$AM = 2AR = 2AC \sin \frac{1}{2} ACM$$

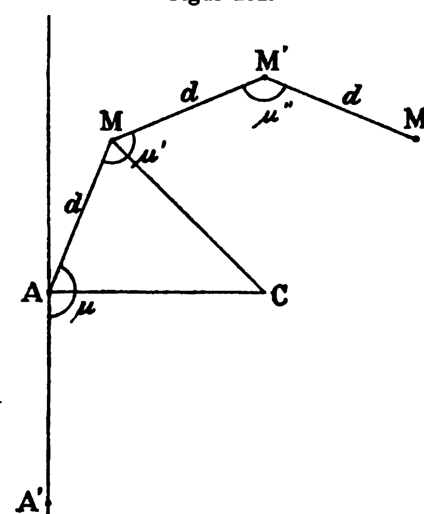
da nun:

$$\sin (180^0 - \mu) = \sin \mu$$

so folgt:

$$AM = 2r \sin \frac{1}{2} \mu$$

Figur 232.




Da nun:

$$\sphericalangle AMC = \sphericalangle CMM'$$

so folgt:

$$\mu' = 2 (\mu - 90)$$

**V. Auflösung.** Sind kleine Bögen abzustecken und wird nicht allzu grosse Genauigkeit verlangt, so kann man sich auch der folgenden Methode bedienen:

Man verbinde die beiden Endpunkte $AB$ (vergl. Figur 233) und messe:

$$AB = d$$

ist sodann:

$$h = r - \sqrt{r^2 - \frac{d^2}{4}}$$

so gibt:

$$DC = h \text{ und } \perp AB$$

im Mittelpunkt $C$ einen Punkt des Bogens.

Trägt man nun in der Mitte von $AD$ und $DB$:

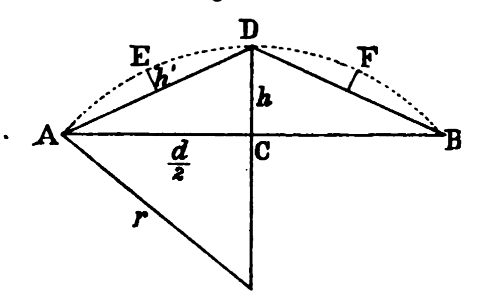
$$h' = \frac{h}{4}$$

senkrecht auf, so bekommt man weitere zwei Punkte. Wird nun auf die Mitte der Verbindenden $AE$, $ED$, $DF$, $FB$ senkrecht:

$$h'' = \frac{h'}{4}$$

aufgetragen, so erhält man fernere Punkte. In dieser Art kann man fortfahren. Man bekommt bei diesem Verfahren nun genähert einen Kreisbogen.

Figur 233.




**Aufgabe 83.** Drei Punkte $A$, $B$, $C$ sind auf dem Felde gegeben. Zu finden ist der Radius des Kreises, dessen Peripherie durch die gegebenen drei Punkte hindurchgeht.

**Auflösung.** Seien $A$, $B$, $C$ (vergleiche Figur 234) die gegebenen Punkte und $O$ das Zentrum des gesuchten Kreises. Dann ist:

$$AO = BO = CO = r$$

$$\sphericalangle OAB = \sphericalangle ABO = \varphi$$

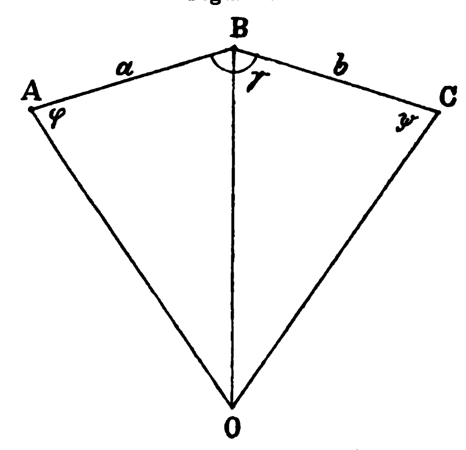
$$\sphericalangle OBC = \sphericalangle BCO = \psi$$

ferner:

$$\sphericalangle AOB = 180^0 - 2\varphi$$

$$\sphericalangle BOC = 180^0 - 2\psi$$

Figur 234.




**Erkl. 160.** Es ist nach dem Sinussatze:

$$\frac{OA}{AB} = \frac{\sin ABO}{\sin AOB}$$

also:

$$\frac{a}{r} = \frac{\sin(180^0 - 2\varphi)}{\sin\varphi} = \frac{\sin 2\varphi}{\sin\varphi}$$

da aber:

$$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$$

so wird auch:

$$\frac{a}{r} = \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi} = 2\cos\varphi$$

und

$$r = \frac{a}{2\cos\varphi}$$

**Misst man also:**

$$AB = a$$
$$BC = b$$
$$\sphericalangle ABC = \gamma$$

so wird im $\triangle ABO$ (vergl. Erkl. 160):

$$1) \ldots AO = r = \frac{a}{2\cos\varphi}$$

und im $\triangle BOC$:

$$2) \ldots OC = r = \frac{b}{2\cos\psi}$$

**Man hat also:**

$$4) \ldots \frac{a}{b} = \frac{\cos\varphi}{\cos\psi}$$

ferner ist:

$$5) \ldots \varphi + \psi = \gamma$$

Die Gleichungen 4) und 5) geben $\varphi$ und $\psi$ und die Gleichungen 1) und 2) $r$.

Schreibt man die Gleichung 4) wie folgt (da $\varphi = \gamma - \psi$):

$$\frac{\cos(\gamma - \psi)}{\cos\psi} = \frac{\cos\gamma\cos\psi + \sin\gamma\sin\psi}{\cos\psi}$$
$$= \cos\gamma + \sin\gamma\,\mathrm{tg}\,\psi = \frac{a}{b}$$

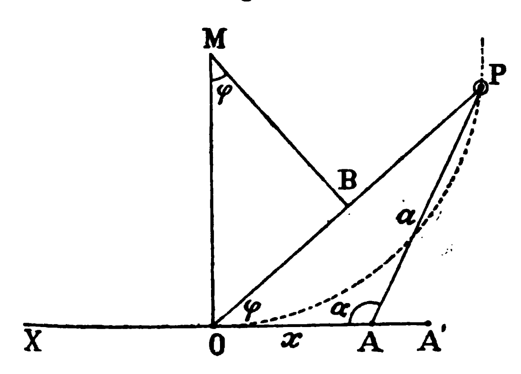
so ergibt sich:

$$\mathrm{tg}\,\psi = \frac{a - b\cos\gamma}{b\sin\gamma}$$

---

**Aufgabe 84.** Es seien auf dem Felde die Richtung der Tangente $OX$ und ein Punkt $P$ des Kreises, dessen Radius $r$ ist, bekannt. Es soll der Berührungspunkt abgesteckt werden.

Figur 235.




**Auflösung.** Es sei (vergl. Figur 235) $M$ der Mittelpunkt der Kreise. Man verbinde $M$ mit $O$, dem Berührungspunkte, der zu bestimmen ist, und $O$ mit $P$, dem gegebenen Kreispunkte und ziehe $BM \perp OB$, dann ist:

$$\sphericalangle POA = \sphericalangle OMB = \varphi$$

denn es ist:

$$OA \perp OM$$
$$OB \perp BM$$

Wählt man in $A$ seinen Standpunkt, so können gemessen werden:

$$\sphericalangle OAP = \alpha$$
$$AP = a$$

diese sind nebst dem bekannten Radius:

$$OM = r$$

die Elemente der Rechnung.

**Erkl. 161.** Wir haben im $\triangle OBM$:

$$OB = r \sin\varphi$$

also wird:

$$OP = 2OB = 2r\sin\varphi$$

Nun ist im $\triangle OAP$:

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha} = \frac{a}{OP} = \frac{a}{2r\sin\varphi}$$

also wird:

$$\sin^2\varphi = \frac{a\sin\alpha}{2r}$$

Wir haben (vergl. Erkl. 161):

$$1)\ \ldots \sin\varphi = \sqrt{\frac{a\sin\alpha}{2r}}$$

Im $\triangle OAP$ hat man ferner:

$$\frac{OA}{AP} = \frac{x}{a} = \frac{\sin(\varphi+\alpha)}{\sin\varphi}$$

also wird:

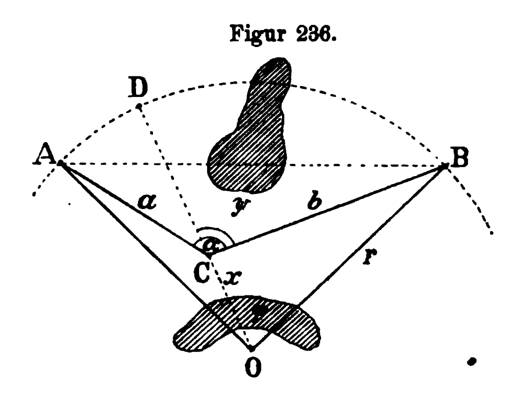
$$2)\ \ldots x = a\frac{\sin(\varphi+\alpha)}{\sin\varphi}$$

Hiemit ist der Berührungspunkt $O$ gegeben. Nun wird auf dem Felde von $A$ aus in der Richtung $AX$ die Strecke $x = AO$ aufgetragen. Zur Prüfung dient noch ein zweiter Standpunkt $A'$, für welchen man analoge Rechnung ausführt.

---

**Aufgabe 85.** Von einem Kreis, dessen Radius $= r$ ist, sind zwei Punkte $A$ und $B$ gegeben, aber gegenseitig nicht sichtbar und ihr Abstand direkt nicht messbar. Auch das Kreiszentrum $O$ (vergl. Figur 236) ist nicht zugänglich. Man soll irgend einen dritten Punkt $D$ einschalten.

Figur 236.




**Erkl. 162.** Es ist im $\triangle ABC$ (vergleiche Figur 236):

$$\overline{AB}^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab\cos\alpha$$

und zwar $+$ oder $-$, je nachdem der Winkel $\alpha >$ oder $\wedge$ ist als $180^0$.

**Auflösung.** Man bestimme sich irgend einen dritten Punkt $C$ und messe den Abstand $AC = a$ und $BC = b$ (direkt oder durch einen Polygonzug) ferner den Winkel:

$$ACB = \alpha$$

Sodann ist $AB$ gegeben und auch die Winkel:

$$BAC \text{ und } ABC$$

durch die Formeln (vergl. Erkl. 162):

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2 \pm 2ab\cos\alpha}$$

$\sphericalangle BAC$ durch:

$$\sin BAC = \frac{b}{AB}\sin\alpha$$

und $\sphericalangle ABC$ durch:

$$\sin ABC = \frac{a}{AB}\sin\alpha$$

Im $\triangle OAB$ ist:

$$\sphericalangle BAO = \sphericalangle ABO$$

und zwar wird:

$$\cos BAO = \frac{AB}{2r}$$

Man braucht bloss die Senkrechte von $O$ auf $AB$ zu fällen, dann entstehen zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke, deren Hypotenuse $OB$ resp. $OA = r$ und deren eine Kathete $= \frac{1}{2}AB$ ist.

Man kennt also auch:

$$\sphericalangle CBO = \sphericalangle ABO - \sphericalangle ABC$$

Setzt man weiter:

$$OC = x$$
$$\sphericalangle COB = \varphi$$
$$\sphericalangle DCB = \psi$$

**Erkl. 168.** Obschon wir dieses Problem schon oft behandelt haben, so wollen wir es doch noch einmal und zwar in etwas abweichender Weise als sonst lösen.

Setzen wir:

$$\frac{b}{r} = k, \quad \sphericalangle CBO = k$$

so wird:

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = k$$

$$\psi - \varphi = \gamma$$

Nun ist aber:

$$\frac{\sin\varphi - \sin\psi}{\sin\varphi + \sin\psi} = \frac{k-1}{k+1}$$

also:

$$\frac{2\cos\frac{1}{2}(\varphi+\psi)\sin\frac{1}{2}(\varphi-\psi)}{2\sin\frac{1}{2}(\varphi+\psi)\sin\frac{1}{2}(\varphi-\psi)} = \frac{k-1}{k+1}$$

so dass:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi+\psi) = \frac{k+1}{k-1}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi-\psi)$$

$$= \frac{k+1}{k-1}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma$$

wird. Hieraus lässt sich $\varphi + \psi$ berechnen.

so wird zunächst:

$$\varphi + (180^0 - \psi) + \sphericalangle CBO = 180^0$$

also:

$$\text{I} \ldots \psi - \varphi = \sphericalangle CBO$$

ferner ist im $\triangle CBO$:

$$\text{II} \ldots \frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{b}{r}$$

durch diese beiden Gleichungen I und II sind $\varphi$ und $\psi$ bestimmt (vergl. Erkl. 163).

Endlich wird:

$$\text{III} \ldots x = r\frac{\sin CBO}{\sin\psi}$$

und

$$\text{IV} \ldots CD = OD - OC = r - x$$

Da $\psi$ und $CD$ bekannt sind, so kann leicht der Punkt $D$ abgesteckt werden.

Zur Messprobe kann man auch den Abstand $AD$ berechnen aus dem $\triangle ADO$, welches gleichschenklig ist (Schenkel $= r$) und der:

$$\sphericalangle AOD = \sphericalangle AOB - \varphi$$

nun ist aber:

$$AOB = 180^0 - \sphericalangle OAB - \sphericalangle OBA$$

welche berechnet wurden.

Dann ist:

$$AD = 2r\sin\frac{1}{2}\cdot AOB$$

---

**Aufgabe 86.** Es seien auf dem Felde drei Gerade gegeben, welche durch das Dreieck $ABC$ (vergl. Fig. 237) dargestellt werden. Ferner der Radius $OD = OE = r$ jenes Kreises, der die Geraden $BC$ und $AC$ berührt. Wie gross muss der Radius eines zweiten Kreises ($O'E = O'F = R$) genommen werden, damit ein Anschluss an die Gerade $AB$ erzielt werde?

**Auflösung.** Man messe auf dem Felde die Gerade:

$$AC = a$$

ferner:

$$\sphericalangle BAC = \beta$$

$$\sphericalangle ACB = \gamma$$

Sodann sind (vergl. Figur 237) die Punkte $D$, $E$, $F$ und der Radius $O'F = O'E = R$ zu bestimmen. Beachtet man, dass der Radius auf der Tangente immer senkrecht steht, so ergibt sich leicht:

$$OD \perp BC$$

$$OE \perp AC$$

$$O'E \perp AC$$

$$O'F \perp BA$$

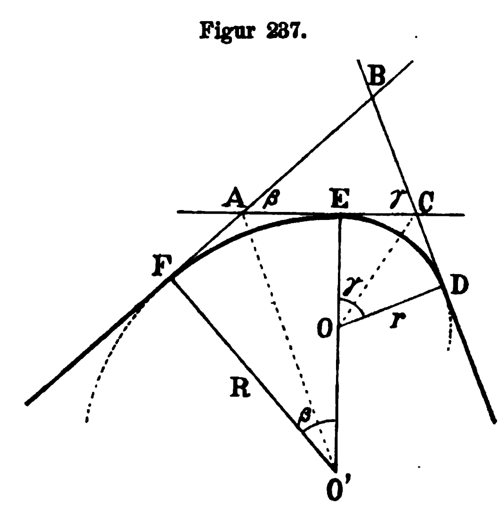
ferner wird:

$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle EOD = \sphericalangle \gamma$$

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle FO'E = \sphericalangle \beta$$

weil ihre Schenkel auf einander senkrecht stehen.

Figur 237.




Weiter ist wegen:

$$\triangle OEC \cong \triangle ODC$$

und

$$\triangle AEO' \cong \triangle AFO'$$

auch:

$$\sphericalangle EOC = \sphericalangle COD = \frac{\gamma}{2}$$

$$\sphericalangle AO'E = \sphericalangle AO'F = \frac{\beta}{2}$$

Die weitere Rechnung ergibt sich aus diesen Betrachtungen sofort.

Man hat im $\triangle ODC$:

$$DC = r \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$$

und auch:

$$DC = CE$$

also wird:

$$EA = AC - CE$$

oder:

$$EA = AF = a - r \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$$

Nun ist aber im $\triangle O'AE$:

$$O'E = AE \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}$$

also:

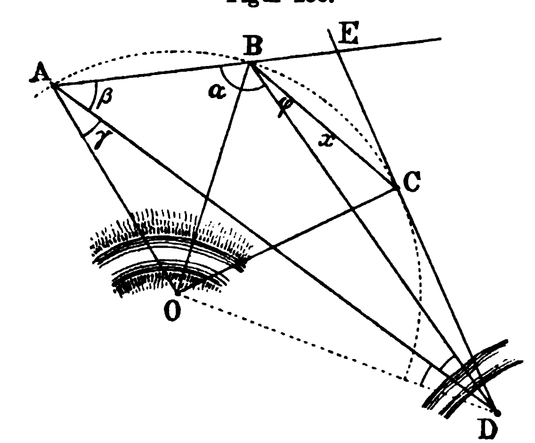
$$R = \left(a - r \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}\right) \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}$$

Damit ist das Problem gelöst. Denn man kann $D$, $E$, $F$ abstecken und man kennt den Radius $R$.

---

**Aufgabe 87.** Zwei Kreispunkte $A$ und $B$ seien gegeben. Der Radius des Kreises $r$ sei ebenfalls gegeben. Das Kreiszentrum ist nicht sichtbar und unzugänglich. Durch einen von $A$ und $B$ sichtbaren Punkt $D$ soll an den Kreis die Tangente gelegt werden und ihr Berührungspunkt $C$ abgesteckt werden.

Figur 238.




**Auflösung.** Diese soll in folgendem zur Einübung des Lesers nur skizziert werden, der Leser möge die Formeln begründen und ausführen, wo es nötig erscheint. Sei (vergl. Figur 238):

$$AO = OB = OC = r$$

$$\sphericalangle OCD = 90^0$$

so ist:

$$AB = r \frac{\sin[180^0 - 2(\beta + \gamma)]}{\sin(\beta + \gamma)}$$

$$AD = AB \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$\sin ODA = \frac{r}{AD} \sin[180^0 - (\gamma + ODA)]$$

$$\sin ADB = \frac{AB}{AD} \sin\alpha$$

$$OD = \frac{r}{\sin[180^0 - (\gamma + ODA)]}$$

$$\sin ODC = \frac{r}{OD}$$

$$\sphericalangle COD = 90^0 - \sphericalangle ODC$$

$$x = 2r \sin \frac{180 - COD}{2}$$

$$DB = AB \cdot \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$BD = x \frac{\sin(\varphi + BDE)}{\sin BDE}$$

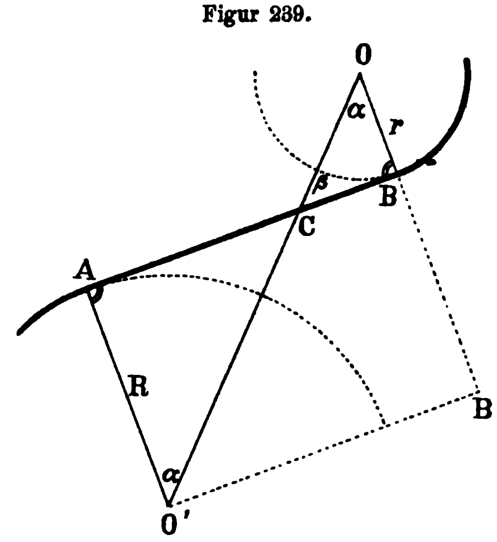
$$BDE = ODB - (ODA + ADB)$$

**Bemerkung.** Die genaue Ausführung dieses Problems überlassen wir dem Leser, um ihn nach und nach zur Behandlung komplizierter Probleme anzuleiten.

---

**Aufgabe 88.** Zwei Kreisbogen sind nebst ihren Radien auf dem Felde gegeben, es wird die gemeinschaftliche Tangente gesucht.


Figur 239.




**Auflösung.** Sei $AB$ (vergl. Figur 239) die gemeinschaftliche Tangente. Seien ferner:

$$OB = r$$
$$O'A = R$$

die beiden Kreisradien. Wird die Länge der Strecke $OO' = a$ entweder direkt gemessen oder mittelbar, so ist $AB$ bestimmt, wenn man die Punkte $A$, $B$ abstecken kann. Man hat, wenn:

$$O'B' \parallel AB$$

gezogen wird:

$$OB' = OB + BB' = r + R$$

ferner ist im $\triangle OOB'$:

$$\cos \sphericalangle B'OO' = \cos \alpha = \frac{OB'}{OO'}$$

also:

$$1) \ldots \cos \alpha = \frac{R + r}{a}$$

Im $\triangle BOC$ ist der Winkel bei $B$ ein rechter, also:

$$2) \ldots \sphericalangle OCB = \beta = 90^0 - \alpha$$

Weiter ist in demselben Dreiecke:

$$3) \ldots OC = \frac{OB}{\sin \beta} = \frac{r}{\cos \alpha}$$

$$BC = r \operatorname{tg} \alpha$$

analog hat man im Dreiecke $ACO'$:

$$4) \ldots AC = R \operatorname{tg} \alpha$$

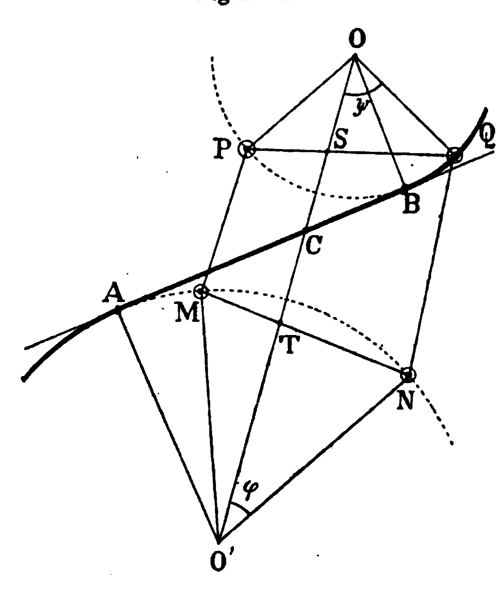
Damit sind die Punkte $A$, $B$, $C$ bestimmt. Man messe von $O$ aus die Länge $OC$ ab, so ergibt sich der Punkt $C$. Von diesem aus wird mit dem Theodolit die Richtung $AB$ durch den Winkel $\beta$ abgesteckt und von $C$ aus die Längen $BC$ und $AC$ abgemessen. So erhält man die Punkte $A$ und $B$.

---

**Aufgabe 89.** Es seien auf dem Felde zwei Kreise gegeben durch die Radien $r$ und $R$ und durch vier abgesteckte Punkte ($P$, $Q$, $M$, $N$ in der Figur 240). Die Zentra ($OO'$) der Kreise sind unzugänglich. Es soll die gemeinschaftliche Tangente beider Bogen abgesteckt werden.

**Auflösung.** Man messe in $PQMN$ alle Seiten und alle Winkel. Dann ist das Dreieck $POQ$ und das Dreieck $MO'N'$ auch bestimmt. Denn es ist:

Figur 240.




**Bemerkung.** Die detaillierte Ausführung bietet nach dem Mitgeteilten keine Schwierigkeit mehr. Der Leser möge sie zu eigener Uebung selbst ausführen. Die Lösung der Gleichung 2) wird vorgenommen wie folgt, es ist:

$$\sin(180^0 - \psi) = \sin\psi$$
$$\sin(360^0 - \psi - \alpha) = -\sin(\psi + \alpha)$$
$$\sin(540^0 - \psi - \alpha - \beta) = \sin(\psi + \alpha + \beta)$$

also hat man:

$$O_2 = r \sin\psi - a \sin(\psi + \alpha) + R \sin(\psi + \alpha + \beta)$$

oder da:

$$\sin(\psi + \alpha) = \sin\psi \cos\alpha + \cos\psi \sin\alpha$$

und analog $\sin(\psi + \alpha + \beta)$:

$$O_2 = r \sin\psi - a \sin\psi \cos\alpha - a \cos\psi \sin\alpha$$
$$+ R \sin\psi \cos(\alpha + \beta) + R \cos\psi \sin(\alpha + \beta)$$

oder:

$$\sin\psi [r - a \cos\alpha + R \cos(\alpha + \beta)]$$
$$= + \cos\psi [a \sin\alpha + R \sin(\alpha + \beta)]$$

so dass:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{a \sin\alpha + R \sin(\alpha + \beta)}{r - a \cos\alpha + R \cos(\alpha + \beta)}$$

wird. Damit ist $\psi$ bestimmt.

$$OP = OQ = r$$
$$O'M = O'N = R$$

also kennt man auch alle Winkel in beiden Dreiecken und somit alle Seiten und alle Winkel im Polygon $OPMO'NQD$.

Sodann rechne man die Seite $OO'$ aus dem Polygon $OQNO'O$, in welchem gegeben sind die Seiten $OQ = r$, $QN = a$, $NO' = R$ und die Winkel $OQN = \alpha$, $QNO' = \beta$.

Sei:

$$OO' = x$$
$$\sphericalangle OO'Q = \psi$$
$$\sphericalangle O'ON = \varphi$$

so hat man nach den Grundgleichungen der Polygonometrie (siehe diese) zur Bestimmung dieser Grössen die Gleichungen:

1) . . . $\varphi + \psi + \alpha + \beta = 360^0$

2) . . . $O = r \sin(180^0 - \psi) + a \sin (360^0 - \psi - \alpha) + R \sin(540^0 - \psi - \alpha - \beta)$

3) . . . $x = r \cos(180^0 - \psi) + a \cos (360^0 - \psi - \alpha) + R \cos(540^0 - \psi - \alpha - \beta)$

Aus diesen Gleichungen ist $x$, $\varphi$ und $\psi$ zu berechnen. Ist dieses geschehen, so rechne man die Strecken $OS$ und $QS$ aus dem Dreieck $OQS$, aus welchem gegeben sind $OQ = r$, $\sphericalangle SOQ = \varphi$ und $\sphericalangle SQO$.

Analog werden aus dem Dreiecke $O'TN$ die Strecken $O'T$ und $T'N$ gerechnet, damit sind die Punkte $S$ und $T$ bestimmt und auch die Länge $ST$, denn es ist:

$$ST = OO' - OS - O'T$$

Nun wende man das Problem der vorigen Aufgabe an, dadurch bestimmt sich $OC$, also auch:

$$SC = OC - OS$$

und der Winkel $OCB$, wodurch das Problem gelöst ist.

## 4. Ueber die Uebergangskurve.

**Anmerkung 8.** Wir fügen hier so viel über die wirkliche Anwendung der vorstehenden Kreisabsteckungen an, als für die Praxis erforderlich ist. Wer speziellere Belehrung wünscht, möge irgend ein Lehrbuch über den Bau der Eisenbahnen nachsehen. Indessen dürfte das hier Mitgeteilte für alle Fälle genügen.

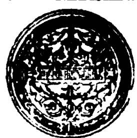
Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

1292. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Vermessungskunde (Geodäsie). Erster Teil. Forts. v. Heft 1291. — Seite 193—208 Mit 9 Figuren.





# Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
**Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten**
erläutert durch
**viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,**
aus allen Zweigen
der **Rechenkunst,** der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus **allen Zweigen** der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie;** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's;** der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar-** u. **Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
**zum einzig richtigen und erfolgreichen**
**Studium** zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

**Dr. Adolph Kleyer,**
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in **Frankfurt a. M.**
unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

# Vermessungskunde
## (Geodäsie).
### Erster Teil.

Nach **System Kleyer** bearbeitet von **Dr. W. Láska.**

Fortsetzung von Heft 1291. — Seite 193—208. Mit 9 Figuren.

**Inhalt:**



**Stuttgart 1894.**
Verlag von Julius Maier.

**Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.**

# PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie,** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues,** des **konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form,** mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch **alle** Teile der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der **mathematischen** Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht **vergessenen** mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

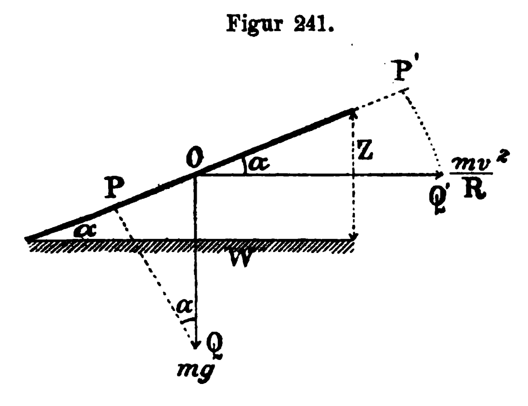
Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. **Kleyer,** Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

**Frage 189.** Was versteht man unter der Ueberhöhung des äusseren Schienenstranges?

**Erkl. 164.** Die auf der Seite des Krümmungsmittelpunktes liegende Schiene wird die innere genannt.

Figur 241.




**Erkl. 165.** Zerlegt man die Kraft $mg = OQ$ in zwei Komponenten (vergl. Figur 241):

$$QP = OQ \cos\alpha$$
$$OP = OQ \sin\alpha$$

analog die Kraft:

$$\frac{mv^2}{R} = OQ'$$

in:

$$Q'P' = OQ \sin\alpha$$
$$OP' = OQ \cos\alpha$$

Sodann werden die Kräfte $PQ$, $P'Q'$ durch die Festigkeit des Materials aufgehoben. Die Kräfte $OP$ und $O'P'$ wirken entgegengesetzt und müssen alle gleich sein, wenn sie sich aufheben sollen, also:

$$OP = -O'P'$$

woraus die obige Formel folgt.

**Erkl. 166.** Die Spurweite (zwischen den Innenkanten der Schienenköpfe gemessen) beträgt 1,435 m. Bezüglich des Krümmungshalbmessers gelten folgende gesetzliche Bestimmungen:

Kleinster Halbmesser auf freier Strecke für Hauptbahnen 180 m, für Nebenbahnen bei normaler Spur (1,435 m) 100 m. Halbmesser von unter 300 m bei freier Bahn bedürfen bei Hauptbahnen der Genehmigung des Reichs-Eisenbahnamts.

**Antwort.** Unter der Ueberhöhung des äusseren Schienenstranges versteht man jene Höhe, um welche die äussere Schiene die innere überragt (vergl. Erkl. 164). Bewegt sich nämlich ein Wagen auf einer Kreiskurve, so wirkt auf seinen Schwerpunkt ausser der Kraft (des eigenen Gewichtes) $mg$ = Masse $x$ Beschleunigung noch die nach aussen wirkende Komponente der Zentrifugalkraft:

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{\text{Masse} \times \text{Fahrgeschwindigkeit}}{\text{Radius des Kreisbogens}}$$

Analog nun wie ein Reiter, der im Kreise herumtrabt, sich instinktiv gegen das Zentrum desselben neigt, muss auch der Eisenbahnwagen um einen kleinen Winkel $\alpha$ geneigt werden, denn sonst würde er entgleisen.

Aus der Mechanik ist bekannt, dass Gleichgewicht bestehen wird, wenn:

$$\frac{mv^2}{R} \cos\alpha = mg \sin\alpha$$

hieraus folgt (vergl. Erkl. 165):

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v^2}{Rg}$$

Sei nun $w$ die Spurweite, $z$ die Ueberhöhung, so wird sehr nahe:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{z}{w}$$

also:

$$z = \frac{v^2 w}{Rg}$$

Wir sehen, dass die Ueberhöhung dem Quadrate der Fahrgeschwindigkeit direkt und dem Radius des Bogens umgekehrt proportional ist. Man pflegt für gewöhnlich folgende Formel zu benützen:

$$z = 1000 \frac{k}{R}$$

wobei (vergl. Erkl. 166):

$k = 35$ bis 45 für Bahnen mit sehr raschen Zügen und flachen Krümmungen,

$k = 30$ für Hauptbahnen ohne Schnellzüge mit schärferen Krümmungen,

$k = 25$—20 für vollspurige Nebenbahnen,

$k = 15$ für Bahnstrecken mit Krümmungen unter $R = 150$ m.

Für schmalspurige Bahnen ist:

$k = 5$ für 1 m,

$k = 3{,}75$ für 0,75 m Spurweite.

Es soll nie $z > 167$ mm sein; bei Halbmessern von über 2000 m pflegt man die Ueberhöhung fortzulassen.

Nachstehende Tabelle liefert einige Werte von $z$ für vollspurige Bahnen (1,45 m).

| $k =$ | 45 | 40 | 35 | 30 | 25 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $R$ in m | $z$ in mm | | | | | |
| 400 | 113 | 100 | 88 | 75 | 63 | 50 |
| 500 | 90 | 80 | 70 | 60 | 50 | 40 |
| 600 | 75 | 67 | 58 | 50 | 42 | 33 |
| 700 | 64 | 57 | 50 | 43 | 36 | 29 |
| 800 | 56 | 50 | 44 | 38 | 31 | 25 |
| 900 | 50 | 44 | 39 | 33 | 28 | 22 |
| 1000 | 45 | 40 | 35 | 30 | 25 | 20 |
| 1200 | 38 | 34 | 29 | 25 | — | — |
| 1500 | 30 | 27 | 23 | 20 | — | — |
| 2000 | 23 | 20 | 18 | 15 | — | — |

Wir ersehen aus dem Vorstehenden, dass die aus Kreisbogen und Geraden zusammengesetzte Kurve keine kontinuierliche ist, denn bei den Geraden hat man keine Ueberhöhung, im Berührungspunkte, wo der Kreis anfängt, hätte man aber plötzlich die Ueberhöhung. Man muss demnach die Ueberhöhung allmählich einleiten.

**Frage 190.** Wie wird die Ueberhöhung eingeleitet?

**Antwort.** Die Ueberhöhung leitet man dadurch ein, dass man sie von $O$ bis zur wirklichen Grösse anwachsen lässt. Um dieses thun zu können, muss zwischen die Gerade und den Kreis eine Kurve eingeschaltet werden, deren Krümmungsradius von $\infty$ (entsprechend dem Krümmungsradius einer Geraden) bis zu dem Radius des Kreises im gleichen Masse stetig abnimmt. Dieser Forderung entspricht die sogenannte kubische Parabel, welche gegeben ist durch die Gleichung:

$$y = \frac{x^3}{6nz}$$

dabei ist $1:n$ jenes Verhältnis, nach welchem man die äussere Schiene gegen die innere ansteigen lässt.

**Bemerkung.** Die Ansteigung der äusseren Schiene soll mindestens auf die 200fache Länge der Ueberhöhung verteilt sein. Demnach ist etwa:

$$n = 200 \text{ für } k < 30$$
$$n = 300 \;\; „ \;\; k = 40$$
$$n > 390 \;\; „ \;\; k = 45$$

Bei Halbmessern über 800 bis 1000 m ist die Länge der Uebergangskurve gleich 20 m. Allgemein hat man für die Länge der Uebergangskrümmung:

$$l = nz$$

**Frage 191.** Wie wird der Uebergang bewerkstelligt?

**Antwort.** Um den Uebergang zu bewerkstelligen, bestimmt man sich zunächst die Uebergangslänge $l$ nach der Formel:

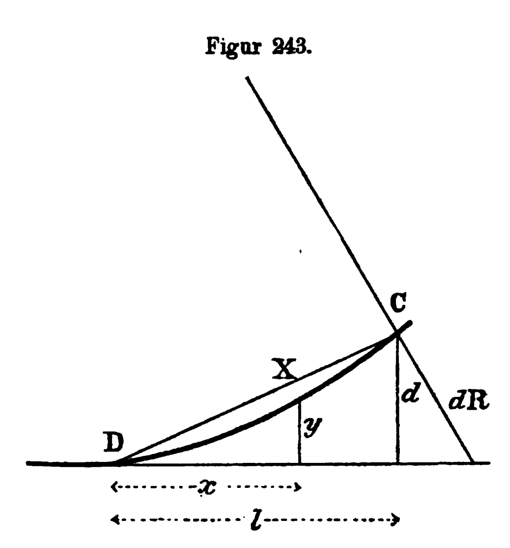
$$l = nz$$

Sodann bestimmt man sich die Endordinate $CE$ für $x = l$, also:

$$CE = d = \frac{l^2}{6n}$$

Figur 242.

Figur 243.




**Erkl. 167.** Aus der Figur 243 ist ersichtlich, dass:

$$d : dR = l : \sqrt{l^2 + d^2}$$

also wird:

$$dR = \frac{d\sqrt{l^2 + d^2}}{l}$$

oder da $d$ gegen $l$ klein ist:

$$dR = d\sqrt{1 + \left(\frac{d}{l}\right)^2}$$

$$= d\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{d}{l}\right)^2\right]$$

Zwischen diese und den Punkt $D$, wo die Uebergangskurve in die Gerade übergeht, schabt man die Punkte $X$ ein, für welche die Grössen $x$ und $y$ (vergl. Figur 242) aus:

$$y = \frac{d}{l^3} x^3$$

bestimmt werden. Fasst man alle nötigen Formeln zusammen, so hat man (vergleiche Figur 243):

$$l = nz$$

$$d = \frac{l^2}{6n}$$

$$y = \frac{d}{l^3} \cdot x^3$$

Wollte man z. B. zwischen $C$ und $D$ zehn Punkte einschliessen, so hat man:

$$x_1 = 1 \cdot \frac{l}{10}$$

$$x_2 = 2 \cdot \frac{l}{10}$$

$$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$x_9 = 9 \cdot \frac{l}{10}$$

$$x_{10} = l = d$$

also:

$$y_1 = d \cdot \left(\frac{x_1}{l}\right)^3 = \frac{d}{1000}$$

$$y_2 = d\left(\frac{x_2}{l}\right)^3 = \frac{8d}{1000}$$

$$y_3 = d\left(\frac{x_3}{l}\right)^3 = \frac{27d}{1000}$$

$$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$y_9 = d\left(\frac{x_9}{l}\right)^3 = \frac{729}{1000} d$$

$$y_{10} = d\left(\frac{x_{10}}{l}\right) = d$$

Man hat für den Radius des Bogens natürlich:

$$R - dR$$

zu nehmen, wobei (vergl. Erkl. 167):

$$dR = d\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{d}{l}\right)^2\right]$$

Setzt man:

$$\frac{d}{l} = \frac{l}{6n} = \frac{nh}{6n} = \frac{h}{6}$$

so wird:

$$AR = d\left(1 + \frac{1}{12} h\right)$$

# VII. Die Fehler- und Ausgleichsrechnung.

## 1. Ueber die Beobachtungsfehler.

**Anmerkung 9.** Für die Richtigkeit einer Messung sind gar viele Umstände massgebend. Sie hängt nicht nur von den gewöhnlichen Eigenschaften des Messenden (der Aufmerksamkeit, der Schärfe des Gesichtssinnes etc.), sondern auch von der Güte der Instrumente und den thermischen und optischen Eigenschaften der Atmosphäre und dergleichen ab. Alle diese Thatsachen zeigen, dass selbst die mit der allergrössten Sorgfalt angestellten Messungen mit gewissen unvermeidlichen Fehlern behaftet sind, deren Verhinderung nicht in der Macht des Geometers liegt. Es ist daher wichtig, vor allem zu wissen, welcher Art die möglicherweise vorkommenden Fehler sind und bis zu welcher Grenze durch sie der Wert des Resultates geändert wird. Die Ausgleichsrechnung gibt die Mittel an die Hand, den Einfluss unvermeidlicher Fehler auf ein Minimum zu reduzieren.

Nachdem also die Ausgleichsrechnung für die Ausübung geodätischer Praxis unentbehrlich ist und im II. Teile dieses Werkes von ihr häufig Gebrauch gemacht wird, empfehlen wir dem Leser ausser dem hier und im II. Teile Mitgeteilten zum tieferen Studium Dr. Bobeks Lehrbuch der Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate (Verlag von J. Maier in Stuttgart).

**Frage 192.** Welche Arten der Fehler unterscheidet man?

**Antwort.** Man unterscheidet:

I. Die groben Fehler.

II. Zufällige oder unvermeidliche Fehler.

III. Regelmässige oder konstante Fehler.

---

**Frage 193.** Was versteht man unter einem groben Fehler?

**Antwort.** Unter einem groben Fehler versteht man einen solchen, der ausserhalb der möglichen Beobachtungsfehler liegt, also grösser ist, als unter den obwaltenden Verhältnissen erwartet werden kann. Messe ich z. B. eine Strecke mit dem Metermass, und zwar zweimal in entgegengesetzten Richtungen, wobei ich einmal $m$, das anderemal $m+10$ Meter als ihre Länge erhalte, so bin ich sicher, dass hier ein grober Fehler (Verzählung) vorgekommen, da ich ja die Messung bis auf Decimeter genau verbürgen kann.

---

**Frage 194.** Wie überzeugt man sich von dem Vorhandensein grober Fehler?

**Antwort.** Um sich von dem Vorhanden- resp. Nichtvorhandensein grober Fehler zu überzeugen, muss man sich überzeugen, ob die sogenannten überschüssigen Messungen innerhalb der zulässigen Fehlergrenze, dem Ergebnis der Fundamentalmessung, Genüge leisten.

---

**Frage 195.** Was versteht man unter den überschüssigen Messungen?

**Antwort.** Unter den überschüssigen Messungen werden wiederholte Messungen derselben Grösse oder Messungen anderer mit jener in einer mathematisch darstellbaren Beziehung stehenden Grössen verstanden. So wird beispielsweise ein Dreieckswinkel durch die Messung der beiden anderen kontrolliert, da die Summe aller Winkel im Dreieck gleich 180° sein muss. Bei Längenmessungen verwendet man zweierlei Massstäbe, deren genaues Verhältnis zu einander bekannt ist.

---

**Frage 196.** Was versteht man unter zufälligen oder unvermeidlichen Beobachtungsfehlern?

**Erkl. 168.** Dieses ist die Definition von Gauss. Vergl. Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate von C. F. Gauss, deutsch von Dr. Börsch und Dr. Simon, p. 1.

**Erkl. 169.** Als eine Hauptursache der unvermeidlichen Beobachtungsfehler gelten die thermischen und optischen Veränderungen der Atmosphäre. Der Lichtstrahl, der theoretisch eine Gerade ist, ist in der Wirklichkeit eine Kurve, die sowohl in Bezug auf die vertikale, als auch in Bezug auf die horizontale Richtung gekrümmt ist und infolge der meteorologischen Verhältnisse ihre Krümmung fortwährend ändert, da der Lichtstrahl gezwungen ist, durch verschiedene dichte Lichtstrecken hindurchzugehen und demzufolge nach den verschiedensten Richtungen abgelenkt wird. Diese Wirkungen beeinflussen insbesondere die vertikale Richtung dieser Kurve, während sie in der Horizontalrichtung ziemlich klein bleiben, doch gross genug, um die Ablesungsresultate zu verändern.

**Antwort.** Unter den zufälligen oder unvermeidlichen Beobachtungsfehlern werden solche verstanden, deren Einfluss auf die Beobachtung von veränderlichen Umständen abhängt, die also unter sich und mit der Beobachtung selbst in keinem wesentlichen Zusammenhang stehen (vergleiche Erkl. 168). Der Hauptcharakter dieser Fehler liegt darin, dass sie bei unter gleichen Umständen wiederholten Beobachtungen in verschiedener Grösse auftreten, d. h. bald positiv, bald negativ werden. Zu den Ursachen der zufälligen Fehler sind zu rechnen die Unsicherheit im Einstellen eines Visierfadens, die feinen Ablesungen durch Schätzungen (insbesondere beim Nonius), die Unruhe der Bilder entfernter Gegenstände, zufällige Erschütterungen des Standortes und dergl. mehr.

**Erkl. 170.** Um eine ziemlich vollständige Anzahl der Fehlerursachen in einem speziellen Falle zu geben, wollen wir eine Stelle aus Bessels gesammelten Abhandlungen, Band II, p. 388 abdrucken, die die Fehlerursachen bespricht, die entstehen, wenn der Polabstand eines Fixsterns mit einem nach Reichenbachscher Art eingerichteten Meridiankreise beobachtet wird.

„Das Instrument muss zuerst auf den Stern eingestellt werden, und diese Einstellung kann aus verschiedenen Ursachen fehlerhaft werden, nämlich:

1) weil eine Grenze der Kraft des Fernrohrs vorhanden ist, innerhalb welcher seine Richtung willkürlich bleibt;

2) weil der Punkt des Bildes des Sterns, den man in die Abscissenlinie zu bringen beabsichtigt, innerhalb gewisser Grenzen willkürlich sein kann, welche bei grossen und hellen Sternen ohne Zweifel weiter auseinander liegen, als bei kleineren, weniger hellen, und woraus hervorgehen kann, dass bei Nacht und Tage, oder bei hellerem und weniger hellem Himmel verschiedene Punkte gewählt werden;

3) weil der Stern sich selten oder nie ruhig, sondern in zitternder, von dem Mangel des Gleichgewichts der Luft herrührender Bewegung zeigt. Hierzu gesellen sich Fehlerursachen, welche von der Einstellung des Instrumentes ganz unabhängig sind, z. B.:

4) ein Einfluss der Elastizität seines Metalls, welcher zufällig, äusseren Umständen zufolge, bald diesen, bald jenen Wert erhalten, auch zur Folge haben kann, dass die Richtung des Fernrohrs in dem Augenblick des Ablesens der Beobachtung nicht mehr dieselbe ist, welche sie bei seiner Einstellung war;

5) eine Unsicherheit der Angabe der Kreisteilung;

6) die aus der begrenzten Schärfe des optischen Hilfsmittels, wodurch die Ablesungen erlangt werden, hervorgehende Unsicherheit;

7) die aus dem Umstande hervorgehenden Fehler, dass die Schätzung der Angaben der Nonien nur z. B. bis auf die Hälfte des kleinen Zwischenraums von 2″, welchen sie angeben, getrieben werden kann, wodurch alle an den vier Nonien dieser Instrumente abgelesenen Beobachtungen sich immer mit einer vollen, viertel, halben oder dreiviertel Sekunde, nie aber mit anderen Teilen desselben schliessen.

Ferner kommen die äusseren Umstände, z. B.:

8) der Einfluss der Körperwärme des Beobachters auf den Kreis oder andere Teile des Apparates;

9) der Einfluss einer, im allgemeinen vorhandenen Verschiedenheit der Wärme zwischen dem unteren und oberen Rande des Kreises, welche Spannungen in seinem Metall und Veränderungen seiner Figur erzeugt;

10) veranlasst die Voraussetzung, dass die Wasserwage der Alhidade bei jeder Ablesung sich im nicht beeinträchtigten Zustande des Gleichgewichts befinde, einen zufälligen Fehler.

Ausserdem ist dort noch eine Reihe anderer Fehlerquellen angegeben. Man kann aus dieser Aufzählung der Fehlerursachen sehen, dass selbst eine einfache Beobachtungsart, wie die vorliegende, einen Gesamtfehler zeigen muss, welcher aus zahlreichen Ursachen entsteht.

---

**Frage 197.** Was versteht man unter den konstanten oder regelmässigen Fehlern?

**Antwort.** Unter den konstanten oder regelmässigen Fehlern versteht man solche, die bei gleichen Umständen (also z. B. bei gewissen Temperaturen) immer in gleicher Art und Grösse (z. B. nur positiv oder nur negativ) auftreten. Dahin sind z. B. alle Instrumentalfehler, die Ausdehnung einzelner Instrumententeile infolge der Temperatur (z. B. der Pendelstange bei der Uhr zu zählen). Man kann, wie wir in der Folge sehen werden, die regelmässigen Fehler direkt durch Beobachtung und Rechnung bestimmen, wenigstens insoweit, dass die übrig bleibenden Reste kleiner werden, als die zufälligen unvermeidlichen Fehler.

---

**Anmerkung 10.** Bei den folgenden Untersuchungen setzen wir immer voraus, dass das Resultat der Beobachtung von regelmässigen Fehlern frei ist. Denn da sie und ihr Einfluss auf das Resultat bestimmt werden können, wenigstens soweit sie in Betracht gezogen werden, so ist es Sache des Beobachters, alle Ursachen, welche konstante Fehler hervorzubringen vermögen, sorgfältig aufzusuchen und dieselben entweder abzustellen oder wenigstens ihrer Wirkung und Grösse nach auf das Genaueste zu erforschen, um eine jede Einzelnbeobachtung von ihnen befreien zu können.

---

**Frage 198.** Was ist und was bezweckt die Ausgleichs- oder Fehlerrechnung?

**Erkl. 171.** Es kommt oft vor, dass das Resultat der Messung absolut richtig erhalten wird. Da aber in der Regel eine fehlerfreie Beobachtung unmöglich ist, so ist die Richtigkeit des Resultates dem gegenseitigen Aufheben der unvermeidlichen Fehler zuzuschreiben.

**Antwort.** Es ist anzunehmen, dass eine jede Messung mit zufälligen unvermeidlichen Fehlern behaftet ist. Es ist daher wichtig, sich über ihre Grösse zu orientieren. Wird die Messung nur einmal vorgenommen, oder werden nur soviel Messungen gemacht, als für Ausführung der Messung unumgänglich nötig sind, so wird man sich nie ein Urteil über die Richtigkeit der Arbeit bilden können.

Erst wenn mehr Messungen oder Beobachtungen vorhanden sind, als unumgänglich notwendig, gelingt es durch Vergleichung der Resultate, den Genauigkeitsgrad der einzelnen Messungen und hiermit auch das möglichst richtige Resultat zu erhalten.

Dieses mit Hilfe der überschüssigen Beobachtungen aufzufinden, ferner über die Grösse der unvermeidlichen Fehler und die Genauigkeit der Arbeit näheren Aufschluss zu erhalten, ist der Gegenstand der **Ausgleichsrechnung**, welche auf der Methode der kleinsten Quadrate basiert (vergleiche Erkl. 172).

**Erkl. 172.** Die Ausgleichsrechnung basirt auf der Methode der kleinsten Quadrate, welche in Folgendem auseinandergesetzt werden soll. Diese erhielt die wissenschaftliche Begründung und die heutige Form von Gauss. Gauss entdeckte sie im Jahre 1795 und im Jahre 1809 machte er sie in seiner Theoria motus corporum coelestium bekannt. Die 1821 publizierte Abhandlung: Theoria combinationis observationum errorum minimis obnoxiae enthält die Methode der kleinsten Quadrate in der heutzutage üblichen Form.

Früher aber und unabhängig von Gauss ist Legendre (Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes, 1805) auf sie gekommen; von ihm rührt auch der Name „Methode der kleinsten Quadrate" her.

Eine Zusammenstellung der diesbezüglichen Arbeiten findet man in Enckes Berliner Jahrbuch, Jahrgang 1834, 1835, 1836.

Es ist durchaus verfehlt, von einer Priorität der Erfindung der Methode der kleinsten Quadrate zu sprechen. Sobald das Prinzip des arithmetischen Mittels von Simpson (in einer Abhandlung, die im Jahre 1755 in Phil. Transactions erschien) und Lambert (in seiner Photometrie 1761) eingeführt wurde, war es nur ein kleiner Schritt zu der Methode der kleinsten Quadrate. So äussert sich Gauss (siehe dessen Briefwechsel mit Schumacher): „Der Gedanke schien mir vom ersten Anfang an so natürlich, so äusserst naheliegend, dass ich nicht im geringsten zweifelte, viele Personen, die mit Zahlenrechnung zu verkehren gehabt, müssten von selbst auf einen solchen Kunstgriff gekommen sein und ihn gebraucht haben, ohne deswegen es der Mühe wert zu halten, viel Aufsehens von einer so natürlichen Sache zu machen. In der That wurde diese Methode zu gleicher Zeit von mehreren erkannt. So z. B. von D. Huber in Basel (vergl. Wolfs Biographien, I, 453) und vielleicht noch von anderen.

So war, um das schöne Wort Littrows zu gebrauchen, „diese Methode das Eigentum des ganzen Zeitalters" und Gauss sozusagen der gezwungene Träger dieser Entdeckung. Denn seine Befähigung zwang ihn, diesen Beruf anzunehmen.

---

**Frage 199.** Welches ist der leitende Grundsatz der Ausgleichsrechnung?

**Erkl. 173.** Die Methode der kleinsten Quadrate hat also den Zweck, $s$ unbekannte Grössen, zu deren Bestimmung man mehr als $s$ Gleichungen hat, welche aber Beobachtungsresultate enthalten und deshalb mit Fehlern behaftet sind, derart zu bestimmen, dass sich diese Bestimmung den Beobachtungen so genau als möglich anschliesst und dass man dabei über die Genauigkeit dieser Bestimmung und die dabei möglichen Fehler ein Urteil abzugeben imstande ist.

**Erkl. 174.** Die Methode der kleinsten Quadrate wird französisch: „la méthode des moindres carrés" und englisch: „the method of minimum" benannt.

**Antwort.** Um zu dem leitenden Grundsatz der Ausgleichsrechnung zu gelangen, wollen wir zunächst annehmen, dass die Beobachtungen, die vorliegen, sämtlich von gleicher Güte sind, d. h. sämtlich mit möglichst gleicher Genauigkeit gemacht wurden. Sodann ist klar, dass man sie alle ohne Ausnahme bei der Herleitung des wahren oder doch wahrscheinlichsten Wertes der gesuchten Grösse wird verwenden müssen; denn es liegt ja kein Grund vor, die eine oder die andere auszulassen oder zu bevorzugen (vergl. Erkl. 173 und 174).

Nehmen wir ferner an, die Beobachtungen hätten für die gesuchte Grösse $x$ die Werte:

$$x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3\ ,\ x_4\ \cdots$$

**Erkl. 175.** Das arithmetische Mittel ist die Grundlage der Methode der kleinsten Quadrate. Nimmt man nämlich an, dass das arithmetische Mittel der plausibelste Wert ist für $n$ beobachtete Grössen gleicher Genauigkeit, dass also:

$$\Sigma (x - x_k) = 0$$

ist, so ist diese Gleichung nichts anderes, als die Bedingung für das Minimum der Funktion:

$$\Sigma (x - x_k)^2$$

weil ihr Maximum unendlich gross ist.

**Erkl. 176.** In der Methode der kleinsten Quadrate ist es üblich geworden, die Summe der Quadrate der Grössen:

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \cdots$$

einfach durch das Symbol:

$$[a^2]$$

darzustellen, so dass also:

$$[a^2] = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + \cdots$$

Analog soll die Summe:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \cdots$$

mit:

$$[a b]$$

bezeichnet werden.

**Erkl. 177.** Es ist klar, dass alle geraden Potenzen diese Eigenschaft haben, wir handeln nicht nur ökonomisch, sondern auch theoretisch richtig, wenn wir die einfachste der geraden Potenzen wählen. Man vergleiche hierüber Encke, Berliner astron. Jahrbuch 1834, p. 288 bis 293 und Gauss, „Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen" in der Zeitschrift für Astronomie, herausgegeben von Lindenau und Bohnenberger, Tübingen, 1816, Band I, p. 185 bis 196.

geliefert, so dass also:

$$x - x_1 = \triangle x_1$$
$$x - x_2 = \triangle x_2$$
$$x - x_3 = \triangle x_3$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

die Abweichungen von der Grösse $x$ darstellen, von der wir annehmen, dass sie sich allen beobachteten Werten:

$$x_1 \; x_2 \cdots x_n$$

am nächsten anschliesst.

Da wir nur zufällige Fehler voraussetzen, so werden die Abweichungen:

$$\triangle x_1 \quad \triangle x_2 \quad \triangle x_3 \cdots$$

teils positiv, teils negativ.

Wenn wir daher verlangen, dass sie möglichst klein werden, so kann dieses nur geschehen, wenn der Ausdruck (vergleiche Erkl. 175 und 176):

$$(\triangle x_1)^2 + (\triangle x_2)^2 + (\triangle x_3)^2 + \cdots = [\triangle x^2]$$

ein Minimum wird. Dieses ist eine Voraussetzung, deren Berechtigung wir durch nachstehende Betrachtungen darthun wollen.

Es ist klar, dass das Resultat desto genauer sein wird, je weniger es von dem richtigen Werte abweicht, dieses gilt nicht nur von den einzelnen Abweichungen, sondern auch von ihrer Summe.

Da aber die Abweichungen teils positiv, teils negativ sind, so könnte es leicht geschehen, dass ihre Summe gleich Null wäre, während doch die einzelnen Abweichungen ziemlich, ja beliebig gross sein könnten (vergl. Erkl. 177).

Nehmen wir aber an, dass das Quadrat der Abweichung so klein als möglich sein soll, dann besteht die Summe aus lauter Quadraten, also positiven Grössen, und es wird sodann der kleinsten Summe der wahrscheinlichste Wert von $x$ entsprechen.

---

## 2. Ueber den Einfluss gegebener fehlerhafter Daten auf das Resultat.

**Anmerkung 11.** In der Geodäsie werden allgemein Grössen gegeben sein, denen eine bestimmte Unsicherheit anhaftet. Diese Unsicherheit beeinflusst das Resultat. Es ist nun wichtig, zu untersuchen, inwiefern das Resultat von der Unsicherheit der Daten abhängt. Dieses soll in diesem Kapitel geschehen. Dabei wird überall stillschweigend vorausgesetzt, dass diese Unsicherheiten so gering sind, dass wir überall ihre zweite Potenz, wenn dieselbe mit einer endlichen Zahl multipliziert erscheint, gleich Null setzen können. Um das Wesen dieses Kapitels möglichst klar zu machen, stellen wir folgende Fragen:

**Frage 200.** Wie genau muss ein Winkel $\alpha$ (vergl. Figur 244) gemessen werden, wenn mit seiner Hilfe aus der Basis $b = 1$ m die Seite $x$ im rechtwinkligen Dreieck $ABC$ bis 1 Meter sicher sein soll?

Figur 244.

**Antwort.** Wir haben nach einem bekannten Satz der Trigonometrie:

$$x = b \operatorname{tg} \alpha$$

da nun $b = 1$ m, so wird:

$$x = (\operatorname{tg} \alpha)\, m$$

Nehmen wir nun an, es ändere sich $\alpha$ um $\triangle \alpha$, so wird sich auch $x$ um $\triangle x$ ändern und es wird:

$$x + \triangle x = \operatorname{tg}(\alpha + \triangle \alpha)$$

oder (vergl. Kleyers Lehrb. der Differentialrechnung):

$$x + \triangle x = \operatorname{tg} \alpha + \frac{\triangle \alpha \sin 1''}{\cos^2 \alpha}$$

so dass also:

$$\triangle x = \left(\frac{\triangle \alpha}{\cos^2 \alpha}\right)$$

Es soll also nach der Frage:

$$\triangle x < 1 \text{ m}$$

also muss:

$$\frac{\triangle \alpha}{\cos^2 \alpha} < 1$$

d. h.:

$$\triangle \alpha < \cos^2 \alpha$$

Drücken wir $\triangle \alpha$ in Winkelsekunden aus, so wird:

$$\frac{\triangle \alpha''}{206265} < \cos^2 \alpha$$

woraus:

$$\triangle \alpha'' < 206265 \cos^2 \alpha$$

folgt.

Man muss also den Winkel auf 1″ genau haben, wenn:

$$206265 \cos^2 \alpha = 1$$

ist oder wenn (vergleiche Erkl. 178):

$$\alpha = 89^0\, 52'$$

d. h. ist der Winkel $\alpha$ grösser als $89^0\, 52'$, so muss man ihn bis auf 1″ nennen, um $AC = x$ bis auf 1 m genau zu haben.

Da nun:

$$\operatorname{tg} 89^0\, 52' = 440 \text{ (genähert)}$$

so sehen wir, dass wenn das Verhältnis der Länge $AB : AC = 1 : 440$ ist, dass man die Winkel auf 1 Bogensekunde genau haben muss. Da nun bei den gewöhnlichen land messerischen Arbeiten, die Winkel mit Rücksicht auf die möglichen Fehler nur bis auf 1′ genau erhalten werden, so kann man fragen, wie gross das Verhältnis in diesem Falle sein kann. Wir haben also (vergl. Erkl. 179):

$$60'' < 206265 \cos^2 \alpha$$

oder:

$$\frac{60}{206265} < \cos^2 \alpha$$

**Erkl. 178.**

$$\log 206265 = 5 \cdot 3144150$$

$$\log \sqrt{206265} = 2 \cdot 6572075$$

$$\log \frac{1}{\sqrt{106265}} = 7 \cdot 3427925$$

$$= \log \cos (\alpha = 89^0\, 52')$$

genähert.

**Erkl. 179.** Oben fanden wir:

$$\log \frac{1}{\sqrt{206265}} = 7 \cdot 3427925$$

fügt man hinzu:

$$\frac{1}{2} \log 60 = 0 \cdot 8890756$$

so folgt:

$$\log \sqrt{\frac{60}{206265}} = 8 \cdot 2318681$$

$$= \cos \alpha$$

$$= \cos (\alpha = 89^0)$$

genähert, diesem entspricht:

$$\log \operatorname{tg} \alpha = 1 \cdot 75808 \text{ genähert,}$$

also:

$$\operatorname{tg} \alpha = 55 \text{ genähert.}$$

d. h.:

$$\alpha < 89^0$$

und

$$AC < 55 \text{ m}$$

d. h. die Längen von $AB : AC$ können höchstens sich verhalten wie:

$$1 : 55.$$

Hat man nun z. B. die Entfernung eines Gegenstandes zu nennen, auf Grund der Formel:

$$x = b \operatorname{tg} \alpha$$

so muss man auf die soeben entwickelten Relationen Rücksicht nehmen.

Dieses gibt eine Vorstellung über die Anwendung der Sätze, die wir im folgenden entwickeln wollen.

---

**Frage 201.** Ein Rechteck mit den Seiten $x$ und $y$ soll bis auf 1 □m genau gemessen werden; wie genau müssen die Seiten $x$ und $y$ bestimmt werden?

**Antwort.** Der Flächeninhalt des Rechteckes ist:

$$F = xy$$

Aendert sich $x$ in $dx$, $y$ in $dy$, so wird (vergl. Erkl. 180):

$$\frac{dF}{F} = \frac{dy}{y} + \frac{dx}{x}$$

Da nun der Erfahrung gemäss der Fehler der Längenmessung proportional ist der Länge, so wird (vergl. Erkl. 181):

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

also:

$$\frac{dF}{F} = 2 \cdot \frac{dx}{x}$$

d. h. werden $x$ und $y$ gemessen, so müssen sie, da:

$$\frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \frac{dF}{F} = \frac{1}{2}(1)$$

bis auf $\frac{1}{2}$ Meter genau bestimmt werden.

Anders gestaltet sich die Sache, wenn $x$ und $y$ am Papier abgenommen werden. Abgesehen vom Zusammenziehen des Papiers, über welches wir anderswo sprechen, ist $dx$ und $dy$ gleich der Unsicherheit im Einsetzen der Zirkel in den Endpunkten der abzunehmenden Geraden. Wir haben also, da dieselbe unabhängig von der Länge ist:

$$dx = dy$$

zu setzen, so dass:

$$\frac{dF}{F} = \frac{(x+y)}{xy} dx$$

wird.

**Erkl. 180.** Es ist allgemein nach Kleyers Lehrbuch der Differentialrechnung:

$$dF = d(xy) = x dy + y dx$$

daraus folgt:

$$\frac{dF}{F} = \frac{d(xy)}{xy} = \frac{x}{xy} dy + \frac{y}{xy} dx$$
$$= \frac{dy}{y} + \frac{dx}{x}$$

**Erkl. 181.** Man kann annehmen, dass je länger die gemessene Strecke ist, desto grösser der mögliche Fehler wird, also kann man z. B. annehmen, dass bei 10 m ein Fehler von 1 cm wahrscheinlich ist. Dann wird man schliessen müssen, dass bei $10 \times 10$ m, $100 \times 10$ m etc. 1 cm $\times$ 10, 1 cm $\times$ 100 etc. möglich wird, dann wird aber:

$$\frac{10}{1} = \frac{10 \times 10}{1 \times 10} = \frac{10 \times 100}{1 \times 100} = \cdots$$

d. h. allgemein:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

**Bemerkung.** Hieraus folgt die Regel, dass man beim Abnehmen der Masse zur Flächenrechnung möglichst darauf sehen soll, die beiden zu multiplizierenden Faktoren gleich gross zu erhalten und dass man nie sehr kurze Strecken vom Papier abnehmen soll.

**Bemerkung.** An diesen zwei Beispielen kann man sehen, wie wichtig eine derartige Untersuchung unter Umständen sein kann. Man kann auf diese Weise fesstellen, in wie weit etwa zwei auf verschiedenen Wegen erhaltene Resultate miteinander übereinstimmen können und überhaupt, welche Genauigkeit bei der Anwendung dieses oder jenes Instrumentes erreicht werden kann.

Da nun $xy = F$ eine bestimmte Grösse, nämlich die zu berechnende Fläche ist, so wird:

$$\frac{dF}{F}$$

am kleinsten, wenn bei gegebenem $xy$ die Summe $x + y$ ein Minimum wird.

Nun ist es aber bekannt, dass unter allen Rechtecken das Quadrat den kleinsten Umfang hat, man hat daher:

$$x = y$$

zu setzen, wodurch:

$$\frac{dF}{F} = \frac{2x}{x^2}\,dx = 2\,\frac{dx}{x}$$

d. h. das obige Fehlergesetz bleibt auch hier bestehen. Natürlich kann bei sehr kleinem $x$ die Grösse:

$$\frac{dx}{x}$$

auch bedeutend werden.

---

**Frage 202.** Von welchem Grundsatz macht die Fehlerrechnung Anwendung?

**Antwort.** Die Fehlerrechnung beruht auf dem Taylorschen Lehrsatz. Ist $f$ eine Funktion der Grössen:

$$x,\ y,\ z \cdots$$

und werden diese um eine kleine Grösse:

$$\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z \cdots$$

geändert, dann besteht die Relation:

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z \cdots) = f(x,\ y,\ z \cdots) + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \cdots$$

dabei werden die höheren Potenzen vernachlässigt.

Setzt man also:

$$U = f(x,\ y,\ z \cdots)$$

so wird die Aenderung von $U$:

$$\Delta U = f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z \cdots) - f(x,\ y,\ z \cdots)$$

oder:

$$\Delta U = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \cdots$$

also ist die Totaländerung $\Delta U$ eine lineare Funktion der Partialänderungen:

$$\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z$$

**Bemerkung.** Vergleichen wir die angegebenen Grössen mit dem totalen Differentialquotienten von $U$, d. h. mit:

$$dU = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \cdots$$

so sehen wir, dass wir $\Delta U$ erhalten, wenn wir in $dU$ die Grössen:

$$dx,\ dy,\ dz \cdots$$

ersetzen durch:

$$\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z \cdots$$

Man braucht also, um $\Delta U$ zu erhalten, die gegebene Funktion nach allen in ihr enthaltenen Argumenten zu differentieren und die Differentialen:

$$dx,\ dy,\ dz \cdots$$

durch die Veränderungen:

$$\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z \cdots$$

zu ersetzen. Aber dieses gilt nur dann, wenn die zweiten Potenzen der Veränderungen vernachlässigt werden können.

---

**Frage 203.** Wie wird dieser Grundsatz zur Anwendung gebracht?

**Antwort.** Dieser Grundsatz wird in zweierlei Weise in Anwendung gebracht.

Entweder entwickelt man nach den Regeln der Differentialrechnung die Ausdrücke:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}$$

und setzt:

$$\varDelta u = \frac{\partial f}{\partial x} \varDelta x + \frac{\partial f}{\partial y} \varDelta y + \frac{\partial f}{\partial z} \varDelta z$$

oder man bestimmt sich die Grössen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}$$

numerisch. Um dieses klar zu stellen nehmen wir ein einfaches Beispiel.

Nehmen wir an, wir hätten eine Strecke $b$ und einen Winkel $\alpha$ gemessen und daraus eine neue Strecke $a$ durch die Gleichung:

$$a = b \sin\beta$$

abgeleitet. Es fragt sich, wie ändert sich $a$, wenn sich $b$ um $\varDelta b$, $\beta$ um $\varDelta \beta$ ändern? Man hat nach dem obigen Grundsatz (vergleiche Erkl. 183):

$$\varDelta a = \varDelta b \sin\beta + b \cos\beta \cdot \varDelta \beta$$

Nehmen wir einmal an, dass der Winkel $\beta$ sicher bestimmt ist, dass nur die Ungewissheit $b$ betreffen kann, dann ist:

$$\varDelta \beta = 0$$

und

$$\text{I} \ldots \varDelta a = \varDelta b \cdot \sin\beta$$

Würde man aber zuerst numerisch:

$$a = b \sin\beta$$

rechnen, dann mit der Annahme:

$$b + \varDelta b$$

$$a' = (b + \varDelta b) \sin\beta$$

so würde:

$$a' - a = \varDelta b \sin\beta$$

also:

$$\text{II} \ldots a' - a = \varDelta a$$

sein.

Das allgemeine Verfahren im letzteren Falle, an drei Variablen gezeigt, würde also sein:

Nehmen wir an $u$ sei eine Funktion von $x$, $y$, $z$, also:

$$u = f(x, y, z)$$

und man habe die Werte $x_0$, $y_0$, $z_0$ bestimmt, und gefunden (vergl. Erkl. 183):

$$u_0 = f(x_0, y_0, z_0)$$

Will man nun erfahren, wie sich $u_0$ mit $x_0$ ändert, so nehme man ein plausible Annahme $\varDelta x_0$ und rechne damit:

$$u' = f(x_0 + \varDelta x_0, y_0, z_0)$$

so gibt:

$$u' - u$$

die Aenderung von $u$, wenn sich $x_0$ um $\varDelta x$ ändert. Nun ist aber nach dem Taylorschen Lehrsatz:

**Erkl. 182.** Man kann auch ohne Differentialrechnung sich die Fehler bilden, wenn man folgende allgemeine Sätze beachtet:

$$\varDelta(u \pm v) = \varDelta u \pm \varDelta v$$

$$\varDelta(uv) = u \varDelta v + v \varDelta u$$

$$\varDelta\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \varDelta u - u \varDelta v}{v^2}$$

$$\varDelta \sin\beta = \cos\beta \varDelta \beta$$

$$\varDelta \cos\beta = -\sin\beta \varDelta \beta$$

$$\varDelta \operatorname{tg}\beta = \frac{\varDelta \beta}{\cos^2\beta}$$

$$\varDelta \operatorname{ctg}\beta = -\frac{\varDelta \beta}{\sin^2\beta}$$

**Erkl. 183.** So wie z. B. vorhin $a$ eine Funktion von $b$ und $\beta$, also:

$$a = f(b, \beta) = b \sin\beta$$

analog wird:

$$a_0 = f(b_0 \beta_0) = b_0 \sin\beta_0$$

$$a_0 + \varDelta a_0 = f(b_0 + \varDelta b_0, \beta_0 + \varDelta \beta_0)$$

$$= (b_0 + \varDelta b_0) \sin(\beta_0 + \varDelta \beta_0)$$

hiemit ist wohl unsere Schreibweise verständlich.

**Bemerkung.** Es wird vielleicht nicht zwecklos sein, das hier Gesagte an einem einfachen Beispiel klar zu legen. Sei:

$$u = x^2 + x + 1$$

und man verlange:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \text{ für } x = 1$$

Setzen wir also:

$$x_0 = 1$$

so folgt:

$$u_0 = 3$$

Setzen wir ferner:

$$x_0 + \Delta x_0 = 1{,}01$$

so folgt:

$$u_0' = u_0 + \Delta u_0 = 3 \cdot 0301$$

Demnach wird:

$$u_0' - u_0 = (u_0 + \Delta u_0) - u_0 = 3 \cdot 0301 - 3 = 0 \cdot 0301$$

und wir haben:

$$0 \cdot 0301 = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot 0 \cdot 01$$

oder:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_0} = \frac{0 \cdot 0301}{0 \cdot 01} = 3 \cdot 01$$

Bilden wir nun wirklich:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_0} = 2x + 1$$

so wird:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3 \cdot 00$$

wie wir sehen weichen die beiden Resultate nur unmerklich von einander ab. Natürlich ist der numerisch berechnete Differentialquotient ein genauerer, denn er nimmt auch die höheren Potenzen der Grössen $\Delta x$, $\Delta y$ mit.

$$u' = f(x_0 y_0 z_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x$$

oder:

$$u' = u_0 + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x$$

d. h.:

$$\text{I} \ldots w_x = \frac{u' - u_0}{\Delta x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

Hiedurch haben wir $\frac{\partial f}{\partial x}$ rein numerisch bestimmt.

Ebenso rechnen wir mit einer Annahme über $\Delta y$:

$$u'' = f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0)$$

oder:

$$u'' = f(x_0 y_0 z_0) + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y$$

d. h.:

$$\text{II} \ldots w_y = \frac{u'' - u}{\Delta y} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Analog erhalten wir mit einer Annahme über $\Delta z$, wenn:

$$u''' = f(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) = f(x_0 y_0 z_0) + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z$$

also:

$$\text{III} \ldots w_z = \frac{u''' - u}{\Delta z} = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

Da nun:

$$\Delta u = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z$$

so folgt aus I, II, III:

$$\Delta u = w_x \Delta x + w_y \Delta y + w_z \Delta z$$

wobei $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$ jetzt auch andere Werte als vorhin annehmen können.

Diese numerische Berechnung der Differentialquotienten empfiehlt sich dort wo die direkte zu sehr komplizierte Formeln führt, oder zur Kontrolle, oder endlich jenen, die mit der Differentialrechnung nicht vertraut sind.

Man kann auch den Einfluss der Fehler durch Konstruktion erhalten, worüber an geeigneten Orten die Rede sein wird.

Wir geben die Fehlerrechnung in einer Reihe von Aufgaben.

---

## 3. Aufgaben über Fehlerrechnung.

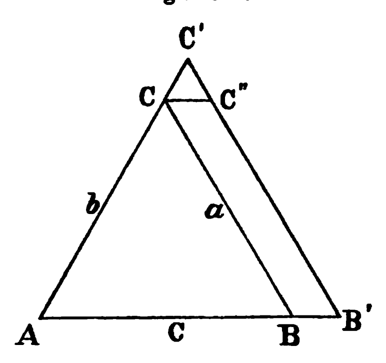
**Aufgabe 90.** In einem Dreiecke, dessen Seiten $a$, $b$, $c$ sind und die ihnen gegenüberliegenden Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, sei gegeben $c$ und die Winkel $\alpha$ und $\beta$. Es fragt sich, in wie fern ein möglicher Fehler in den gegebenen Grössen auf die Berechnung der übrigen einwirkt?

**Auflösung.** Die übrigen Stücke bestimmen sich bekanntlich aus den Gleichungen:

**Bemerkung.** Wir wollen versuchen, für diesen einzigen Fall die Fehler geometrisch abzuleiten. Betrachten wir zunächst nur $c$ als fehlerhaft, dann lehrt der Anblick der Figur 245 sofort, dass:

$$\triangle CC'C'' \sim \triangle ABC$$

Figur 245.




ist also:

$$BB' = \varDelta c$$
$$CC' = \varDelta b$$
$$CC'' = \varDelta a$$

so wird:

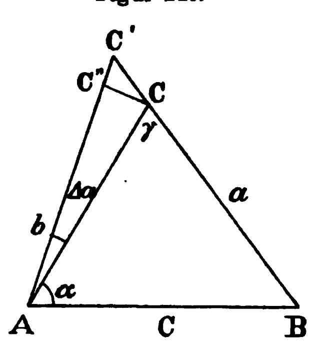
$$\frac{\varDelta a}{\varDelta c} = \frac{a}{c}, \quad \frac{\varDelta b}{\varDelta c} = \frac{b}{c}$$

also:

$$\varDelta a = \frac{a}{c}\varDelta c, \quad \varDelta b = \frac{b}{c}\varDelta c$$

Betrachten wir nun etwa den Winkel $\alpha$ als veränderlich, so haben wir (vergl. Figur 246):

Figur 246.




$$\varDelta a = cc', \quad \varDelta b = c'c''$$

wobei das kleine $\triangle CC'C''$ ein rechtwinkliges mit dem rechten Winkel an $C''$ ist. Wir können es also so darstellen (vergl. Figur 247):

$$\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$$
$$b = c\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$
$$a = c\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

Wir haben also:

$$\text{I} \ldots \varDelta\gamma = -(\varDelta\alpha + \varDelta\beta)$$

Ferner ist nach den Lehren der Differentialrechnung:

$$\varDelta b = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\varDelta c + c\frac{\sin(\alpha+\beta)\cos\beta - \sin\beta\cos(\alpha+\beta)}{[\sin(\alpha+\beta)]^2}\varDelta\beta - c\frac{\sin\beta\cos(\alpha+\beta)}{[\sin(\alpha+\beta)]^2}\varDelta\alpha$$

oder:

$$\varDelta b = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\varDelta c + c\frac{\sin\alpha}{\sin^2\gamma}\varDelta\beta + c\frac{\sin\beta\cos\gamma}{\sin^2\gamma}\varDelta\alpha$$

Nun ist aber:

$$\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{b}{c}, \quad \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{a}{c}$$

also wird:

$$\text{II} \ldots \varDelta b = \frac{b}{c}\varDelta c + \frac{a}{\sin\gamma}\varDelta\beta + b\operatorname{ctg}\gamma\varDelta\alpha$$

analog wird:

$$\text{III} \ldots \varDelta a = \frac{a}{c}\varDelta c + \frac{b}{\sin\gamma}\varDelta\alpha + a\operatorname{ctg}\gamma\varDelta\beta$$

Hier wird für $\gamma = 0$:

$$\varDelta b = \infty, \quad \varDelta a = \infty$$

d. h. unendlich gross, demnach können für kleine $\gamma$ $\varDelta a$ und $\varDelta b$ beträchtliche Werte erhalten.

Relativ werden für:

$$\gamma = 90^0$$

die Fehler am kleinsten, nämlich:

$$\varDelta b = \frac{b}{c}\varDelta c + a\varDelta\beta$$
$$\varDelta a = \frac{a}{c}\varDelta c + b\varDelta\alpha$$

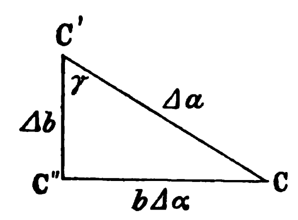
oder:

$$\frac{\varDelta b}{b} = \frac{\varDelta c}{c} + \frac{a}{c}\varDelta\beta$$
$$\frac{\varDelta a}{a} = \frac{\varDelta c}{c} + \frac{b}{c}\varDelta\alpha$$

Ist $\varDelta\alpha$ und $\varDelta\beta$ positiv, dann sind die Fehler von $\varDelta a$ und $\varDelta b$ etwas grösser als der Fehler der gemessenen Grösse $c$.

Soll daher ein Dreieck aus einer Grundlinie und zwei anliegenden Winkeln bestimmt werden, so wird diese Bestimmung am genauesten ausfallen, wenn das Dreieck ein rechtwinkliges und gleichschenkliges ist.

Figur 247.




so dass wir haben:

$$\Delta b = b \Delta \alpha \operatorname{ctg} \gamma$$

$$\Delta a = \frac{b \Delta \alpha}{\sin \gamma}$$

Dieselbe Betrachtung für den Winkel $\gamma$ ausgeführt gibt:

$$\Delta b = \frac{a \Delta \beta}{\sin \gamma}$$

$$\Delta a = a \Delta \beta \operatorname{ctg} \gamma$$

Lassen wir alle Grössen sich ändern, so wird der Effekt gleich der Summe der Einzelneffekte, also z. B.:

$$\Delta b = \frac{b}{c} \Delta c + b \Delta \alpha \operatorname{ctg} \gamma + \frac{a}{\sin \gamma} \Delta b$$

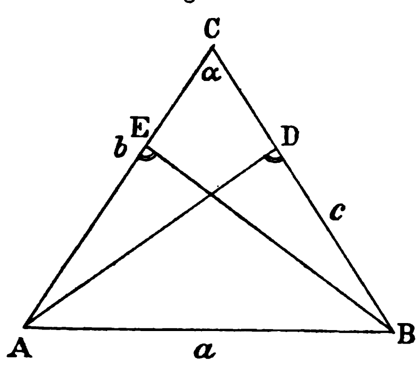
In ähnlicher Weise lassen sich alle nachstehenden Fehlergleichungen ableiten.

Wenn wir auch im nachfolgenden die Differentialmethode fast ausschliesslich behalten, so empfehlen wir doch dem Leser auf das Drirgendste, zu versuchen, in dieser Art sich die Bedeutung der entwickelten Formeln auf diese Weise zu veranschaulichen.

---

**Aufgabe 91.** Im Dreieck $ABC$ seien zwei Seiten $b$ und $c$ und der eingeschlossene Winkel $\alpha$ gemessen. Die Veränderungen der übrigen Stücke sind zu berechnen (vergl. Figur 248).

Figur 248.




**Bemerkung.** Wir empfehlen dem Leser, zur Uebung auch die geometrische Konstruktion analog wie im vorhergehenden Falle durchzuführen, um sich die Wirkung der Abweichungen zu veranschaulichen.

**Auflösung.** Wir haben die Gleichungen:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c} \sin (\alpha + \beta)$$

$$\sin \gamma = \frac{c}{b} \sin (\alpha + \gamma)$$

Wir haben:

$$a \Delta a = b \Delta b + c \Delta c - (b \Delta c + c \Delta b) \cos \alpha + bc \sin \alpha \Delta \alpha$$

oder:

$$a \Delta a = (b - c \cos \alpha) \Delta b + (c - b \cos \alpha) \Delta c + bc \sin \alpha \Delta \alpha$$

Nun ist aber (vergl. Figur 248):

$$b - c \cos \alpha = AE = p_b$$

$$c - b \cos \alpha = BD = p_c$$

gleich der Projektion von $AB$ auf die Seiten $b$ resp. $c$. Ferner ist:

$$bc \sin \alpha = 2J$$

wo $J$ den Inhalt bezeichnet.

Wir haben also:

$$\Delta a = \frac{p_b}{a} \Delta b + \frac{p_c}{a} \Delta c + 2J \cdot \Delta a$$

Damit also $\Delta a$ klein ausfalle, müssen:

$$\frac{p_b}{a}, \quad \frac{p_c}{a}$$

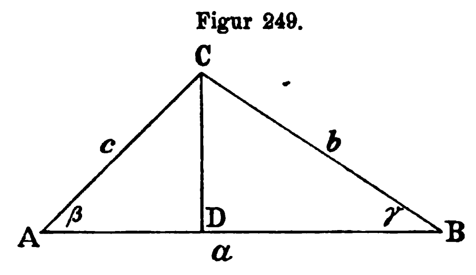
**Erkl. 184.** Es ist (vergl. Figur 249):

$$c \cos\beta + b \cos\gamma = a$$

also wenn man durch $c$ dividiert:

$$\cos\beta + \frac{b}{c}\cos\gamma = \frac{a}{c}$$

Figur 249.




Es ist nämlich (wobei $AB \perp DC$):

$$AB = a = AD + BD$$

nun ist aber im $\Delta ADC$:

$$AD = AC \cos\beta = c\cos\beta$$

und im $\Delta DCB$:

$$BD = BC\cos\gamma = b\cos\gamma$$

also:

$$a = c\cos\beta + b\cos\gamma$$

klein und auch $J$ klein sein. Diese werden aber um so kleiner, je stumpfer der Winkel $\alpha$ wird.

Ferner haben wir:

$$\cos\beta\,\Delta\beta = \frac{b}{c}\cos(\alpha+\beta)(\Delta\alpha+\Delta\beta) + \sin(\alpha+b)\,\Delta\frac{b}{c}$$

Nun ist aber:

$$\alpha+\beta = 180 - \gamma$$

also:

$$\Delta\alpha + \Delta\beta = -\Delta\gamma$$

so dass wir also haben:

$$\Delta\beta\left(\cos\beta + \frac{b}{c}\cos\gamma\right) = -\frac{b}{c}\cos\gamma\,\Delta\alpha + \sin\gamma\,\Delta\frac{b}{c}$$

(vergl. Erkl. 184):

Nun ist aber:

$$\cos\beta + \frac{b}{c}\cos\gamma = \frac{a}{c}$$

also wird:

$$\underline{\Delta\beta = -\frac{b}{a}\cos\gamma\,\Delta\alpha + \frac{\sin\gamma}{a}\,\Delta\frac{b}{c}}$$

Analog folgt:

$$\underline{\Delta\gamma = -\frac{c}{a}\cos\beta\,\Delta\alpha + \frac{\sin\beta}{a}\,\Delta\frac{b}{c}}$$

---

**Aufgabe 92.** In einem Dreiecke seien die drei Seiten $a$, $b$, $c$ durch Messung bestimmt; es entsteht die Frage, wie wirken ihre Unsicherheiten auf die Bestimmung der Winkel?

**Erkl. 185.** Es ist nach Kleyers Lehrbuch der Differentialrechnung:

$$d\cdot\cos\gamma = -\sin\gamma\,d\gamma$$
$$d\cdot\sin\gamma = \cos\gamma\,d\gamma$$

Diese Formeln können auch direkt bewiesen werden für unseren Zweck. Es ist:

$$\cos(\gamma+\Delta\gamma) = \cos\gamma\cos\Delta\gamma - \sin\gamma\sin\Delta\gamma$$

da $\Delta\gamma$ ein kleiner Winkel ist, so kann man:

$$\cos\Delta\gamma = 1$$
$$\sin\Delta\gamma = \Delta\gamma$$

setzen, so dass:

$$\cos(\gamma+\Delta\gamma) - \cos\gamma = \sin\gamma\cdot\Delta\gamma$$

Es muss hier aber noch hervorgehoben werden, dass wenn $\Delta\gamma$ in Sekunden ausgedrückt wird, man zu setzen hat:

$$\sin\Delta\gamma = \Delta\gamma''\sin 1''$$

sonst muss $\Delta\gamma$ im Bogenmass ausgedrückt werden. Diese Bemerkung gilt natürlich für alle derartige Berechnungen.

**Auflösung.** Wir haben die Gleichungen:

$$a = b\cos\gamma + c\cos\beta$$

ferner:

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

also:

$$c\sin\beta = b\sin\gamma$$

Demnach haben wir (vergl. Erkl. 185):

$$\Delta a = \Delta b\cos\gamma + \Delta c\cos\beta - b\sin\gamma\,\Delta\gamma - c\sin\beta\,\Delta\beta$$

oder:

$$\Delta a = \Delta b\cos\gamma + \Delta c\cos\beta - (\Delta\gamma + \Delta\beta)\,c\sin\beta$$

Da nun aber:

$$-(\Delta\gamma+\Delta\beta) = \Delta\alpha$$

so folgt:

$$\Delta a = \Delta b\cos\gamma + \Delta c\cos\beta \pm \Delta\alpha\,c\sin\beta$$

oder:

$$\underline{\Delta\alpha = \frac{\Delta a}{c\sin\beta} - \frac{\Delta b\cos\gamma}{c\sin\beta} - \frac{\Delta}{c}\operatorname{ctg}\beta}$$

Analoge Formeln ergeben sich für die übrigen Winkel und es wird:

## Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der **ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert, um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft.

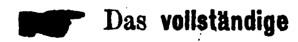
5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

---



Das **vollständige**

## Inhaltsverzeichnis

### der bis jetzt erschienenen Hefte

kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

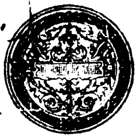
---

**Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.**

Druck von Carl Hammer in Stuttgart

| 1302. Heft. | Preis des Heftes 25 Pf. | Vermessungskunde (Geodäsie). Erster Teil. Forts. v. Heft 1292. — Seite 209—224. Mit 3 Figuren. |
|---|---|---|





# Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
**Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten**
erläutert durch
**viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,**
aus allen Zweigen
der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — **aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie**; des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's**; der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
**zum einzig richtigen und erfolgreichen**
**Studium**, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

**Dr. Adolph Kleyer,**
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in **Frankfurt a. M.**
unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

# Vermessungskunde
## (Geodäsie).
### Erster Teil.

Nach **System Kleyer** bearbeitet von **Dr. W. Láska.**
Fortsetzung von Heft 1292. — Seite 209—224. Mit 3 Figuren.

**Inhalt:**



**Stuttgart 1894.**

**Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.**

# PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form,** mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten etc.**, so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann **auch alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich **aber auch** die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit **Angabe der Namen** verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, **nimmt der Verfasser,** Dr. **Kleyer,** Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren **Erledigung** thunlichst berücksichtigt.

**Stuttgart.** **Die Verlagshandlung.**

$$\Delta\beta = \frac{\Delta b}{a \sin\gamma} - \frac{\Delta c \cos\alpha}{a \sin\gamma} - \frac{\Delta a}{a} \operatorname{ctg}\gamma$$

$$\Delta\gamma = \frac{\Delta c}{b \sin\alpha} - \frac{\Delta a \cos\beta}{b \sin\alpha} - \frac{\Delta b}{b} \operatorname{ctg}\alpha$$

Aus diesen Formeln ersieht man, dass nie:

$$\sin\alpha, \quad \sin\beta, \quad \sin\gamma$$
$$\operatorname{ctg}\alpha, \quad \operatorname{ctg}\beta, \quad \operatorname{ctg}\gamma$$

gross sein darf, d. h. dass kleine Winkel zu vermeiden sind, sollen aber die Winkel grösstmöglichst sein, so ist es am besten, da ihre Summe gleich $180^0$ sein muss, sie alle drei gleich $60^0$ zu nehmen. Mit anderen Worten, sind alle drei Seiten gemessen, so ist es für die Bestimmung der Winkel am vorteilhaftesten, die Seiten möglichst gleich zu nehmen.

**Bemerkung.** Aus diesem Grunde strebt man bei den Triangulationen darnach, möglichst gleichseitige Dreiecke zu erhalten. Aber auch bei den untergeordneten Messungen sollte man darauf Rücksicht nehmen.

---

**Aufgabe 93.** Mittels der genau gemessenen Standlinie $b$ soll die Höhe eines Turmes $h$ bestimmt werden; es entsteht die Frage, wie lang muss man die letztere nehmen, um ein möglichst genaues Resultat zu erhalten und wie gross wird der Fehler sein?

**Auflösung.** Es besteht die Gleichung:

$$h = b \operatorname{ctg}\beta$$

also:

$$\Delta h = \Delta b \operatorname{ctg}\beta - b \frac{\Delta\beta}{\sin^2\beta}$$

da nun nach der Voraussetzung die Basis $b$ genau vermessen wurde, also:

$$\Delta b = 0$$

ist, so folgt (vergl. Erkl. 186):

$$\Delta h = -b \frac{\Delta\beta}{\sin^2\beta}$$

oder da:

$$\frac{\Delta h}{h} = -\frac{b}{h} \frac{\Delta\beta}{\sin^2\beta} = -\frac{\Delta\beta}{\operatorname{ctg}\beta \sin^2\beta}$$

$$\frac{\Delta h}{h} = -\frac{2\Delta\beta}{\sin 2\beta}$$

Es wird also $\frac{\Delta h}{h}$ am kleinsten, wenn:

$$\sin 2\beta = 1$$

d. h.:

$$\beta = 45^0$$

dann wird aber:

$$\frac{\Delta h}{h} = -2\Delta\beta$$

Ist $\Delta\beta$ in Minuten gegeben, so muss:

$$\frac{\Delta h}{h} = -2 \frac{2\cdot\pi\cdot\Delta\beta'}{360\cdot 60}$$

gesetzt werden. Es ist:

$$\frac{2\pi}{360\cdot 60\cdot 60} = \frac{1}{206265}$$

$$\frac{2\pi}{360\cdot 60} = \frac{1}{3438}$$

**Erkl. 186.** Sei also $\beta = 45^0$, $b = 83$ m, $\Delta\beta = \pm 10'$, so wird:

$$\Delta h = \pm 2 h . \Delta\beta$$
$$= \pm 2\cdot 83\cdot \frac{2\pi\cdot 10'}{360^0}$$

Setzen wir:

$$\pi = \frac{22}{7}, \quad 10' = \left(\frac{1}{6}\right)^0$$

so folgt:

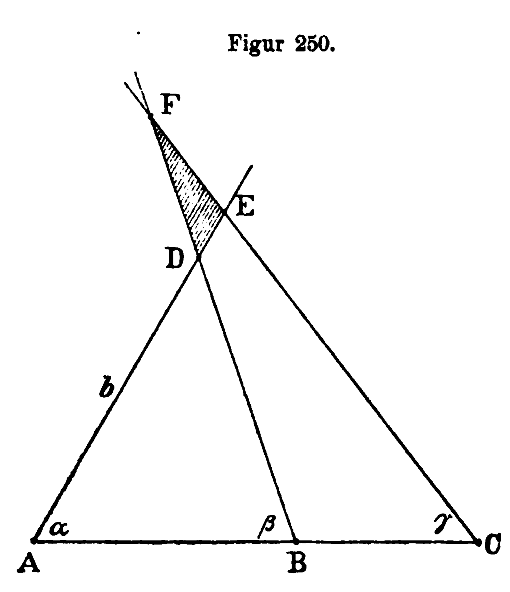
$$\Delta h = \pm \frac{4\cdot 83\cdot \frac{22}{7}}{360\cdot 6} = \pm 0\cdot 483$$

Es wird also $h$ bis auf $\pm 0{,}5$ m Meter genau sein.

## 4. Die fehlerzeigenden Figuren.

**Frage 204.** Was versteht man unter der fehlerzeigenden Figur?

Figur 250.




**Antwort.** Unter der fehlerzeigenden Figur versteht man die bildliche Darstellung der durch überschüssige Messungen erhaltenen verschiedenen Werte einer zu bestimmenden Grösse.

Um dieses klar zu machen, nehmen wir an, wir hätten auf Grund einer gemessenen doppelseitigen Basis $ABC$ (vergl. Figur 250) und der gemessenen Winkel $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ den dritten Punkt des so bestimmten Dreiecks gesucht.

Zeichnet man die wirklich gemessenen Richtungen, so erhält man im allgemeinen ein Dreieck $DEF$, das sogen. Fehlerdreieck.

Die Seite $DE$ wird rechnerisch erhalten, wenn man aus $AB$ und den Winkeln $\alpha$ und $\beta$ rechnet:

$$AD = AB \cdot \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

und analog aus $AC$ und den Winkeln $\alpha$, sowie $\gamma$:

$$AE = AC \frac{\sin \gamma}{\sin(\alpha + \gamma)}$$

dann ist:

$$DE = AE - AD$$

Ebenso kann man auch die übrigen Seiten rechnerisch bestimmen. Liegen dieselben innerhalb der zu erwartenden Fehler, so nimmt man den Schwerpunkt der Fehlerdreiecksecken für den gesuchten Punkt; ist dieses nicht der Fall, so muss die Rechnung wiederholt werden.

---

**Frage 205.** Wie wird der Schwerpunkt der Fehlerdreiecksecken bestimmt?

**Antwort.** Um den Schwerpunkt der Fehlerdreiecksecken im vorliegenden Fall zu bestimmen, kann man folgende Ueberlegung anstellen:

Wir haben (vergl. Aufgabe 90) gefunden, dass der Fehler einer Seite, etwa $AD = b$, bei gegebener Basis und den ihr anliegenden Winkeln gegeben ist durch die Formel:

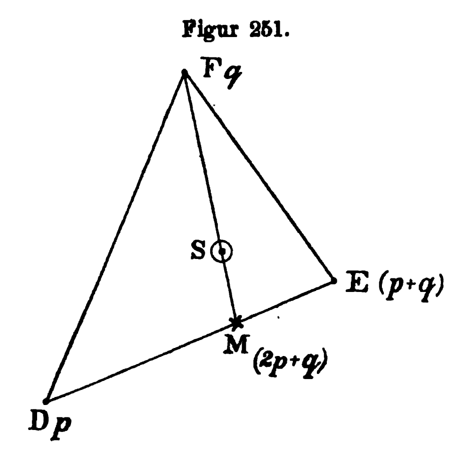
$$\varDelta b = \frac{b}{c} \varDelta c + \frac{a}{\sin \gamma} \varDelta \beta + b \operatorname{ctg} \gamma \varDelta \alpha$$

Ist nun $c$ klein im Verhältnis zu $b$, so wird auch der Winkel $\gamma$ klein; wir können daher sagen, dass der Fehler in $b$ wächst mit der Grösse $\frac{1}{c}$. Diese Grösse gibt also die Genauigkeit oder das Gewicht dieser Bestimmung an. Wir können daher sagen, das Gewicht eines Scheitelpunktes ist um-

**Bemerkung.** Um dieses einzusehen, nehmen wir $\gamma = 0$ sehr klein, dann wird:

$$\varDelta b = \frac{b}{c} \varDelta c + \frac{a}{0} \varDelta \beta + b \cdot \infty \varDelta \alpha$$

d. h. ein jeder noch so kleine Fehler in $\alpha$ und $\beta$ wirkt $\infty$ mal vergrössert auf das Resultat. Da aber $c$ zugleich mit $\gamma \infty$ klein wird, so sehen wir, dass auch ein Fehler in $c$ $\infty$ mal vergrössert auf das Resultat eingeht. Wir müssten $\infty$ genau diese Grösse messen, damit der Fehler endlich werde. Darum sind in der Praxis auch die sehr schmalen Dreiecke zu umgehen, da sie sehr genaue Messungen erfordern und oft doch nur zu illusorischen Resultaten führen.



Figur 251.

gekehrt proportional der Basis, aus welcher er abgeleitet wurde.

Setzen wir nun in der Figur 251:

$$AB = p, \quad BC = q$$
$$AC = p + q$$

so sind die Gewichte der einzelnen Punkte:

$D \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \; p$
$E \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \; p + q$
$F \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \; q$

Um nun den Schwerpunkt zu finden, suchen wir auf $DE$ (vergl. Figur 251) einen Punkt $M$ derart, dass:

$$DM : ME = p + q : p$$

verbinden $M$ mit $F$ und suchen auf der Strecke $FM$ einen Punkt $S$, so dass:

$$MS : SF = q : 2p + q$$

dann ist $S$ der gesuchte Schwerpunkt.

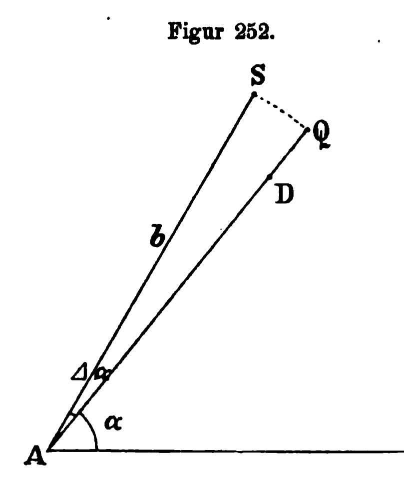
---

**Frage 206.** Wie wird der Punkt $S$ durch Rechnung gefunden, d. h. wie hat man weiter zu verfahren, wenn $S$ graphisch bestimmt worden?

**Antwort.** Um diese graphische Konstruktion für die Rechnung verwerten zu können, müssen wir die Korrektionen der Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ berechnen.

Dieses geschieht in nachstehender Weise:

Sei $D$ der ursprüngliche, $S$ der durch die fehlerzeigende Figur gewonnene Punkt, so wird (vergl. Figur 252):



Figur 252.

$$\operatorname{tg} \Delta\alpha'' = \frac{SQ}{AQ}$$

wenn wir $SQ \perp QD$ gemacht haben. Da aber $\Delta\alpha''$ ein sehr kleiner Winkel ist, so können wir schreiben:

$$\operatorname{tg} \Delta\alpha'' = \Delta\alpha'' \cdot \sin 1'' = \frac{SQ}{b}$$

indem wir zugleich $AQ = AS = b$ genähert setzen, indem der Unterschied dieser Grössen sehr klein ist. Wir haben also:

$$1) \ldots \Delta\alpha'' = \frac{SQ}{b} \cdot \frac{1}{\sin 1''} = \frac{SQ}{b} 206265$$

Wird also $SQ$ dem Fehlerdreieck entnommen, so kann man sich leicht den Betrag $\Delta\alpha''$ und analog auch für die übrigen Winkel berechnen. Um diesen Betrag werden die Winkel verbessert und damit vom neuen der gesuchte Punkt $S$ berechnet. Aus den verschiedenen Resultaten nimmt man nun einfach das arithmetische Mittel.

---

## 5. Ausgleichung direkter Beobachtungen von gleicher Genauigkeit.

**Anmerkung 12.** Wird die gesuchte Grösse direkt beobachtet, so haben wir eine direkte Beobachtung. Geschieht diese Beobachtung in einerlei Weise, mit Hilfe desselben Instruments und von demselben Beobachter, kurz unter denselben Umständen, so erhält man eine direkte Beobachtung von gleicher Genauigkeit.

**Frage 207.** Welches ist der wahrscheinlichste Wert für eine durch direkte Beobachtung von gleicher Genauigkeit zu ermittelnde Grösse?

**Antwort.** Sei $x$ der wahrscheinlichste Wert, für welchen die direkten Beobachtungen, die wir sämtlich von gleicher Genauigkeit voraussetzen, die Werte:

$$x_1\ x_2 \cdot x_3 \cdots x_n$$

geliefert haben. Sodann erhalten wir nach dem Obigen den wahrscheinlichsten Wert von $x$, wenn wir das Minimum von:

$$(x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \cdots (x - x_n)^2 = [\varDelta x^2]$$

bestimmen. Zu diesem Zwecke haben wir bekanntlich:

$$\frac{d}{dx}[\varDelta x^2] = 0$$

zu setzen, also:

$$2(x - x_1) + 2(x - x_2) + \cdots (x - x_n) = 0$$

woraus:

$$1) \ldots x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots x_n}{n} = \frac{[x]}{n}$$

Daraus folgt der Satz: das arithmetische Mittel aus sämtlichen Beobachtungen gibt den wahrscheinlichsten Wert für die gesuchte Grösse.

**Erkl. 187.** Wir sind hier von dem Prinzip ausgegangen, dass die Summe der Quadrate der übrigbleibenden Fehler ein Minimum ist und sind so zum arithmetischen Mittel gelangt. Es soll aber sogleich gesagt werden, dass gerade die Annahme der arithmetischen Mittel auf das Prinzip der kleinsten Quadrate geführt hat. Geht man von anderen Mitteln aus, so gelangt man zu anderen Prinzipien der Ausgleichsrechnung. (Vergleiche Fechner, Ueber den Ausgangswert der kleinsten Abweichungssumme, Abhandl. der K. sächs. Ges. der Wiss., 1874, und daselbst im Jahrg. 1873 eine verwandte Abhandlung von Scheibner.) Nicht immer gibt aber das arithmetische Mittel den planimetrischen Wert der gesuchten Grösse. So hat unter anderem Thiele in seiner Schrift: Untersogelse af Omlobsbewaegelsen i Dobbelstjerne gezeigt, dass der plausibelste Wert bei durch Schätzung ermittelten Doppelsterndistanzen, das geometrische Mittel:

$$x = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

ist. Man vergleiche auch eine Abhandlung von Bessel im XV. Bande der Astron. Nachrichten. No. 358, Abs. 2.

---

**Frage 208.** Ist das arithmetische Mittel der wahre Wert der gesuchten Grösse?

**Antwort.** Das arithmetische Mittel ist noch nicht der wahre Wert der gesuchten Grösse, sondern eine Grösse, die der gesuchten sich so gut, als es eben möglich war, anschliesst. Es wird immer zwischen der gesuchten Grösse und dem soeben gefundenen Mittel noch eine Differenz bestehen.

Diese Grösse wird der mittlere Fehler der einzelnen Beobachtung genannt.

Der Fehler des arithmetischen Mittels also:

$$\xi - \frac{[x]}{n} = \pm \mu$$

wird nun auf folgende Art gewonnen.

**Erkl. 188.** Was die Durchschnittsfehler zu einander betrifft, so ist leicht zu zeigen, dass der mittlere Fehler im allgemeinen grösser ist als der durchschnittliche ist, nur wenn die Einzelnfehler einander gleich sind, so werden auch der durchschnittliche Fehler und der mittlere einander gleich.

Seien zwei Beobachtungen gegeben, also:

$$t = \frac{\partial x_1 + \partial x_2}{2}$$

$$m^2 = \frac{\partial x_1^2 + \partial x_2^2}{2}$$

bilden wir:

$$t^2 = \frac{\partial x_1^2 + \partial x_2^2}{4} + \frac{2\partial x_1 \partial x_2}{4}$$

so wird:

$$m^2 - t^2 = 2 \cdot \frac{\partial x_1^2 + \partial x_2^2}{4} - \frac{\partial x_1^2 + \partial x_2^2}{4}$$

$$- \frac{2\partial x_1 \partial x_2}{4} = \frac{\partial x_1^2 + \partial x_2^2 - 2\partial x_1 \partial x_2}{4}$$

also:

$$m^2 - t^2 = \left(\frac{\partial x_1 - \partial x^2}{2}\right)^2$$

Die Differenz $m^2 - x^2$ ist also immer positiv, demnach weil $m^2$ um $t^2$ immer nur positive Zahlen sind:

$$m > t$$

Wird $\partial x_1 = \partial x_2$, so wird:

$$m = t$$

Dieser Beweis lässt sich leicht auf beliebig viele Elemente ausdehnen.

Addieren wir die Gleichungen:

$$\xi = x_1 + \partial x_1$$
$$\xi = x_2 + \partial x_2$$
$$\cdots\cdots$$
$$\xi = x_n + \partial x_n$$

und dividieren sie durch $n$, so folgt:

$$\xi = \frac{[x]}{n} + \frac{[\partial x]}{n}$$

woraus sofort:

$$\pm \mu = \frac{[\partial x]}{n}$$

folgt, oder:

$$\mu^2 = \frac{[\partial x]^2}{n^2} = \frac{[\partial x^2] + 2[\partial x \, \partial x]}{n^2}$$

wenn wir mit $[\partial x \, \partial x]$ die Summe:

$$\partial x_1 \partial x_2 + \partial x_1 \partial x_3 + \cdots \partial x_{n-1} \partial x_n$$

bezeichnen. Diese Summe ist, da $\partial x$ sowohl positiv, als auch negativ sein können, gleich Null, so dass also:

$$\mu^2 = \frac{[\partial x^2]}{n^2} = \frac{[\partial x^2]}{n} \cdot \frac{1}{n}$$

oder da:

$$m^2 = \frac{[\partial x^2]}{n}$$

auch:

$$\mu^2 = \frac{m^2}{n}$$

woraus endlich:

$$3) \ldots \mu = \pm \frac{m}{\sqrt{n}}$$

d. h. die Genauigkeit des arithmetischen Mittels nimmt proportional der Quadratwurzel der Beobachtungszahl zu. Es geben z. B.:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | Beobachtungen | eine 2fache | Genauigkeit, |
| 9 | „ | „ 3fache | „ |
| 16 | „ | „ 4fache | „ |

etc. etc.

---

**Frage 209.** Sind die Ausdrücke für den mittleren Fehler für die wirkliche Berechnung geeignet?

**Erkl. 189.** Ausser diesem mittleren Fehler lehrt die Theorie der Wahrscheinlichkeit noch den wahrscheinlichen Fehler zu bilden. In der Wirklichkeit empfiehlt es sich immer, den mittleren Fehler zu berechnen, da der letztere nur eine mathematische Fiktion ist. Hansen (Sitzungsber. der K. sächs. Ges. der Wiss., 1867, p. 798) erklärt sich gegen die praktische Anwendung des wahrscheinlichen Fehlers, ebenso Gauss (Briefwechsel mit Schumacher I., p. 433), welcher sagt: „die soge-

**Antwort.** Die Ausdrücke für den mittleren Fehler, wie wir sie entwickelt haben, sind für die wirkliche Berechnung deswegen nicht verwendbar, weil sie die unbekannten Grössen $dx$ enthalten. Es tritt also an uns die Aufgabe, ihnen eine für die Berechnung geeignete Form zu geben.

Aus:

$$x - x_1 = \Delta x_1$$

und

$$\xi - x_1 = \partial x_1$$

folgt:

$$\xi - x = \partial x_1 - \Delta x_1$$

nannten wahrscheinlichen Fehler wünsche ich eigentlich als von der Hypothese (nämlich des arithmetischen Mittels) abhängig ganz proscribiert, man mag sie aber berechnen, indem man die mittleren mit 0,67449 ··· multipliziert."

**Erkl. 190.** Es sei $n = 1$, dann geht die Formel 4) über in:

$$m = \pm \frac{0}{0}$$

d. h. der mittlere Fehler einer einzigen Beobachtung kann nicht bestimmt werden. Sind zwei Beobachtungen gegeben $x_1$ und $x_2$, so folgt:

$$\Delta x_1 = \frac{x_1 + x_2}{2} - x_1 = -\frac{x_1 - x_2}{2}$$

$$\Delta x_2 = \frac{x_1 + x_2}{2} - x_2 = +\frac{x_1 - x_2}{2}$$

also ist:

$$\Delta x_1 = -\Delta x_2$$

Wir erhalten demnach:

$$m = \pm \sqrt{\frac{2(\Delta x_1)^2}{2-1}} = \pm \Delta x_1 \sqrt{2}$$

und

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{2(\Delta x_1)^2}{2(2-1)}} = \pm \Delta x_1 = \mp \Delta x_2$$

oder da:

$$\xi - x = \mu$$

ist auch:

$$\partial x_1 = \Delta x_1 + \Delta x_1 + \mu$$

und analog:

$$\partial x_2 = \Delta x_2 + \mu$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\partial x_n = \Delta x_n + \mu$$

hieraus folgt durch Quadrieren und Addieren:

$$[\partial x^2] = [\Delta x^2] + 2\mu[\Delta x] + n\mu^2$$

Da nun:

$$[\Delta x] = 0$$

und

$$[\partial x^2] = n m^2$$

$$n\mu^2 = m^2$$

ist, so folgt:

$$n m^2 = [\Delta x^2] + m^2$$

oder:

$$m^2(n-1) = [\Delta x^2]$$

woraus:

$$4) \ldots m = \pm \sqrt{\frac{[\Delta x^2]}{n-1}}$$

und da:

$$\mu = \frac{m}{\sqrt{n}}$$

auch:

$$5) \ldots \mu = \pm \sqrt{\frac{[\Delta x^2]}{n(n-1)}}$$

## 6. Ausgleichung direkter Beobachtungen ungleicher Genauigkeit.

**Anmerkung 13.** Wir haben bisher vorausgesetzt, dass die Beobachtungen sämtlich von gleicher Genauigkeit sind. Diese Voraussetzung muss man fallen lassen, wenn die Bestimmung der gesuchten Grösse von verschiedenen Beobachtern mit verschiedenen Instrumenten und durch verschiedene Methoden geschieht. Wir haben nachzusehen, wie dann der mittlere Wert zu ermitteln ist.

**Frage 210.** Wie lassen sich aus den Beobachtungen gleicher Genauigkeit solche mit ungleicher konstruieren?

**Erkl. 191.** Die Bildung des allgemeinen Mittels aus Zahlen, deren Gewichte ungleich sind, ist sehr alt. Schon um die Zeit Newtons war sie bekannt. Aeussert sich ja Roger Cotes, ein Freund und Schüler Newtons (geb. 1682, † 1716), in seinem Werke Harmonia mensurarum wie folgt:

„Sit $p$ locus objecti alicujus ex observatione prima definitus, $q$, $r$, $s$ ejusdem objecti loca in observationibus sequentibus; sint insuper $P$, $Q$, $R$, $S$ pondera reciproce proportionalia spatiis evagationum, per quae se diffundere possint errores ex observationibus singulis provenientes, quae dantur ex datis errorum limitibus; et ad puncta $p$, $q$, $r$, $s$ ··· posita intelligantus pondera

**Antwort.** Um aus den Beobachtungen gleicher Genauigkeit solche von ungleicher zu konstruieren, stellen wir folgende Ueberlegung an.

Es seien durch irgend eine Messung für die Grösse $\xi$ die Messungsergebnisse:

$$x_1 \; x_2 \; x_3 \; x_4$$

gegeben, die sämtlich von gleicher Genauigkeit vorausgesetzt werden. Sei ferner:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$$

das arithmetische Mittel und

$$1) \ldots \begin{cases} \Delta x_1 = x - x_1 \\ \Delta x_2 = x - x_2 \\ \Delta x_3 = x - x_3 \\ \Delta x_4 = x - x_4 \end{cases}$$

$P, Q, R, S \cdots$ et inveniatur eorum gravitatis centrum $z$: dico punctum $z$ fore locum objecti, qui pro vero eius loco tutissime haberi potest.“

Oder zu deutsch:

Sei $p$ der Ort irgend eines Objekts, so wie er aus der ersten Beobachtung folgt, $q, r, s$ seine Orte aus den ferneren Beobachtungen; seien weiter $P, Q, R, S$ die Gewichte umgekehrt proportional den Entfernungen, welche für die Beobachtungen zulässig sind und welche gegeben sind durch die möglichen Fehlergrenzen und bilden wir:

$$pP, \quad qQ, \quad rR, \quad sS$$

und suchen ferner den Schwerpunkt dieser Grössen, dann sage ich, dass dieser den gesuchten Punkt am zuverlässigsten darstellt.

Nun wollen wir die drei letzten Ablesungen zu einem Mittel:

$$x' = \frac{x_2 + x_3 + x_4}{3}$$

vereinigen, so dass wir also:

$$2) \ldots \begin{cases} \Delta x_1 = x - x_1 \\ \Delta x' = x - x' \end{cases}$$

haben. Dann ist klar, dass die erstere Gleichung bezw. Messung eine andere Genauigkeit hat als die letztere.

Die Ausgleichung muss aber für das System 2) dasselbe liefern, wie für das System 1). Dieses wird der Fall, wenn:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = \frac{\frac{1}{x_1} \cdot 1 + \frac{x_2 + x_3 + x_4}{3} \cdot 3}{1 + 3}$$

oder:

$$x = \frac{x_1 \cdot 1 + x' \cdot 3}{1 + 3}$$

gesetzt wird. Nennen wir 3 das Gewicht von $x'$ (weil $x'$ drei einzelne Beobachtungen aufwiegt), so wird das Gewicht von $x_1$ bloss 1 sein und wir haben in Worten:

$$x = \frac{x_1 \times \text{Gewicht} + x' \times \text{Gewicht}}{\text{Summe der Gewichte}}$$

Hieraus ergibt sich sofort das Verfahren, welches einzuhalten ist, wenn Beobachtungen verschiedener Genauigkeit vorliegen.

---

**Frage 211.** Welches ist der mittlere Wert für eine durch direkte Beobzchtungen von ungleicher Genauigkeit au ermittelnde Grösse?

**Antwort.** Um den mittleren Wert für die durch direkte Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit zu ermittelnde Grösse zu finden, seien:

$$x_1 \; x_2 \; x_3 \; x_4 \cdots$$

die beobachteten Werte, denen wir die Gewichte:

$$g_1 \; g_2 \; g_3 \; g_4 \cdots$$

beilegen. Sei sodann $x$ der gesuchte Wert, so werden die Differenzen:

$$\Delta x_1 = x - x_1$$
$$\Delta x_2 = x - x_2$$
$$\Delta x_3 = x - x_3$$
$$\cdots\cdots$$

offenbar nicht gleichwertig sein wegen der verschiedenen Gewichte der Beobachtungen. Um sie auf dieselbe Genauigkeit zu bringen, haben wir jede Differenz mit der Quadratwurzel aus dem Gewicht zu multiplizieren.

Wir erhalten also:

$$(x - x_1)\sqrt{g_1}$$
$$(x - x_2)\sqrt{g_2}$$
$$(x - x_3)\sqrt{g_3}$$
$$\cdots\cdots$$

**Erkl. 192.** Wir haben schon früher (vergl. Frage 208) gefunden. dass die Genauigkeit der Quadratwurzel aus der Beobachtungszahl proportional ist. Aus den an der Spitze stehenden Betrachtungen sehen wir, dass die Beobachtungszahlen im gleichen Verhältnis mit den Gewichten stehen. Daher sind wir berechtigt, die Genauigkeit wenigstens hier als proportional der Quadratwurzel aus dem Gewicht anzusehen. Wir betonen ausdrücklich. dass dieser letztere Satz als eine plausible Annahme aufzufassen ist.

Diese Differenzen sind nun gleichwertig in Bezug auf die Genauigkeit.

Wir erhalten den wahrscheinlichsten Wert, indem wir das Minimum der Summe der Fehlerquadrate:

$$g_1(x-x_1)^2 + g_2(x-x_2) + g_3(x-x_3) + \cdots$$

bilden. Differenzieren wir diese Gleichung und setzen das Resultat dieser Operation gleich Null, so folgt:

$$2g_1(x-x_1) + 2g_2(x-x_2) + 2g_3(x-x_3) + \cdots = 0$$

woraus:

$$8) \ldots x = \frac{x_1 g_1 + x_2 g_2 + x_3 g_3 + \cdots}{g_1 + g_2 + g_3 + \cdots}$$

folgt. Ist:

$$g_1 = g_2 = g_3 = \cdots$$

so geht diese Gleichung in das arithmetische Mittel über.

**Erkl. 193.** Die durch die Gleichung 8) bestimmte Grösse pflegt man auch das allgemeine arithmetische Mittel zu nennen.

---

**Frage 212.** Wie wird der mittlere Fehler einer einzelnen Beobachtung und der Fehler des Mittels bestimmt bei Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit?

**Antwort.** Um den mittleren Fehler einer einzelnen Beobachtung $m$ und den Fehler des Mittels $\mu$ bei Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit zu bestimmen, denke man sich die gleichwertigen Beobachtungen:

$$(x-x_1)\sqrt{g_1}$$
$$(x-x_2)\sqrt{g_2}$$
$$(x-x_3)\sqrt{g_3}$$
$$\cdots\cdots$$

durch andere ihnen gleichwertige von gleicher Genauigkeit:

$$\xi-\xi_1$$
$$\xi-\xi_2$$
$$\xi-\xi_3$$
$$\cdots$$

ersetzt, so dass:

$$[g_1(x-x_1)^2] = [(\xi-\xi_1)^2]$$

Sodann ist für die letzteren:

$$m_\xi = \sqrt{\frac{[(\xi-\xi_1)^2]}{n-1}}$$

wobei $n$ die Anzahl der Beobachtungen bezeichnet. Da sie aber von gleicher Genauigkeit mit den ersteren sind, so wird dieser Wert für $m$ der ersteren gelten.

Wir haben also:

$$m = \sqrt{\frac{[(\xi-\xi_1)^2]}{n-1}}$$

oder wegen:

$$[g_1(x-x_1)^2] = [(\xi-\xi_1)^2]$$

auch:

$$m = \sqrt{\frac{[g_1(x-x_1)^2]}{n-1}}$$

**Erkl. 194.** Die Formel 9) lässt im allgemeinen keine direkte Berechnung zu, da wir nur Verhältnisse der Gewichte und nicht die Gewichte selbst kennen; überhaupt möge hier noch einmal betont werden, dass wenn es heisst, die Gewichte der Beobachtungen:

$$x_1 \quad x_2 \quad x_3$$

sind der Reihe nach:

$$g_1 \quad g_2 \quad g_3$$

es abgekürzt heisst, die Gewichte der Beobachtungen:

$$x_1 \quad x_2 \quad x_3$$

verhalten sich zu einander wie:

$$g_1 : g_2 : g_3$$

Wir müssen daher sagen, die Formel 9) drückt den mittleren Fehler einer Beobachtung vom Gewicht 1 aus.

Um hieraus einen mittleren Fehler für eine Beobachtung vom Gewicht $g$ zu erhalten, haben wir die Proportion:

$$m_1 : m_g = \frac{1}{\sqrt{1}} : \frac{1}{\sqrt{g}}$$

woraus:

$$9b) \ldots m_g = \frac{m}{\sqrt{g}}$$

**Erkl. 195.** Es ist nach der Formel 9):

$$m^2(n-1) = [g\Delta x^2]$$

also:

$$[g\Delta x^2] + 2\mu[g\Delta x] + \mu^2[g] = m^2(n-1) + \mu^2[g] = n\cdot m^2$$

weil ja:

$$[g\Delta x] = 0$$

ist. Aus der letzten Formel ergibt sich:

$$m^2\cdot n - m^2 + \mu^2[g] = n\cdot m^2$$

oder:

$$\mu^2[g] - m^2 = 0$$

woraus:

$$\mu^2[g] = m^2$$

folgt.

oder kürzer (vergl. Erkl. 195):

$$9\text{a)} \ldots m = \sqrt{\frac{[g\Delta x^2]}{n-1}}$$

Um endlich den Fehler des Mittels zu erhalten, sei $\xi$ der wahre Wert der beobachteten Grösse und

$$\xi - x = \mu$$

so wird, wenn:

$$x - x_1 = \Delta x_1$$
$$\xi - x_1 = \partial x_1$$

auch:

$$\xi - x = \partial x_1 - \Delta x_1 = \mu$$

also:

$$\partial x_1 = \mu + \Delta x_1$$

und es wird:

$$[g\partial x^2] = n\cdot m^2$$

weil $m$ eben die mittlere Abweichung von $\xi$ ist. Nun ist aber:

$$[g\partial x^2] = [g(\Delta x + \mu)^2] = [g\Delta x^2] + 2\mu[g\cdot\Delta x] + \mu^2[g] = n\cdot m^2$$

Da nun nach der Bedingung des Minimums:

$$[g\Delta x] = 0$$

ist, so folgt wegen der Formel 9):

$$\mu^2[g] = m^2$$

woraus:

$$\mu = \frac{m}{\sqrt{[g]}}$$

oder:

$$10) \ldots \mu = \sqrt{\frac{[g\Delta x^2]}{[g](n-1)}}$$

---

**Frage 213.** Welche **Eigentümlichkeiten** zeigen die Formeln 8) und 10)?

**Antwort.** Betrachtet man die Formeln 8), 9) und 10) genauer, so sieht man, dass sie nicht geändert werden, wenn man die einzelnen Gewichte mit einer und derselben Zahl multipliziert oder dividiert. Diese Bemerkung kann oft von Nutzen sein, weil sie gestattet, die Gewichte in ganze Zahlen umzuwandeln oder umgekehrt sie zu verkleinern, wenn sie als grosse Zahlen vorliegen.

**Erkl. 196.** Wir können daher die Formeln 8) und 10) sofort berechnen, wenn uns nur die Verhältnisse der Gewichte gegeben sind, was gewöhnlich in der Praxis der Fall ist.

---

**Frage 214.** Durch welche Gleichungen lässt sich die **richtige Berechnung** der Formeln 8), 9) und 10) kontrollieren?

**Antwort.** Um die Gleichungen 8), 9) und 10) zu kontrollieren, bedient man sich am zweckmässigsten der Gleichungen:

$$11) \ldots [g_1\Delta x_1^2] = [g_1 x_1^2] - x^2[g]$$
$$12) \ldots [g_1\Delta x_1] = 0$$

Die zweite Gleichung drückt die Bedingung des Minimums aus, die erstere lässt sich auf folgende Art ableiten:

Es ist offenbar:

$$[g_1\Delta x_1^2] = [g_1(x-x_1)^2]$$

also:

$$[g_1\Delta x_1^2] = x^2[g_1] - 2x[g_1 x_1] + [x_1^2 g_1]$$

**Erkl. 197.** Aus:

$$x = \frac{[g_1 x_1]}{[g_1]}$$

folgt:

$$x[g_1] = [g_1 x_1]$$

also durch Multiplikation mit $-2x$:

$$-2x^2[g_1] = -2x[g_1 x_1]$$

Dieses in die nebenstehende Gleichung eingesetzt, liefert:

$$x^2[g_1] - 2x^2[g_1] + [x_1^2 g_1] = -x^2[g_1] + [x_1^2 g_1]$$

Da nun:

$$x = \frac{[g_1 x_1]}{[g_1]}$$

so folgt:

$$2x[g_1 x_1] = 2x^2[g_1]$$

Setzt man dieses in die letzte Gleichung ein, so folgt:

$$[g_1 \Delta x_1^2] = [x_1^2 g_1] - x^2[g_1]$$

Eine derartige Kontrolle ist bei allen geodätischen und anderweitigen Rechnungsoperationen unbedingt notwendig.

## 7. Ausgleichung bedingter Beobachtungen.

**Frage 215.** Was versteht man unter bedingten Beobachtungen?

**Antwort.** Unter bedingten Beobachtungen werden solche verstanden, bei welchen die zu bestimmenden Grössen eine oder mehrere Gleichungen zu erfüllen haben.

Werden z. B. die drei Winkel des Dreiecks gemessen, so wissen wir, dass ihre wahren Werte zusammengenommen 180° betragen müssen.

Diese haben also die Gleichung:

Summe der Winkel = 180°

zu erfüllen.

**Frage 216.** Wie werden bedingte Beobachtungen ausgeglichen?

**Antwort.** Um bedingte Beobachtungen auszugleichen, führt man dieselbe auf vermittelnde zurück. Dieses geschieht auf folgende Art. Der Uebersichtlichkeit wegen sollen zwischen den drei Grössen $x$, $y$, $z$ die zwei Gleichungen:

$$a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z = 0$$
$$b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 z = 0$$

streng erfüllt werden. Die Messungen ergaben für die Unbekannten die Werte:

$$l_1 \; l_2 \cdot l_3$$

Werden diese in die Bedingungsgleichungen eingesetzt, so werden diese nicht mehr befriedigt, sondern es wird:

$$a_0 + a_1 l_1 + a_2 l_2 + a_3 l_3 = w_1$$
$$b_0 + b_1 l_1 + b_2 l_2 + b_3 l_3 = w_2$$

Wir müssen daher an

$$l_1 \; l_2 \; l_3$$

solche Korrektionen:

$$v_1 \; v_2 \; v_3$$

anbringen, dass die Widersprüche verschwinden, so dass also:

$$a_0 + a_1(l_1 + v_1) + a_2(l_2 + v_2) + a_3(l_3 + v_3) = 0$$
$$b_0 + b_1(l_1 + v_1) + b_2(l_2 + v_2) + b_3(l_3 + v_3) = 0$$

**Bemerkung.** Haben die Bedingungsgleichungen die allgemeine Form:

$$f_1(x, y, z) = 0$$
$$f_2(x, y, z) = 0$$

so setze man:

$$x = l_1 + v_1$$
$$y = l_2 + v_2$$
$$z = l_3 + v_3$$

und entwickle nach dem Taylorschen Lehrsatz, so folgt:

$$f_1(l_1 l_2 l_3) + \frac{\partial f_1}{\partial x} v_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y} v_2 + \frac{\partial f_1}{\partial z} v_3 = 0$$

$$f_2(l_1 l_2 l_3) + \frac{\partial f_2}{\partial x} v_2 + \frac{\partial f_2}{\partial y} v_2 + \frac{\partial f_2}{\partial z} v_3 = 0$$

welche Gleichungen mit den Gleichungen 1) im Text übereinstimmen, weil:

$$w_1 = f_1(l_1 l_2 l_3)$$
$$w_2 = f_2(l_1 l_2 l_3)$$

Diese Gleichungen sind aber linear. Deshalb haben wir uns auch im Text nur auf lineare Gleichungen beschränkt, weil alle übrigen auf diese Form zurückgeführt werden können.

**Erkl. 198.** Es ist:

$$a_0 + a_1 l_1 + a_2 l_2 + a_3 l_3 = w_1$$

$$a_0 + a_1 l_1 + a_2 l_2 + a_3 l_3 + a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0$$

Subtrahiert man die erste Gleichung von der zweiten, so folgt:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = -w_1$$

**Erkl. 199.** Die Multiplikatoren $k_1 k_2$ führen auch den Namen der Korrelaten.

**Erkl. 200.** Es ist:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial v_1} = 2 v_1 - 2(a_1 k_1 + b_1 k_2) = 0$$

also:

$$v_1 - (a k_1 + b_1 k) = 0$$

woraus:

$$v_1 = a k_1 + b_1 k_2$$

folgt.

**Erkl. 201.** Es war:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + w_1 = 0$$

Setzt man nun:

$$v_1 = a_1 k_1 + b_1 k_2 \quad \text{u. s. w.}$$

ein, so folgt:

$$a_1(a_1 k_1 + b_1 k_2) + a_2(a_2 k_1 + b_2 k_2) + a_3(a_3 k_1 + b_3 k_2) + w_1 = 0$$

oder:

$$k_1(a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3) + k_2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) + w = 0$$

wofür man kürzer:

$$[aa] k_1 + [ab] k_2 + w_1 = 0$$

schreiben kann.

**Erkl. 202.** Man sieht leicht ein, dass die Korrelaten nichts anderes sind als Lagranges Multiplikatoren des Maximumproblems.

Vergleicht man diese Gleichungen mit jenen der Widersprüche, so folgt durch Subtraktion:

$$1) \ldots \begin{cases} a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + w_1 = 0 \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + w_2 = 0 \end{cases}$$

wobei die Grössen $v_1\, v_2\, v_3$ so bestimmt werden müssen, dass:

$$2) \ldots [vv] = \text{Minimum}.$$

Um dieses mit Rücksicht auf die Gleichungen 1) zu erhalten, multiplizieren wir die Gleichungen 1) mit noch näher zu bestimmenden Koëffizienten:

$$-2k_1 \quad -2k_2$$

also:

$$-2k_1 a_1 v_1 - 2k_1 a_2 v_2 - 2k_1 a_3 v_3 - 2k_1 w_1 = 0$$

$$-2k_2 b_1 v_1 - 2k_2 b_2 v_2 - 2k_2 b_3 v_3 - 2k_2 w_2 = 0$$

und addieren diese zu der Minimumgleichung $[vv]$, wodurch eine Gleichung entsteht, die wir mit $\Omega$ bezeichnen wollen, und es wird:

$$\Omega = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - 2v_1(a_1 k_1 + b_1 k_2) - 2v_2(a_2 k_1 + b_2 k_2) - 2v_3(a_3 k_1 + b_3 k_2)$$

Um das Minimum zu erhalten, müssen wir $\Omega$ nach

$$v_1 \quad v_2 \quad v_3$$

differenzieren. Dieses liefert:

$$3) \ldots \begin{cases} v_1 = a_1 k_1 + b_1 k_2 \\ v_2 = a_2 k_1 + b_2 k_2 \\ v_3 = a_3 k_1 + b_3 k_3 \end{cases}$$

Setzt man diese Gleichungen wieder in die Bedingungsgleichungen und ordnet nach $k$, so folgt:

$$[aa] k_1 + [ab] k_2 + w_1 = 0$$

$$[ab] k_1 + [bb] k_2 + w_2 = 0$$

Diese Gleichungen heissen Normalgleichungen, ihre Zahl ist gleich jener der Bedingungsgleichungen.

Der mittlere Fehler bestimmt sich zu

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{n-(n-r)}} = \sqrt{\frac{[vv]}{r}}$$

wobei $r$ die Anzahl der Bedingungsgleichungen bezeichnet.

Für das Vorzeichen von $w$ ist unter allen Umständen die Gleichung:

$$w = \text{Beobachtung} - \text{Theorie}$$

zu nehmen.

Die Gleichungen 3) führen den Namen der Korrelatengleichungen.

## 8. Von der Auflösung einer Gruppe von linearen Gleichungen zweier Unbekannten nach der Methode der kleinsten Quadrate.

**Frage 217.** Wie bestimmt man den mittleren Wert zweier unbekannten Grössen, wenn dieselben durch die Gleichung:

$$ax + by + l$$

verbunden sind, wobei $a$, $b$, $l$ als gegeben und $x$, $y$ als gesucht betrachtet werden?

**Antwort.** Es seien:

$$l_1 l_2 \cdots l_n$$

die beobachteten Grössen, so dass:

$$\Delta_1 = a_1 x + b_1 y + l_1$$
$$\Delta_2 = a_2 x + b_2 y + l_2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\Delta_n = a_n x + b_n y + l_n$$

so verlangt unser Prinzip, dass die Summe der Quadrate von $\Delta$ also:

$$[\Delta^2] = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 \cdots + \Delta_n$$

ein Minimum werde. Es ist aber mit Fortlassung der Indices:

$$\Delta^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + l^2 + 2abxy + 2alx + 2bly$$

also:

$$[\Delta^2] = [a^2]x^2 + [b^2]y^2 + [l^2] + 2[ab]xy + 2[al]x + 2[bl]y.$$

Soll $[\Delta^2]$ ein Minimum sein, dann muss nach den Grundlehren der Differentialrechnung:

$$\frac{\partial}{\partial x}[\Delta^2] = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial y}[\Delta^2] = 0$$

Nun ist aber:

$$\frac{\partial}{\partial x}[\Delta^2] = 2\left[\Delta_1 \frac{\partial \Delta_1}{\partial x} + \Delta_2 \frac{\partial \Delta_2}{\partial x} + \cdots\right]$$
$$\frac{\partial}{\partial y}[\Delta^2] = 2\left[\Delta_1 \frac{\partial \Delta_1}{\partial y} + \Delta_2 \frac{\partial \Delta_2}{\partial y} + \cdots\right]$$

Aus dem Ausdruck für:

$$\Delta_k = a_k x + b_k y + l_k$$

folgt aber:

$$\frac{\partial \Delta_k}{\partial x} = a_k$$
$$\frac{\partial \Delta_k}{\partial y} = b_k$$

Setzt man dieses in die vorstehenden Gleichungen ein, so wird:

$$\frac{\partial}{\partial x}[\Delta^2] = 2[\Delta_1 a_1 + \Delta_2 a_2 + \cdots] = 2[\Delta a]$$
$$\frac{\partial}{\partial y}[\Delta^2] = 2[\Delta_1 b_1 + \Delta_2 b_2 + \cdots] = 2[\Delta b]$$

so dass wir also die Gleichungen:

$$[\Delta a] = 0, \quad [\Delta b] = 0$$

erhalten. Diese lassen sich noch anders schreiben, es ist (vergl. Erkl. 189):

$$[\Delta a] = [a^2]x + [ab]y + [al]$$

**Erkl. 203.** Man nennt die Grössen $l$ insofern vermittelnde Beobachtungen, als man sie gewissermassen nicht um ihrer selbst willen beobachtet hat, sondern als Vermittlung, um zu den Unbekannten $x$, $y$ zu gelangen.

**Erkl. 204.** Es wird in der Differentialrechnung (vergl. Kleyers Lehrbuch der Differentialrechnung) gezeigt, dass:

$$\frac{\partial}{\partial x} x^2 = 2x$$
$$\frac{\partial}{\partial x} xy = y$$
$$\frac{\partial}{\partial x} y^2 = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial x} x = 1$$
$$\frac{\partial}{\partial x} y = 0$$

Analoges gilt, wenn $x$ mit $y$ vertauscht wird.

**Erkl. 205.**

$$[\Delta a] = [a(ax + by + l)] = [a^2x + aby + ab]$$
$$= [a^2]x + [ab]y + [al].$$

**Erkl. 206.** Diese Gleichungen werden Normalgleichungen genannt, weil sie zur Bestimmung der Unbekannten massgebend (normierend) sind.

**Erkl. 207.** Die Normalgleichungen wurden zuerst ohne jede Begründung von Legendre (Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des Comètes, Paris 1806) gegeben.

**Erkl. 208.** Wie man sieht, wird man bei der Aufstellung der Normalgleichungen auf lineare Gleichungen mit mehreren Unbekannten geführt. Da liegt nun der Gedanke nahe, bei ihrer Behandlung die so elegante Determinantenform in Anwendung zu bringen, wir sehen jedoch von der Anwendung der Determinanten aus praktischen Rücksichten ab.

analog wird:

$$[\Delta b] = [ab]x + [b^2]y + [bl]$$

so dass wir zur Bestimmung von $x$ und $y$ folgende Normalgleichungen erhalten:

$$[a^2]x + [ab]y + [al] = 0$$
$$[ab]x + [b^2]y + [bl] = 0$$

aus welchen:

$$x = -\frac{[b^2][al] - [ab][bl]}{[a^2][b^2] - [ab]^2}$$
$$y = -\frac{[a^2][bl] - [ab][al]}{[a^2][b^2] - [ab]^2}$$

wobei man nach dem obigen die Normalgleichungen auch in der abgekürzten Form:

$$[\Delta a] = 0$$
$$[\Delta b] = 0$$

schreiben kann.

---

**Frage 218.** Sind die Normalgleichungen in allen Fällen zur Berechnung der unbekannten Grösse geeignet?

**Erkl. 209.** Die Möglichkeit oder Unmöglichkeit der Auflösung der Fehlergleichungen hat Gauss in der „Theoria Combinationis", art. 23 betrachtet.

In der Sprache der Determinanten würde man unseren Fall so definieren: Sei

$$\Delta = \begin{vmatrix} [a^2] & [ba] & 1 \\ [ab] & [b^2] & 1 \\ [al] & [bl] & 1 \end{vmatrix}$$

so ist die Auflösung der Normalgleichung möglich, sobald:

$$\Delta \gtrless 0$$

ist. Ist dieses nicht der Fall, so kann sie mögmöglich sein, sobald nicht alle Unterdeterminanten 0 sind.

**Erkl. 210.** Sind die obigen Relationen nicht streng, sondern nur genähert erfüllt, ist also:

$$\frac{[a^2]}{[ab]} \text{ nahezu } = \frac{[ab]}{[b^2]} \text{ nahezu } = \frac{[al]}{[bl]}$$

dann wird man im allgemeinen $x$ und $y$ bestimmen können. Dann sind aber ihre Gewichte, die wir später ermitteln werden, sehr klein, d. h. die Grössen selbst unsicher. Dann ist die Ausgleichung illusorisch.

**Erkl. 211.** Will man z. B. den Exzentrizitätfehler irgend eines Sextanten berechnen, wobei man angenommen hat, dass das Instrument möglichst genau justiert ist und es liefern die Normalgleichungen Werte mit sehr geringen Gewichten, so muss man annehmen, dass neben der Exzentrizität noch andere Fehlerquellen vorhanden sind.

**Antwort.** Die Normalgleichungen liefern in der Regel die unbekannten gesuchten Werte. Doch gibt es hier eine wichtige Ausnahme.

Besteht die Gleichung:

$$\frac{[a^2]}{[ab]} = \frac{[ab]}{[b^2]} = \frac{[al]}{[bl]}$$

so sind die Normalgleichungen von einander nicht unabhängig, die Werte für $x$ und $y$ erscheinen in der Form:

$$x = \frac{0}{0}, \quad y = \frac{0}{0}$$

denn aus den obigen Gleichungen folgt:

$$[a^2][b^2] - [ab]^2 = 0$$
$$[a^2][bl] - [ab][al] = 0$$
$$[b^2][ab] - [ab][bl] = 0$$

Es mag bemerkt werden, dass da unter theoretischen Voraussetzungen diese Auflösung immer möglich, die praktische Unmöglichkeit der Auflösung immer ein sicheres Kennzeichen ist, dass entweder die Beobachtungen nicht von gleicher Genauigkeit sind, oder dass die Normalgleichungen auf Grund falscher Ueberlegungen aufgestellt wurden.

Alsdann hat man zunächst die Richtigkeit der Normalgleichungen zu prüfen. Zu diesem Zwecke setze man:

$$a_k + b_k + l_k = s_k$$

woraus durch Multiplizieren mit $a_k$ resp. $b_k$ und Summation:

$$[a^2] + [ab] + [al] = [as]$$
$$[ab] + [b^2] + [bl] = [bs]$$

**Sind diese Gleichungen erfüllt, dann sind die Normalgleichungen richtig.**

**Liefert ihre Auflösung dennoch unbestimmte Werte, dann sind die Unbekannten entweder von einander nicht unabhängig oder es rühren die Fehler von anderen Ursachen her als wir vorausgesetzt haben.**

---

**Frage 219.** Wie hat man zu verfahren, um die Normalgleichungen möglichst ökonomisch aufzulösen?

**Antwort.** Um die Normalgleichungen möglichst ökonomisch aufzulösen, bedient man sich nach Bessel am bequemsten der Tafel der Quadratzahlen. Es ist nämlich identisch:

$$ab = \frac{1}{2}[(a+b)^2 - a^2 - b^2]$$

also:

$$[ab] = \frac{1}{2}\{[(a+b)^2] - [a^2] - [b^2]\}$$

Mit Hilfe dieser Relation ist man im Stande die Produkte sofort hinzuschreiben, wenn man Tafeln der Quadratzahlen besitzt.

Sodann ist es angezeigt, sich eines Rechenschemas zu bedienen.

Ein solches teilen wir mit:

**Erkl. 212.** Es ist, wie bekannt:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

also:

$$2ab = (a+b)^2 - a^2 - b^2$$

woraus:

$$ab = \frac{1}{2}[(a+b)^2 - a^2 - b^2]$$

folgt.

| $a^2$ | $b^2$ | $l^2$ | $(a+b)^2$ | $(a+l)^2$ | $(b+l)^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a_1^2$ | $b_1^2$ | $l_1^2$ | $(a_1+b_1)^2$ | $(a_1+l_1)^2$ | $(b_1+l_1)^2$ |
| $a_2^2$ | $b_2^2$ | $l_2^2$ | $(a_2+b_2)^2$ | $(a_2+l_2)^2$ | $(b_2+l_2)^2$ |
| . | . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . | . |
| $[a^2]$ | $[b^2]$ | $[l^2]$ | $[(a+b)^2]$ | $[(a+l)^2]$ | $[(b+l)^2]$ |
| | | | $[a^2]+[b^2]$ | $[a^2]+[l^2]$ | $[b^2]+[l^2]$ |
| | | | $2[ab]$ | $2[al]$ | $2[bl]$ |
| | | | $[ab]$ | $[al]$ | $[bl]$ |

**Durch dieses Schema sind die Koëffizienten der Normalgleichungen bestimmt.**

**Zur Prüfung der Richtigkeit dient noch folgendes Schema:**

**Erkl. 213.** Dieses Schema ist deswegen von grosser Bedeutung für die Praxis, weil durch dasselbe eine Fehlerquelle vermieden wird, die selbst dem geübtesten Rechner gefährlich ist, nämlich ein Zeichenfehler. Solche schematische Vorlagen haben einen enormen ökonomischen Wert, indem sie eine Gedankenarbeit in eine mechanische verwandeln, also eine Gehirnentlastung bewirken, die nie hoch genug angeschlagen werden kann.

| $s^2$ | $(a+s)^2$ | $(b = s)^2$ | Kontrolle. | |
|---|---|---|---|---|
| $s_1^2$ | $(a_1+s_1)^2$ | $(b_1+s_1)^2$ | $[a^2]$ | $[b^2]$ |
| $s_2^2$ | $(a_2+s_2)^2$ | $(b_1+s_2)^2$ | $[ab]$ | $[ab]$ |
| . | . | . | $[al]$ | $[bl]$ |
| . | . | . | | |
| . | . | . | | |
| $[s^2]$ | $[(a+s)^2]$ | $[(b+s)^2]$ | Summe $[as]$ | Summe $[bs]$ |
| | $[a^2]+[s^2]$ | $[b^2]+[s^2]$ | Differenz | Differenz gleich 0 |
| | $2[as]$ | $2[bs]$ | | |

Diese letzte Differenz wird sehr selten ganz genau gleich 0 sein, doch muss sie stets innerhalb der Genauigkeitsgrenzen der numerischen Rechnung liegen.

Um endlich auch die Auflösung der Normalgleichungen ganz schematisch bewirken zu können, seien:

$$[aa]x + [ab]y + [al] = 0$$
$$[ab]x + [bb]y + [bl] = 0$$

die Normalgleichungen. Multiplizieren wir die erste Normalgleichung mit:

$$-\frac{[ab]}{[aa]}$$

und addieren zu der zweiten, so fällt $x$ heraus und wir erhalten:

$$\left\{[bb] - \frac{[ab]}{[aa]}[ab]\right\} y + \left\{[bl] - \frac{[ab]}{[aa]}[al]\right\} = 0$$

Dieses gibt Veranlassung, abgekürzte Bezeichnungen einzuführen, nämlich:

$$[bb] - \frac{[ab]}{[aa]}[ab] = bb_1 1]$$
$$[bl] - \frac{[ab]}{[aa]}[al] = [bl_1 1]$$

Damit wird die vorhergehende Gleichung zu:

$$[bb_1 1]y + [bl_1 1] = 0$$

oder:

$$y = -\frac{[bl_1 1]}{[bb_1 1]}$$

Hätten wir die Elimination umgekehrt gemacht, so hätten wir erhalten:

$$[aa] - \frac{[ab]}{[bb]}[ab] = [aa_1 1]$$
$$[al] - \frac{[ab]}{[bb]}[bl] = [al_1 1]$$

und

$$[aa_1 1]x + [al_1] = 0$$

woraus:

$$x = -\frac{[al_1 1]}{[aa_1 1]}$$

folgen würde.

**Erkl. 214.** Man kann sich nach Jordan (Handbuch der Vermessungskunde I, p. 40) diese symbolische Bezeichnungsweise dadurch merken, dass jeder solche Wert = Null wird, sobald man ihn algebraisch auffasst. So z. B.:

$$[bb_1 1] = [bb] - \frac{[ab]}{[aa]}[ab] = bb - \frac{ab}{aa}ab$$
$$= bb - \frac{b}{a}ab = bb - bb = 0$$

**Man kann aber auch $x$ erhalten, wenn man direkt den gewonnenen Wert für $y$ in die Normalgleichung einsetzt, wodurch:**

$$x = \frac{[ab]}{[aa]}y + \frac{[al]}{[aa]} = 0$$

**wird. Man hat demzufolge folgendes Schema:**

| I | II | III | IV |
|---|---|---|---|
| $[a^2]$ | $[ab]$ | $[al]$ | $[as]$ |
| Subtrahieren | $[bb]$<br>$\frac{[ab]}{[aa]}[ab]$ | $[bl]$<br>$\frac{[ab]}{[aa]}[al]$ | $[bs]$<br>$\frac{[ab]}{[aa]}[as]$ |
| | $[bb_1 1]$ | $[bl_1 1]$ | $[bs_1 1]$ |
| $\log\frac{[ab]}{[aa]}$ | Subdrahieren | $\log[bl_1 1]$<br>$\log[bb_1 1]$ | |
| $\log[ab]$<br>$\log[aa]$<br>$\log[al]$ | $y$<br>Addieren | $\log(-y)$<br>$\log\frac{[ab]}{[aa]}$ | |
| $\log\frac{[al]}{[aa]}$ | | $\log\left(-\frac{[ab]}{[aa]}y\right)$ | |
| | | $-\frac{[ab]}{[aa]}y$<br>$-\frac{[al]}{[aa]}$ | |
| | | $x$ | |

Zur Kontrolle:

$$[bs_1 1] = [bb_1 1] + [bl_1 1]$$

**Frage 220.** Wie berechnet man die Quadratsumme der übrigbleibenden Fehler?

**Erkl. 215.** Da wir der Quadratsumme der übrigbleibenden Fehler bei den folgenden Untersuchungen benötigen, so müssen wir nachsehen, wie man sie am einfachsten berechnen könnte.

**Erkl. 216.** Es ist ganz allgemein:

$$(m + n + p)^2 = m^2 + n^2 + p^2 + 2mn + 2mp + 2np$$

Setzt man:

$$m = [aa]x$$
$$n = [ab]y$$
$$p = [al]$$

so erhält man den nebenstehenden Ausdruck.

**Antwort.** Wir hatten schon früher (vergl. Frage 217) für die Quadratsumme der übrigbleibenden Fehler den Ausdruck:

$$[\lambda^2] = [aa]x^2 + [bb]y^2 + [ll] + 2[ab]xy + 2[al]x + 2[bl]y$$

gefunden. Um diese Grösse so einfach als möglich zu berechnen, wollen wir dieselbe anders gestalten.

Quadrieren wir den Ausdruck:

$$\{[aa]x + [ab]y + [al]\}$$

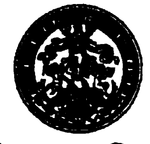
so folgt:

$$[aa]^2x^2 + [ab]^2y^2 + [al]^2 + [aa][ab]yx + [aa][al]x + 2[ab][al]y$$

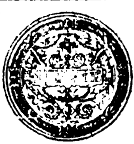
Dividiert man diese Gleichung durch $[aa]$ und subtrahiert sie dann von $[\lambda^2]$, so folgt:

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

1303. Heft. | Preis des Heftes 25 Pf. | Vermessungskunde (Geodäsie). Erster Teil. Forts. v. Heft 1302. — Seite 225—240. Mit 1 Figur.



Vollständig gelöste



# Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
**Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten**
erläutert durch
**viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,**
aus allen Zweigen
der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus **allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie**; des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken-** u. **Hochbau's**; der **Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar-** u. **Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
**zum einzig richtigen und erfolgreichen**
**Studium**, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

**Dr. Adolph Kleyer,**
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

# Vermessungskunde
## (Geodäsie).
### Erster Teil.

Nach **System Kleyer** bearbeitet von **Dr. W. Láska.**

Fortsetzung von Heft 1302. — Seite 225—240. Mit 1 Figur.

**Inhalt:**



**Stuttgart 1894.**
Verlag von Julius Maier.

**Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.**

# PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar **in vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch **alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist **ein Anhang** von **ungelösten** Aufgaben **beigegeben**, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich **aber auch die überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften **vorgeführt.**

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze für** den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles der mathematischen** Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die **gehabten Regeln,** Formeln, Sätze etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten** Kapitale **lebendige Kraft verleihen** und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und **praktische** Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit **Angabe der Namen** verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der **Verfasser, Dr. Kleyer,** Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird **deren Erledigung** thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

$$[\Delta^2] - \frac{\{[aa]x + [ab]y + [al]\}^2}{[aa]} = [bb]y^2 + [bl]y + [ll] - \frac{[ab]^2}{[aa]}y^2 - 2\frac{[ab]}{[aa]}[al]y - \frac{[ab]^2}{[aa]}$$

woraus:

$$[\Delta^2] - \frac{\{[aa]x + [ab]y + [al]\}^2}{[aa]} = [bb_1 1]y^2 + 2[bl_1 1]y + [ll_1 1]$$

folgt. Nun ist aber:

$$\{[bb_1 1]y + [bl_1 1]\}^2 = [bb_1 1]^2 y^2 + 2[bb_1 1][bl_1 1]y + [bl_1 1]^2$$

also:

$$\frac{\{[bb_1 1]y + [bl_1 1]\}^2}{[bb_1 1]} = [bb_1 1]y^2 + 2[bl_1 1]y + \frac{[bl_1 1]^2}{[bb_1 1]}$$

folgt. Subtrahiert man diese Gleichung von der vorletzten, so folgt:

$$[\Delta^2] - \frac{\{[aa]x + [ab]y + [al]\}^2}{[aa]} - \frac{\{[bb_1 1]y + [bl_1 1]\}}{[bb_1 1]} = [ll_1 1] - \frac{[bl_1 1]^2}{[bb_1 1]}$$

Da nun:

$$[aa]x + [ab]y + [al] = 0$$
$$[bb_1 1]y + [bl_1 1] = 0$$

so folgt:

$$[\Delta^2] = [ll_1 1] - \frac{[bl_1 1]}{[bb_1 1]}[bl_1 1]$$

wobei:

$$[ll_1 1] = [ll] - \frac{[al]}{[aa]}[al]$$

gesetzt wurde.

**Erkl. 217.** Wir setzen:

$$[ll_1 1] = [ll] - \frac{[ab]}{[aa]}[al]$$

**Erkl. 218.** Man kann also zu dem letzten Schema noch die Spalte

| | IV. |
|---|---|
| | |
| | $[ll]$ |
| subtrahieren: | $\frac{[al]}{[aa]}[al]$ |
| | $[ll_1 1]$ |
| subtrahieren: | $\frac{[bl_1 1]}{[bb_1 1]}[bl_1 1]$ |
| | $[\Delta^2]$ |

hinzufügen, wodurch man sofort die Summe der Fehlerquadrate erhält.

**Frage 221.** Wie bestimmt man den **mittleren Fehler** von $x$ und $y$, vorausgesetzt, dass der mittlere Gewichtseinheitsfehler der Gleichung:

$$ax + by$$

gleich $m$ ist?

**Antwort.** Da uns die Grössen $x$, $y$ als lineare Funktionen der Grössen $l$ erscheinen, so kann man, wie sofort gezeigt werden soll:

$$x = \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \cdots \alpha_n l_n$$
$$y = \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 + \cdots \beta_n l_n$$

setzen. Ist sodann $m$ der mittlere Fehler der einzelnen $l$, so sind nach Frage 212 die mittleren Fehler der Grössen $x$ und $y$ selbst zu bestimmen. Es wird:

$$m_x^2 = [\alpha\alpha]m^2$$
$$m_y^2 = (\beta\beta]m^2$$

Daher die Gewichte zu $x$ und $y$, wenn zu $m$ das Gewicht $= 1$ gehört:

**Erkl. 219.**

$$[bl_1 1] = [bl] - \frac{[ab]}{[aa]}[ab]$$
$$= b_1 l_1 + b_2 l_2 + \cdots$$
$$- \frac{[ab]}{[aa]}(a_1 l_1 + a_2 l_2 + \cdots)$$
$$= \left(b_1 - \frac{[ab]}{[aa]} a_1\right) l_1$$
$$+ \left(b_2 - \frac{[ab]}{[aa]} a_2\right) l_2 + \cdots$$

**Erkl. 220.** Es ist:

$$\beta_1{}^2 = \frac{1}{[bb_1 1]^2}\left(b_1{}^2 - 2a_1 b_1 \frac{[ab]}{[aa]} + \frac{[ab]^2}{[aa]^2} a_1{}^2\right)$$
$$\beta_2{}^2 = \frac{1}{[bb_1 1]^2}\left(b_2{}^2 - 2a_2 b_2 \frac{[ab]}{[aa]} + \frac{[ab]^2}{[aa]^2} a_2{}^2\right)$$
$$\beta_3{}^2 = \frac{1}{[bb_1 1]^2}\left(b_3{}^2 - 2a_3 b_3 \frac{[ab]}{[aa]} + \frac{[ab]^2}{(aa)^2} a_3{}^2\right)$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

wenn wir also addieren:

$$\beta_1{}^2 + \beta_2{}^2 + \beta_3{}^2 + \cdots = [\beta^2]$$
$$= \frac{1}{[bb_1 1]}\Big\{b_1{}^2 + b_2{}^2 + b_3{}^2 + \cdots$$
$$- 2\frac{[ab]}{[aa]}(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \cdots)$$
$$+ \frac{[ab]^2}{[aa]^2}(a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2 + \cdots)\Big\}$$
$$= \frac{1}{[bb_1 1]}\left([b^2] - 2\frac{[ab]}{[aa]}[ab] + \frac{[ab]^2}{[aa]^2}[aa]\right)$$

Nun ist:

$$-2\frac{[ab]}{[aa]}[ab] = -2\frac{[ab]}{[aa]}[ab]$$
$$\frac{[ab]^2}{[aa]^2}[aa] = \frac{[ab]}{[aa]}[ab]$$

also:

$$-2\frac{[ab]}{[aa]}[ab + \frac{[ab]^2}{[aa]^2}[aa] = -\frac{[ab]}{[aa]}[ab]$$

**Erkl. 221.** Man beachte, dass:

$$[aa_1 1] = [aa] - \frac{[ab]}{[bb]}[ab]$$
$$[bb_2 1] = [bb] - \frac{[ab]}{[aa]}[ab]$$

Setzt man:

$$[aa][bb] - [ab]^2 = D$$

so wird:

$$[aa_1 1] = \frac{[aa][bb] - [ab]^2}{[bb]} = \frac{D}{[bb]}$$
$$[bb_1 1] = \frac{[aa][bb] - [ab]^2}{[aa]} = \frac{D}{[aa]}$$

und man kann:

$$m_x = \sqrt{\frac{[bb]}{D}}\, m$$
$$m_y = \sqrt{\frac{[aa]}{D}}\, m \quad \text{setzen.}$$

$$g_x = \frac{1}{[\alpha\alpha]}$$
$$g_y = \frac{1}{[\beta\beta]}$$

Wie wir sehen, kommt es hier einzig und allein auf die Bestimmung von $\alpha$ und $\beta$ an.

Diese soll nun vorgenommen werden.

Wir hatten:

$$y = -\frac{[bl_1 1]}{[bb_1 1]}$$

Da der Nenner keine $l$ enthält, so ist nur der Zähler näher zu entwickeln.

Es ist (vergl. Erkl. 219):

$$y = -\frac{1}{[bb_1 1]}\left(b_1 - \frac{[ab]}{[aa]} a_1\right) l_1$$
$$- \frac{1}{[bb_1 1]}\left(b_2 - \frac{[ab]}{[aa]} a_2\right) l_2 - \cdots$$

so dass nach unserer früheren Bezeichnung:

$$\beta_1 = -\frac{1}{[bb_1 1]}\left(b_1 - \frac{[ab]}{[aa]} a_1\right)$$

zu setzen ist.

Da wir aber $[\beta\beta] = [\beta^2]$ benötigen, so müssen wir die vorliegende Gleichung quadrieren; dieses gibt:

$$\beta_1{}^2 = \frac{1}{[bb_1 1]^2}\left(b_1 - \frac{[ab]}{[aa]} a_1\right)^2$$
$$= \frac{1}{[bb_1 1]^2}\left(b_1{}^2 - 2a_1 b_1 \frac{[ab]}{[aa]} + \frac{[ab]^2}{[a_1 a]^2} a_1{}^2\right)$$

Bilden wir analog $\beta_2, \beta_3 \cdots$, so folgt:

$$[\beta^2] = \frac{1}{[bb_1 1]^2}\left([b^2] - 2[ab]\frac{[ab]}{[aa]} + \frac{[ab]^2}{[aa]^2}[a^2]\right)$$
$$= \frac{1}{[bb_1 1]^2}\left([b^2] - 2\frac{[ab]^2}{[aa]} + \frac{[ab]^2}{[aa]}\right)$$
$$= \frac{1}{[bb_1 1]^2}\left([b^2] - \frac{[ab]}{[aa]}[ab]\right)$$
$$= \frac{1}{[bb_1 1]^2}[bb_1 1] = \frac{1}{[bb_1 1]}$$

Wir erhalten also:

$$[\beta\beta] = \frac{1}{[bb_1 1]}$$
$$g_y = [bb_1 1]$$

Um $[\alpha\alpha]$ zu bestimmen, braucht man nur überall $b$ mit $a$ zu vertauschen und man erhält:

$$[\alpha\alpha] = \frac{1}{[aa_1 1]}$$
$$g_x = [aa_1 1]$$

Damit ergibt sich:

$$m_x = \frac{m}{\sqrt{[aa_1 1]}}$$
$$m_y = \frac{m}{\sqrt{[bb_1 1]}}$$

**Frage 222.** Wie berechnet man den mittleren Gewichtseinheitsfehler $m$ selbst?

**Antwort.** Um den mittleren Gewichtseinheitsfehler selbst zu berechnen, stellen wir folgende Ueberlegung an. Seien $x$, $y$ die plausibelsten Werte und $X$, $Y$ die wahren Werte der unbekannten Grössen, also:

$$d = ax + by + l$$
$$\partial = aX + bY + l$$

so folgt durch Subtraktion:

$$\partial = a(X-x) + b(Y-y) + d$$

Bilden wir nun:

$$[\partial\partial] = [aa](X-x)^2 + [bb](Y-y)^2 + [dd] + 2[ab](X-x)(Y-y) + 2[ad](X-x) + 2[bd](Y-y)$$

Nun ist aber:

$$[ad] = 0 \quad [bd] = 0$$

so dass also:

$$[\partial\partial] = [aa](X-x)^2 + [bb](Y-y)^2 + [dd] + 2[ab](X-x)(Y-y)$$

$(X-x)^2$ ist die Abweichung des wahren Wertes von dem plausibelsten, also eine unbekannte Grösse, die wir durch den früher gefundenen Wert $m_x^2$ ersetzen können, so dass also:

$$(X-x)^2 = m_x^2 = \frac{[bb]}{D} m^2$$
$$(Y-y)^2 = m_y^2 = \frac{[aa]}{D} m^2$$

zu setzen sein wird.

Um $(X-x)(Y-y)$ zu berechnen, haben wir zu bedenken, dass $l_1, l_2 \cdots$ mit den Fehlern $\partial l_1, \partial l_2 \cdots$ behaftet sind, auch der Fehler von $x$, d. h. $X-x$ gleich sein wird:

$$X - x = \alpha_1 \partial l_1 + \alpha_2 \partial l_2 + \alpha_3 \partial l_3 + \cdots$$

Analog wird:

$$Y - y = \beta_1 \partial l_1 + \beta_2 \partial l_2 + \beta_3 \partial l_3 + \cdots$$

demnach:

$$(X-x)(Y-y) = \alpha_1\beta_1 \partial l_1^2 + \alpha_2\beta_2 \partial l_2^2 + \cdots + \alpha_1\beta_2 \partial l_1 \partial l_2 + \alpha_2\beta_1 \partial l_1 \partial l_2 + \cdots$$

Die Werte der zweiten Zeile verschwinden, da sie sowohl positiv als negativ werden können; also bleibt:

$$(X-x)(Y-y) = [\alpha\beta] m^2$$

wenn man die $\partial l^2$ alle gleich und gleich $m$ setzt. Wir benötigen also nur noch der Grösse:

$$[\alpha\beta]$$

Um diese zu erhalten beachten wir, dass:

$$\alpha = -\frac{[bb]}{D}\left(a_1 - \frac{[ab]}{[bb]} b_1\right)$$
$$\beta = -\frac{[aa]}{D}\left(b_1 - \frac{[ab]}{[aa]} a_1\right)$$

**Erkl. 222.** Es ist:

$$\partial^2 = a^2(X-x)^2 + b^2(Y-y)^2 + d^2 + 2ab(X-x)(Y-y) + 2ad(X-x) + 2bd(Y-y)$$

nach dem Schema:

$$(m+n+p)^2 = m^2 + n^2 + p^2 + 2mn + 2mp + 2np$$

**Erkl. 223.** Es ist:

$$[ad] = [a(ax+by+l)] = [aax + aby + al] = [aa]x + [ab]y + [al] = 0$$

Analog wird gezeigt, dass:

$$[bd] = 0$$

ist.

**Erkl. 224.** Vergleiche auch die vorhergehende Frage, in welcher $m$ als der mittlere Fehler der einzelnen $l$ definiert wurde, denn diese Grösse allein wird durch Messung bestimmt.

**Erkl. 225.** Sind die Beobachtungen:

$$l_1 l_2 \cdots l_n$$

mit den Gewichten:

$$p_1 p_2 \cdots p_n$$

behaftet und sind wie früher die Fehlergleichungen:

$$v_1 = a_1 x + b_1 y + l_1 \text{ Gewicht } p_1$$
$$v_2 = a_2 x + b_2 y + l_2 \text{ Gewicht } p_2$$

. . . . . . . . . . . . . . . .

so ist nicht mehr:

$$[vv]$$

zu einem Minimum zu machen, sondern:

$$[pvv]$$

Dieses liefert die Normalgleichungen:

$$[paa]x + [pab]y + [pal] = 0$$
$$[pab]x + [pbb]y + [pbl] = 0$$

Der mittlere Gewichtseinheitsfehler wird:

$$m = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-2}}$$

Dieser gehört im allgemeinen zu keiner wirklichen Beobachtung, sondern zu einer fingierten, welche das Gewicht $p = 1$ hat.

Es gilt hier als Regel, dass man sich nach der Aufstellung der Normalgleichungen um die Gewichte nicht weiter zu kümmern hat.

also:

$$[\alpha\beta] = \frac{1}{D^2}\{[aa][bb][ab] - [aa][ab][bb] - [ab][bb][aa] + [ab][ab][ab]\}$$

Die zwei ersten Glieder heben sich auf und es bleibt:

$$[\alpha\beta] = -\frac{1}{D^2}[ab]\{[bb][aa] - [ab]^2\}$$
$$= -\frac{1}{D^2}[ab]\cdot D = -\frac{[ab]}{D}$$

Setzen wir:

$$[ab] - \frac{[aa]}{[ab]}[bb] = [ab,1]$$

so erhalten wir:

$$[\alpha\beta] = \frac{1}{[ab,1]}$$

oder:

$$[\alpha\beta] = -\frac{[ab]}{D}$$

So dass also:

$$(X-x)(Y-y) = -\frac{[ab]}{D}m^2$$

Damit wird:

$$[\partial\partial] = [dd] + \frac{m^2}{D}\{[aa][ab] + [bb][aa] - 2[ab][ab]\}$$
$$= [dd] + \frac{m^2}{D}\cdot 2\{[aa][bb] - [ab]^2\}$$
$$= [dd] + \frac{m^2}{D}\cdot 2D = [dd] + 2m^2$$

Wir erhalten also:

$$[\partial\partial] = [dd] + 2m^2$$

Nun ist:

$$m^2 = \frac{[\partial\partial]}{n} = \frac{[dd] + 2m^2}{n} = \frac{[dd]}{n} + 2\frac{m^2}{n}$$

woraus:

$$m^2(n-2) = [dd]$$

oder:

$$m = \sqrt{\frac{[dd]}{n-2}}$$

folgt.

---

**Frage 223.** Wie verfährt man, wenn die gegebenen Gleichungen **nicht linear** sind?

**Antwort.** Sind die gegebenen Gleichungen nicht linear, sondern von der Form:

$$f(x,y) = 0$$

wobei $f$ eine beliebige Funktion der zwei Grössen $x$ und $y$ bezeichnet, so hat man wie folgt zu verfahren.

Aus zwei gegebenen Werten dieser Funktion etwa:

$$f_1(xy) - l_1 = 0$$
$$f_2(xy) - l_2 = 0$$

**Erkl. 226.** Der Taylorsche Lehrsatz lautet: Seien $x_0 y_0$ Näherungswerte der Grössen $xy$, so gilt innerhalb des Konvergenzbereiches der Grössen $\xi$ und $\eta$ die Entwicklung:

$$f(x_1 y) = f(x_0 y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}\xi + \frac{\partial f}{\partial y}\eta$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\xi^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\xi\eta + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\eta^2 + \cdots$$

wobei:

$$x = x_0 + \xi$$
$$y = y_0 + \eta$$

Wegen des Beweises vergleiche Kleyers Lehrbuch der Differentialrechnung.

**Erkl. 227.** Das Zeichen $\Big/_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}}$ wird das Substitutionszeichen genannt und bedeutet, dass nach erfolgter Differentiation $x = x_0$, $y = y_0$ gesetzt werden soll.

Das Zeichen $\equiv$ bedeutet: die Bezeichnung $\frac{\partial f}{\partial x}$ ist identisch mit jener:

$$\frac{\partial f(xy)}{\partial x}\Big/_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}}$$

berechne man die Grössen $x$ und $y$, wodurch man für dieselben zwei Werte:

$$x_0, \; y_0$$

erhält. Setzt man sodann:

$$x = x_0 + \xi$$
$$y = y_0 + \eta$$

und entwickelt nach dem Taylorschen Lehrsatz, so folgt:

$$f(xy) = f(x_0 y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}\xi + \frac{\partial f}{\partial y}\eta + \cdots$$

wobei man im allgemeinen die höheren Potenzen der Entwicklung vernachlässigen kann. Dann treten $\xi$ und $\eta$ als neue Variable auf, während:

$$f(x_0 y_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv \frac{\partial f(xy)}{\partial x}\Big/_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \equiv \frac{\partial f(xy)}{\partial y}\Big/_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}}$$

konstante Grössen bezeichnen.

An die Stelle der gegebenen Gleichungen treten nun folgende:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\xi + \frac{\partial f}{\partial y}\eta - l_1 - f_1(x_0 y_0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\xi + \frac{\partial f}{\partial y}\eta - l_2 - f_2(x_0 y_0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\xi + \frac{\partial f}{\partial y}\eta - l_3 - f_3(x_0 y_0) = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

die nun linear sind und wie oben behandelt werden können.

---

## 9. Ueber die Ausgleichung der Längenmessungen.

**Frage 224.** Wie werden Längenmessungen ausgeglichen?

**Antwort.** Um Längenmessungen auszugleichen, verteilt man einfach den Gesamtfehler im Verhältnis der gemessenen Einzellängen. Die zwei Hauptprobleme dürften sein:

I. Eine Strecke von der bekannten Länge $L$ wurde in zwei Absätzen gemessen und man erhielt $l_1$ und $l_2$ als Längen. Seien nun $\lambda_1$ und $\lambda_2$ die ausgeglichenen Längen, so hat man:

$$1) \ldots \lambda_1 + \lambda_2 = L$$

Es wurde aber gefunden:

$$2) \ldots l_1 + l_2 = L + f$$

Durch Subtraktion ergibt sich:

$$3) \ldots (\lambda_1 - l_1) + (\lambda_2 - l_2) = -f$$

es soll aber:

$$4) \ldots \frac{\lambda_1 - l_1}{\lambda_2 - l_2} = \frac{l_1}{l_2}$$

**Bemerkung.** Bei der nebenstehenden Ausgleichung nehmen wir an, dass die Abweichungen

$$\lambda_1 - l_1 \text{ und } \lambda_2 - l_2$$

proportional den Längen:

$$l_1 \qquad l_2$$

sind, woraus die Gleichung 4) folgt. Vergleiche Frage 201.

daher wird:

$$\lambda_1 - l_1 = \frac{l_1}{l_2}(\lambda_2 - l_2)$$

Setzt man diese Gleichung in Gl. 3) ein, so folgt:

$$(\lambda - l_2)\left(1 + \frac{l_1}{l_2}\right) = -f$$

oder:

$$\lambda_2 - l_2 = -\frac{fl_1}{l_1 + l_2}$$

analog wird:

$$l_1 - \lambda_1 = -\frac{fl_1}{l_1 + l_2}$$

Man hat also:

$$\lambda_1 = l_1 - \frac{fl_1}{l_1 + l_2}$$

$$\lambda_2 = l_2 - \frac{fl_2}{l_1 + l_2}$$

II. Eine Strecke wurde im ganzen gemessen und sodann in zwei Absätzen, und man hat die Werte:

$$L \quad l_1 \quad l_2$$

gefunden.

Seien wieder:

$$\varDelta \quad \lambda_1 \quad \lambda_2$$

die ausgeglichenen Werte. Nimmt man hier einfach an, dass das Mittel aus:

$$(L + l_1 + l_2)$$

also:

$$M = \frac{1}{2}(L + l_1 + l_2)$$

der wahre Wert ist, so ist diese Aufgabe auf die vorhergehende zurückgeführt.

**Bemerkung.** Das Prinzip der Längenausgleichung im Verhältnis der gemessenen Einzellängen ist in dem Umstand begründet, dass um so grössere Fehler zu befürchten sind, je länger die zu vermessende Strecke war. Es folgt aber auch aus der Methode der kleinsten Quadrate. Im II. Teile, wo wir über die Ausgleichung der polygonalen Züge reden, werden wir dasselbe Prinzip anwenden auf die Ausgleichung der Koordinaten. Man vergl. auch Erkl. 181 dieses Bandes.

## 10. Ueber die Ausgleichung der Winkelmessungen.

**Frage 225.** Welches Prinzip gilt für die Ausgleichung der Winkelmessungen?

**Antwort.** Für die Ausgleichung der Winkelmessungen gilt als Prinzip, den Fehler gleichmässig zu verteilen auf alle gemessenen Winkel. Werden z. B. drei Winkel eines Dreiecks einmal mit gleicher Genauigkeit gemessen und man findet, dass ihre Summe 180° um die Grösse $f$ übersteigt, so vermindert man einen jeden der gemessenen Winkel um ein Drittel dieses Betrags. Der Fehler, den man bei der Messung eines Winkels machen kann, ist nämlich von dessen Grösse unabhängig (vergl. Erkl. 228).

Analog wird man auch verfahren bei einem $n$-Eck.

Findet man statt der theoretischen Winkelsumme eines Vielecks:

$$(n - 2)\,180^0$$

**Erkl. 228.** Diese Methode wird auch durch die Methode der kleinsten Quadrate geboten. Denn seien $\alpha, \beta, \gamma$ die gemessenen, $x, y, z$ die ausgeglichenen Winkel, so hat man:

$$x + y + z - 180 = 0$$
$$\alpha + \beta + \gamma - 180 = f$$

also:

$$w = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = \text{Min.}$$

Eliminiert man $z$, so folgt:

$$w = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (180 - x - y - \gamma)^2 = \text{Min.}$$

Bildet man nun, um das Minimum zu finden:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = (x-\alpha) - (180 - x - y - \gamma) = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = (y-\beta) - (180 - x - y - \gamma) = 0$$

so folgt:

$$2x + y = 180 + \alpha - \gamma$$
$$2y + x = 180 + \beta - \gamma$$

Hieraus folgt, wenn man statt 180°:

$$\alpha + \beta + \gamma - f$$

setzt:

$$2x + y = 2\alpha + \beta - f$$
$$2y + x = 2\beta + \alpha - f$$

und wenn man nach $x$, $y$ auflöst:

$$3x = 3\alpha - f$$
$$3y = 3\beta - f$$

also ist:

$$x - \alpha = -\frac{f}{3}$$

$$y - \beta = -\frac{f}{3}$$

und da:

$$z = 180 - (x+y)$$
$$= 180 - \left(\alpha - \frac{f}{3} + \beta - \frac{f}{3}\right)$$
$$= \alpha + \beta + \gamma - f - \left(\alpha - \frac{f}{3} + \beta - \frac{f}{3}\right)$$

auch:

$$z - \gamma = -f + \frac{2}{3}f = -\frac{f}{3}$$

die Grösse:

$$(n-2)\,180^0 \pm f$$

so wird jeder Winkel um die Grösse:

$$\pm\frac{f}{n}$$

vermehrt.

## 11. Aufgaben.

**Aufgabe 94.** Eine Strecke, deren absolute Länge bekannt und gleich $L$ ist, wurde in zwei Absätzen gemessen und zwar der erste Teil $p$ mal und der zweite Teil $q$ mal. Das arithmetische Mittel der Messungen des ersten Teils war $a$, jenes des zweiten Teils $b$.

**Auflösung.** Bezeichnen wir die ausgeglichenen Teile mit $x$ und $y$, so hat man die Gleichungen:

$$x + y = L$$
$$a + b = L + f$$

$$\frac{p}{a}(x-a)^2 + \frac{q}{b}(y-b)^2 = \text{Min.}$$

Eliminiert man $y$, so wird:

$$w = \frac{p}{a}(x-a)^2 + \frac{q}{b}(L-x-b)^2 = \text{Min.}$$

Bildet man (vergl. Erkl. 229):

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{p}{a}(x-a) - \frac{q}{b}(L-x-b) = 0$$

und setzt:

$$L - b = a - f$$

**Erkl. 229.** Nach einem Satz der Differentialrechnung (vergleiche Kleyers Lehrbuch der Differentialrechnung) ist:

$$\frac{\partial}{\partial x}[f(x)]^2 = 2f'(x)$$

also, da:

$$f(x) = (x-a)^2$$

ist:

$$f'(x) = 2(x-a)$$

und analog für:

$$f(x) = (L-x-b)^2$$
$$f'(x) = -2(L-x-b)$$

Der Faktor 2 fällt, als allen Summanden gemeinschaftlich, aus.

so folgt:

$$\frac{p}{a}(x-a) + \frac{q}{b}(x-a+f) = 0$$

oder:

$$(x-a)\left(\frac{p}{a}+\frac{q}{b}\right) = -\frac{q}{b}f$$

woraus:

$$x = a - \frac{\frac{q}{b}f}{\frac{p}{a}+\frac{q}{b}}$$

Analog findet man:

$$y = b - \frac{\frac{p}{a}f}{\frac{p}{a}+\frac{q}{b}}$$

---

**Aufgabe 95.** Die drei Winkel eines Dreiecks wurden gemessen, und zwar der Winkel $x$ mit einem Theodolit, der 10″ direkt abzulesen gestattete, $p$ mal, der Winkel $y$ mit einem Theodolit, der 30″ Sekunden direkt angab, $q$ mal und endlich der Winkel $z$ mit einem Minuten angebenden Theodolit $r$ mal. Welche sind die ausgeglichenen Winkelwerte, wenn man die Mittel der angeführten Messungen der Reihe nach mit $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ bezeichnet?

**Auflösung.** Wir haben zunächst:

$$1) \ldots x + y + z = 180^0$$

ferner soll:

$$2) \ldots W = p_1(x-\alpha)^2 + p_2(y-\beta)^2 + p_3(z-\gamma)^2 = \text{Min.}$$

werden, wobei $p_1\, p_2\, p_3$ die Gewichte bezeichnen. Um diese zu finden, stellen wir folgende Ueberlegung an:

Ein Winkel wird offenbar desto genauer bekannt sein, je öfter er gemessen wurde, also wird sein Gewicht direkt proportional der Anzahl der Einzelmessungen.

Bezeichnen wir die Genauigkeit der Minutenablesung mit 1, so wird jene von 30″ mit 2 und jene von 10″ mit 6 zu bezeichnen sein, denn:

$$1' = 2 \cdot 30'' = 6 \cdot 10''$$

Demnach wird das Gewicht des ersten Winkels:

$$p_1 = 6p$$

das des zweiten Winkels:

$$p_2 = 2q$$

und jenes des dritten Winkels:

$$p_3 = r$$

sein. Eliminiert man nun aus den Gleichungen 1) und 2) $z$, so folgt:

$$W = p_1(x-\alpha)^2 + p_2(y-\beta)^2 + p_3(180 - x - y - \gamma)^2$$

**Bemerkung.** Die nebenstehend angewendete Verteilung der Gewichte ist natürlich an und für sich willkürlich, doch dürfte sie der Wirklichkeit am besten entsprechen. Im allgemeinen wird man mit einem 10″ angebenden Instrument die Winkel mehr als sechsmal genauer messen können als mit einem 1′ angebenden. Denn wir können annehmen, dass das erstere viel genauer gebaut ist, ein grösseres Fernrohr besitzt und eine sorgfältigere Behandlung erheischt, so dass das Resultat bedeutend genauer sein wird.

**Erkl. 230.** Liegen zwei Gleichungen vor von der Gestalt:

$$xm + yn = t$$
$$xm' + yn' = t'$$

so ist:

$$x = \frac{tn' - t'n}{mn' - m'n}$$
$$y = \frac{tm' - t'm}{mn' - m'n}$$

(Vergl. Prange, Lehrbuch der Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten.)

Bildet man nun:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = p_1(x - \alpha) - p_3(180^0 - x - y - \gamma) = 0$$
$$\frac{\partial w}{\partial y} = p_2(y - \beta) - p_3(180^0 - x - y - \gamma) = 0$$

so folgt, wenn man nach $x$ und $y$ ordnet:

$$x(p_1 + p_2) + y p_3 = p_1 \alpha + p_3(180 - \gamma)$$
$$x p_3 + y(p_2 + p_3) = p_2 \beta + p_3(180 - \gamma)$$

Aus diesen Gleichungen lässt sich leicht $x$ und $y$ berechnen (vergl. Erkl. 230).

Sodann ist:

$$z = 180 - (x + y)$$

Für $p_1\, p_2\, p_3$ sind natürlich die obigen Werte einzusetzen.

---

**Aufgabe 96.** Ein Quadrat wurde in der Weise bestimmt, dass man eine Seite, sowie die Diagonale gemessen hat. Es fand sich ein Widerspruch. Wie ist dieser auszugleichen?

**Erkl. 231.** In der Ausgleichsrechnung wird folgender Satz bewiesen:

Sind $p_1 \;\; p_2 \;\; p_3 \cdots$

Gewichte der Abweichungen:

$$x - \alpha \quad y - \beta \quad z - \gamma \cdots$$

so sind jene Werte dieser Grössen die wahrscheinlichsten, für welche der Ausdruck:

$$w = p_1(x - \alpha)^2 + p_2(y - \beta)^2 + p_3(z - \gamma)^2 \cdots$$

zu einem Minimum wird. In der Differentialrechnung wird aber gezeigt, dass die Bedingung hiefür ist:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0$$
$$\cdots\cdots$$

Sind mehrere Variabeln durch eine Bedingungsgleichung verbunden, dann müssen aus $w$ soviel als möglich Variable eliminiert werden.

**Auflösung.** Seien die ausgeglichenen Werte der Seite und Diagonale $x$ resp. $y$, so muss die Gleichung bestehen:

$$x\sqrt{2} - y = 0$$

Man fand aber:

$$\alpha\sqrt{2} - \beta = f$$

Zur Ausgleichung hat man das Minimum von:

$$\frac{1}{\alpha}(x - \alpha)^2 + \frac{1}{\beta}(y - \beta)^2 = \text{Min.}$$

zu bestimmen, wenn:

$$x\sqrt{2} - y = 0$$

ist (vergl. Erkl. 231).

Setzt man den Wert für $y$ aus der letzten Gleichung in die vorletzte, so folgt:

$$\frac{1}{\alpha}(x - \alpha)^2 + \frac{1}{\beta}(x\sqrt{2} - \beta)^2 = \text{Min.}$$

Differenziert man, so folgt:

$$\frac{1}{\alpha}(x - \alpha) + \frac{\sqrt{2}}{\beta}(x\sqrt{2} - \beta) = 0$$

also geordnet:

$$x\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\beta}\right) = 1 - \sqrt{2}$$

d. h.:

$$x = \alpha\beta\,\frac{\beta + 2\alpha}{1 - \sqrt{2}}$$

---

**Aufgabe 97.** In einem rechtwinkligen Dreieck wurden alle drei Seiten gemessen und ein Widerspruch gefunden. Es soll die Messung ausgeglichen werden.

**Auflösung.** Seien die ausgeglichenen Werte der beiden Katheten und der Hypo-

**Erkl. 282.**

$$\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}-1}\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Analog wird:

$$\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Die hier benützten Sätze der Differentialrechnung lauten:

$$\frac{\partial x^n}{\partial x} = n x^{n-1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)^n = f'(x, y)\cdot n\cdot f(x, y)^{n-1}$$

**Bemerkung.** Aus diesem Beispiel ersieht man, dass die Ausgleichung der Streckenrechnungen in komplizierteren Fällen als die hier aufgezählten sehr mühsam sein dürfte. Und das trifft in der That zu. Eine solche Ausgleichung lohnt sich in der Praxis nicht. Wir werden bei der Koordinatenmethode ein anderes Verfahren kennen lernen, das für alle Fälle berechnet ist und wenig Arbeit erfordert.

tenuse $x$, $y$, $z$ und die gemessenen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, so soll:

$$x^2+y^2-z^2=0$$

ferner muss:

$$\frac{1}{\alpha}(x-\alpha)^2+\frac{1}{\beta}(y-\beta)^2+\frac{1}{\gamma}(z-\gamma)^2 = \text{Min.}$$

Man hat also:

$$w = \frac{1}{\alpha}(x-\alpha)^2+\frac{1}{\beta}(y-\beta)^2 + \frac{1}{\gamma}\left(\sqrt{x^2+y^2}-\gamma\right)^2 = \text{Min.}$$

oder wenn gebildet wird (vergl. Erkl. 232):

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 = \frac{1}{\alpha}(x-\alpha)+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-\gamma\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 = \frac{1}{\beta}(x-\beta)+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\gamma\right)$$

oder geordnet:

$$x\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}\,\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 2$$

$$y\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\,\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 2$$

Hieraus wäre $x$ und $y$ zu berechnen. Es wäre aber nicht rationell, wenn man die Berechnung durchführen wollte. Man setzt vielmehr einfach:

$$x_0^2+y_0^2=\gamma^2$$

und hat dann:

$$x_1\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma^2}\right) = 2$$

$$y_1\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma^2}\right) = 2$$

Nun setzt man wieder:

$$x_1^2+y_1^2=g_1^2$$

und hat:

$$x_2\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma g_1}\right) = 2$$

$$y_2\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma g_1}\right) = 2$$

Diese Werte werden dann schon hinreichend genau sein, so dass man setzen kann:

$$x = x_2 = \frac{2}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma g_1}}$$

$$y = y_2 = \frac{2}{\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma g_1}}$$

---

**Aufgabe 98.** In einem Dreieck wurden alle drei Winkel gemessen. Man hat gefunden:

$$\alpha = 83^0\ 37'\ 28''$$
$$\beta = 28^0\ 27'\ 52''$$
$$\gamma = 67^0\ 54'\ 43''$$

Die angewendeten Instrumente waren verschieden. Das erste, mit dem der Winkel $\alpha$ gemessen wurde, liess einen mittleren Fehler von $\pm 2''$ erwarten, das zweite einen solchen von $\pm 0''5$ und das dritte endlich einen solchen von $\pm 1''$. Es sollen die ausgeglichenen Werte der Winkel nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt werden.

**Bemerkung.** Eine exakte Definition der Genauigkeit und damit der Gewichte gab Hansen (Sitzungsb. der k. sächs. Akad. der Wiss., 1867, p. 583). Er sagt: „Wenn die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler irgend einer Beobachtung oder irgend eines Resultats aus Beobachtungen zwischen $+c$ und $-c$ gleich ist der Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler irgend einer anderen Beobachtung zwischen den Grenzen $+c'$ und $-c'$, so verhält sich die Genauigkeit der ersteren zu jener der letzteren, wie $c':c$." Im allgemeinen muss die Bildung der Gewichte der Einsicht und der Vertrautheit des Rechnenden überlassen werden, wobei derselbe alle Umstände zu berücksichtigen hat, welche die Genauigkeit fördern oder ihr schaden.

**Erkl. 288.** Ordnet man nach $x-\alpha$ und $y-\beta$, so folgt:

$$(x-\alpha)[p_x+p_z]+p_z(y-\beta)=-p_z w$$

$$(y-\beta)[p_y+p_z]+p_z(x-\alpha)=-p_z w$$

Dividieren wir durch $p_z$, so folgt:

$$(x-\alpha)\left(\frac{p_x}{p_z}+1\right)+(y-\beta)=-w$$

$$(y-\beta)\left(\frac{p_y}{p_z}+1\right)+(x-\alpha)=-w$$

Subtrahieren wir nun die Gleichungen von einander, so folgt:

$$(x-\alpha)\frac{p_x}{p_z}-(y-\beta)\frac{p_y}{p_z}=0$$

oder:

$$(x-\alpha)=\frac{p_y}{p_x}(y-\beta)$$

Setzt man dieses Resultat in die obige Gleichung ein, so folgt:

$$(y-\beta)\left(\frac{p_y}{p_z}+1\right)+\frac{p_y}{p_x}(y-\beta)=-w$$

oder:

$$(y-\beta)\left(\frac{p_y}{p_z}+1+\frac{p_y}{p_x}\right)=-w$$

**Auflösung.** Bezeichnen wir die ausgeglichenen Werte der Winkel mit $x$, $y$, $z$, sodann muss:

1) $\ldots\ x+y+z-180^0=0$

Die Messung gibt:

2) $\ldots\ \alpha+\beta+\gamma-180^0=+3''$

wir haben also:

3) $\ldots\ (x-\alpha)+(y-\beta)+(z-\gamma)=-3''$

indem wir die Gleichung 2) von der Gleichung 1) abziehen.

Wären die Winkel mit einem Instrument gemessen, so würde das Ausgleichsprinzip fordern, dass:

$$\Omega=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2$$

zu einem Minimum werde.

Hier muss aber noch berücksichtigt werden die Verschiedenheit der Bestimmung der einzelnen Winkel. Dieses geschieht durch die sogenannten Gewichte. Wir setzen:

$$p_x:p_y:p_z=\frac{1}{2^2}:\frac{1}{0{,}5^2}:\frac{1}{1^2}$$

oder:

$$p_x:p_y:p_z=1:16:4$$

d. h. ungefähr so viel: legen wir einer Messung mit dem Instrument, das $\pm 2''$ mittlere Fehler erwarten lässt, eine Genauigkeit $=1$, so ist die Genauigkeit des Instruments mit dem Winkelfehler $\pm 0''5$ sechzehnmal grösser, und jene des Instruments mit dem Fehler $\pm 1''$ viermal so gross. Das Problem erfordert nun, dass:

$$\Omega=p_x(x-\alpha)^2+p_y(y-\beta)^2+p_z(z-\gamma)^2$$

zu einem Minimum werde.

Eliminieren wir:

$$z-\gamma$$

mit Hilfe der Gleichung 3) so folgt, wenn wir:

$$3''=w$$

setzen:

$$z-\gamma=-w-(x-\alpha)-(y-\beta)$$

also:

$$R=p_x(x-\alpha)^2+p_y(y-\beta)^2+p_z[-w-(x-\alpha)-(y-\beta)]$$

Soll diese Funktion ein Minimum werden, so müssen die partiellen Differentialquotienten sowohl nach $x$ als auch nach $y$ verschwinden, es muss also:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial x}=p_x(x-\alpha)-p_z[-w-(x-\alpha)-(y-\beta)]=0$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial y}=p_y(y-\beta)-p_z[-w-(x-\alpha)-(y-\beta)]=0$$

**Erkl. 234.** Hiemit ist die Ausgleichung vollendet. Wären alle drei Gewichte gleich, so hätte man:

$$p_x : p_y : p_z = 1 : 1 : 1$$

Dann wäre:

$$3(y-\beta) = -w$$

also:

$$y - \beta = -\frac{w}{3}$$

und weiter:

$$x - \alpha = \frac{1}{1}(y-\beta) = -\frac{w}{3}$$

und endlich:

$$z - \gamma = -w + \frac{w}{3} + \frac{w}{3} = -\frac{w}{3}$$

Bei gleichen Gewichten also wird der Fehler in der Winkelsumme eines Dreiecks gleichmässig auf alle Winkel verteilt.

oder wenn man ordnet (vergl. Erkl. 233):

$$(x-\alpha) = \frac{p_y}{p_x}(y-\beta)$$

$$(y-\beta)\left(\frac{p_y}{p_z} + 1 + \frac{p_y}{p_x}\right) = -w$$

Nun war aber:

$$\frac{p_y}{p_z} = \frac{16}{4} = 4$$

$$\frac{p_y}{p_x} = \frac{16}{1} = 16$$

also wird, da $w = 3''$:

$$(y-\beta) = -\frac{3''}{21} = -0''14$$

ferner:

$$(x-\alpha) = \frac{p_x}{p_y}(y-\beta) = -\frac{3''}{21}\cdot 16 = -2''29$$

Schliesslich haben wir:

$$z - \gamma = -w'' - (x-\beta) - (y-\beta)$$
$$= -3'' + 0''14 + 2''29 = -0''57$$

Ebenso haben wir:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x = \alpha - 2''29 =$ | 83° | 37′ | 25″ 71 |
| $y = \beta - 0''14 =$ | 28 | 27 | 51 · 86 |
| $z = \gamma - 0''57 =$ | 67 | 54 | 42 · 43 |
| $x + y + z =$ | 180° | 0′ | 0″ 00 |

(vergl. Erkl. 234).

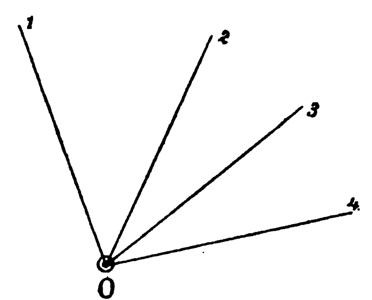
---

**Aufgabe 99.** Bei einer Vermessung wurden die aneinander liegenden Winkel gemessen und (vergl. Fig. 253) gefunden:

$$\sphericalangle 102 = \alpha_{12} \qquad \sphericalangle 203 = \alpha_{23}$$
$$\sphericalangle 103 = \alpha_{13} \qquad \sphericalangle 204 = \alpha_{24}$$
$$\sphericalangle 104 = \alpha_{14} \qquad \sphericalangle 304 = \alpha_{34}$$

Es sollen die ausgeglichenen Werte der Winkel gefunden werden.


Figur 253.




**Auflösung.** Bezeichnen wir die Verbesserungen der einzelnen Winkel mit $v$, so dass z. B. $v_{12}$ gleich der Verbesserung des Winkels $\alpha_{12}$ u. s. w. die ausgeglichenen Winkel mit:

$$x_{12} \quad x_{13} \quad x_{14}$$
$$x_{23} \quad x_{24} \quad x_{34}$$

Dann müssen die Gleichungen bestehen

$$1) \ldots \qquad x_{12} = \alpha_{12} + v_{12}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$x_{34} = \alpha_{34} + v_{34}$$

ferner:

$$2) \ldots \qquad x_{12} + x_{23} - x_{13} = 0$$
$$x_{12} + x_{24} - x_{14} = 0$$
$$x_{13} + x_{34} - x_{14} = 0$$

Es wurde aber gefunden:

$$3) \ldots \qquad \alpha_{12} + \alpha_{23} - \alpha_{13} = w_1$$
$$\alpha_{12} + \alpha_{24} - \alpha_{14} = w_2$$
$$\alpha_{13} + \alpha_{34} - \alpha_{14} = w_3$$

Subtrahieren wir die Gleichungen 3) von den Gleichungen 2), so folgt, wenn man beachtet, dass:

$$x_{12} - \alpha_{12} = v_{12} \quad \text{u. s. w.}$$

$$4) \ldots \quad v_{12} + v_{23} - v_{13} = - w_1$$
$$v_{12} + v_{24} - v_{14} = - w_2$$
$$v_{13} + v_{34} - v_{14} = - w_3$$

**Die Methode der kleinsten Quadrate fordert aber, dass:**

$$5) \ldots \quad \Omega = v_{12}^2 + z_{13}^2 + v_{14}^2 + v_{23}^2 + v_{34}^2 + v_{24}^2$$

zu einem Minimum $y$ werde.

Aus den Gleichungen 4) findet man aber:

$$6) \ldots \quad v_{23} = - w_1 + v_{13} - v_{12}$$
$$v_{24} = + w_2 + v_{14} - v_{12}$$
$$v_{34} = - w_4 + v_{14} - v_{13}$$

Setzt man dieses in 5) ein, so folgt:

$$\Omega = v_{12}^2 + v_{13}^2 + v_{14}^2 + (- w_1 + v_{13} - v_{12})^2 + (- w_2 + v_{14} - v_{12})^2 + (- w_3 + v_{14} - v_{13})^2$$

Soll diese Funktion ein Minimum sein, so muss:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Omega}{\partial v_{12}} = v_{12} + w_1 - v_{13} + v_{12} + w_2 - v_{14} + v_{12} = 3 v_{12} - v_{13} - v_{14} + (w_1 + w_2) = 0$$
$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Omega}{\partial v_{13}} = v_{13} - w_1 + v_{13} - v_{12} + w_3 - v_{14} + v_{13} = 3 v_{13} - v_{12} - v_{14} + (w_3 - w_1) = 0$$
$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Omega}{\partial v_{14}} = v_{14} - w_2 + v_{14} - v_{12} - w_3 + v_{14} - v_{13} = 3 v_{14} - v_{12} - v_{13} - (w_2 + w_3) = 0$$

Man hat also die Gleichungen:

$$3 v_{12} - v_{13} - v_{14} = - (w_1 + w_2)$$
$$3 v_{13} - v_{12} - v_{14} = - (w_3 - w_1)$$
$$3 v_{14} - v_{12} - v_{13} = + (w_3 + w_2)$$

Ihre Auflösung liefert (vergl. Erkl. 235):

$$v_{12} \quad v_{13} \quad v_{14}$$

Die Gleichungen 6) geben sodann:

$$v_{23} \quad v_{24} \quad v_{34}$$

$$v_{12} = - \frac{1}{4} (w_1 + w_2)$$
$$v_{13} = - \frac{1}{4} (w_3 - w_1)$$
$$v_{14} = + \frac{1}{4} (w_2 + w_3)$$
$$v_{23} = - \frac{1}{4} (2 w_1 + w_3 - w_2)$$
$$v_{24} = - \frac{1}{4} (2 w_2 - w_3 - w_1)$$
$$v_{34} = - \frac{1}{4} (2 w_3 - w_2 + w_1)$$

Ein Zahlenbeispiel dürfte überflüssig sein.

**Erkl. 285.** Um diese Gleichungen aufzulösen, addiere man alle drei, so folgt:

$$v_{12} + w_{13} + v_{14} = 0$$

Sodann wird:

$$4 v_{12} - (v_{12} + v_{13} + v_{14}) = 3 v_{12} - v_{13} - v_{14}$$
$$= 4 v_{12} = - (w_1 + w_2)$$

also:

$$v_{12} = - \frac{1}{4} (w_1 + w_2)$$

analog folgt:

$$v_{13} = - \frac{1}{4} (w_3 - w_1)$$

und

$$v_{14} = + \frac{1}{4} (w_2 + w_3)$$

Sodann wird:

$$v_{23} = - w_1 + v_{13} - v_{12}$$
$$= - w_1 - \frac{1}{4} (w_3 - w_1) + \frac{1}{4} (w_1 + w_2)$$
$$= - w_1 - \frac{1}{4} w_3 + \frac{1}{4} w_1 + \frac{1}{4} w_1 + \frac{1}{4} w_2$$
$$= - \frac{1}{4} (2 w_1 + w_3 - w_2)$$

und analog:

$$v_{34} \ , \ v_{24}$$

---

**Aufgabe 100.** Man hat eine Strecke mit Kette, Latte und Messband gemessen. Die dabei erhaltenen Zahlen sind:

514·26, 515·00, 514·80

welches ist die wahrscheinlichste Länge der Strecke?

**Auflösung.** Man darf hier nicht einfach das Mittel nehmen, denn die Genauigkeit der Kettenrechnung ist eine andere als jene des Messbandes und der Latte.

**Erkl. 236.** Man hat:

$$1:x:y = 3:5:8$$

also:

$$1:x = 3:5$$
$$1:y = 3:8$$

d. h.:

$$x = \frac{3}{5}, \quad y = \frac{3}{8}$$

**Erkl. 237.** In Bobecks Lehrbuch der Ausgleichsrechnung wird bewiesen, dass wenn:

$$p_1 \quad p_2 \quad p_3$$

die Gewichte der Beobachtungen:

$$l_1 \quad l_2 \quad l_3$$

sind, alsdann das Mittel durch:

$$b = \frac{l_1 p_1 + l_2 q_2 + l_3 p_3}{p_1 + p_2 + p_3}$$

gegeben ist.

Nach Jordan verhalten sich die Genauigkeiten:

Latte : Stahlband : Kette = 3 : 5 : 8

Setzt man demnach das Gewicht der Latte = 1, so werden die Gewichte des Stahlbandes eine Kette sein (vergleiche Erkl. 236)

$$\frac{3}{5} \text{ und } \frac{3}{8}$$

so dass wir also haben (vergl. Erkl. 237) für die Länge $l$:

$$l = \frac{515{\cdot}00 \times 1 + 514{\cdot}80 \times \frac{3}{5} + 514{\cdot}26 \times \frac{3}{8}}{1 + \frac{3}{5} + \frac{3}{8}}$$

d. h.:

$$l = 514{\cdot}80$$

Wir sehen, dass hier zufälligerweise die Messbandmessung mit dem wahrscheinlichsten Resultat übereinstimmt.

---

**Aufgabe 101.** Bei der Messung einer Grösse wurden folgende Werte gefunden.

$$x_1 = 723$$
$$x_2 = 728$$
$$x_3 = 715$$
$$x_4 = 729$$
$$x_5 = 731$$
$$x_6 = 724$$

Es soll sowohl der mittlere Fehler einer einzelnen Beobachtung, als auch der Fehler des arithmetischen Mittels bestimmt werden (vergleiche Erkl. 238).

**Auflösung.** Bilden wir zunächst das arithmetische Mittel, so folgt:

$$x = \frac{6{\cdot}700 + 23 + 28 + 15 + 29 + 31 + 24}{6}$$

oder:

$$x = 700 + \frac{150}{6} = 725$$

Bilden wir nun die Abweichungen vom Mittel, so ergibt sich:

$$\triangle x_1 = x - x_1 = +2$$
$$\triangle x_2 = x - x_2 = -3$$
$$\triangle x_3 = x - x_3 = +10$$
$$\triangle x_4 = x - x_4 = -4$$
$$\triangle x_5 = x - x_5 = -6$$
$$\triangle x_9 = x - x_6 = +1$$

Wir finden zunächst:

$$[\triangle x] = 0$$

wie es sein soll, dieses ist eine kleine Kontrolle der Rechnung. Bilden wir weiter:

$$[\triangle x^2] = 4 + 9 + 100 + 16 + 36 + 1 = 166$$

Wir haben also den mittleren Fehler einer Beobachtung gleich:

$$m = \sqrt{\frac{[\triangle x_2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{166}{5}} = \pm 5{,}76$$

und den Fehler des arithmetischen Mittels (vergleiche Erkl. 238).

$$\mu = \sqrt{\frac{\triangle x^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{166}{5 \cdot 6}} = \pm 5{,}76$$

**Erkl. 238.** Unter dem Fehler des arithmetischen Mittels versteht man den mittleren Wert der Abweichung des arithmetischen Mittels von der gesuchten Grösse. Vergleiche die Fragen 208 und 209.

so dass also die gesuchte Grösse gleich:

$$725 \pm 2{,}35$$

zu setzen ist, d. h. die gesuchte Grösse kann sowohl:

$$727{,}35$$

als auch:

$$722{,}67$$

oder auch einen dazwischen liegenden Wert betragen.

---

**Aufgabe 102.** Ein Winkel wurde fünfmal gemessen und dabei ergaben sich folgende Resultate:

$$x_1 = 36^0\,26'\,16''$$
$$x_2 = 35\ \ 26\ \ 20$$
$$x_3 = 35\ \ 26\ \ 18$$
$$x_4 = 35\ \ 26\ \ 25$$
$$x_5 = 35\ \ 26\ \ 15$$

Es ist der durchschnittliche Fehler der einzelnen Messung zu berechnen (vergleiche Erkl. 239).

**Erkl. 239.** Der durchschnittliche Fehler ist der Mittelwert der Fehler, wenn diese ohne Rücksicht auf das Zeichen, also absolut genommen werden.

Seien $n$ Beobachtungen gegeben und $\partial x$ die wahren übrig bleibenden Fehler und es sei:

$$[\partial x]$$

der absolute Wert irgend eines Fehlers, sowie:

$$[(\partial x)]$$

ihre Summe, so ist der Durchschnittsfehler $t$ gleich:

$$t = \frac{[(\partial x)]}{n}$$

Um den Durchschnittsfehler zu bilden, berechne man aus der gegebenen Beobachtung das arithmetische Mittel und bilde hierauf die Differenzen $\triangle$. Sodann erhält man einen Näherungswert für den Durchschnittsfehler, einen Näherungswert, weil die wahren Fehler nicht bekannt sind. Man erhält also:

$$t = \frac{[(\triangle)]}{n}$$

**Antwort.** Bilden wir das arithmetische Mittel der Beobachtungen, indem wir es gleich:

$$x = 35^0\,26' + \frac{16'' + 20'' + 18'' + 25'' + 15''}{5}$$

also:

$$x = 35^0\,26' + \frac{94''}{5} = 35^0\,26'\,18''\,8$$

setzen, so ergeben sich folgende Differenzen:

$$x - x_1 = \triangle x_1 = +2''\,8$$
$$x - x_2 = \triangle x_2 = -1{,}2$$
$$x - x_3 = \triangle x_3 = +0{,}8$$
$$x - x_4 = \triangle x_4 = -6{,}2$$
$$x - x_5 = \triangle x_5 = +3{,}8$$

Die absolute Summe der Differenzen ist:

$$[(\triangle)] = 14''\,8$$

also ist:

$$t = \frac{14''\,8}{5} = 2''\,96$$

Zur Probe kann man die Gleichung:

$$[\triangle] = 0$$

benützen.

Wollten wir noch den mittleren Fehler einer Einzelnbeobachtung berechnen, so haben wir die Summe der Fehlerquadrate zu bilden, wir erhalten sodann den mittleren Fehler einer Einzelnbeobachtung gleich:

$$m = \sqrt{\frac{62{,}80}{5-1}} = \pm 1''\,77$$

und den mittleren Fehler des arithmetischen Mittels:

$$\mu = \sqrt{\frac{62{,}80}{4 \cdot 5}} = \pm 1''\,77$$

Demnach wird das Mittel für den beobachteten Winkel selbst gleich:

$$x = 35^0\,26'\,18''\,8 \pm 1''\,77$$

---

**Aufgabe 103.** In einem Dreieck wurden alle Seiten, nämlich:

$$a', \ b', \ c'$$

und alle Winkel, d. h.:

$$\alpha' \ \beta' \ \gamma'$$

gemessen. Wie wird das Dreieck ausgeglichen?

**Auflösung.** Zur Bestimmung des Dreiecks sind drei Grössen nötig. Es wurden sechs gemessen, also sind noch drei Bedingungsgleichungen aufzustellen.

Diese sind offenbar:

$$1) \ldots \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 180^0 \\ a \sin\beta - b \sin\alpha = 0 \\ c - a\cos\beta - b\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

Es wurde gefunden:

$$2) \ldots \begin{cases} \alpha' + \beta' + \gamma' = 180^0 + w_1 \\ a' \sin\beta' - b' \sin\alpha' = w_2 \\ c' - a'\cos\beta' - b'\cos\alpha' = w_3 \end{cases}$$

Setzt man:

$$\alpha - \alpha' = \Delta\alpha \text{ u. s. w.}$$

so muss nach Elimination der Gleichungen (vergleiche Erkl. 240):

$$3) \ldots \begin{cases} \Delta\alpha + \Delta\beta + \Delta\gamma + w_1 = 0 \\ \Delta a \cdot \sin\beta' - \Delta b \cdot \sin\alpha' + \Delta\beta \cdot a' \cos\beta' \\ \qquad - \Delta\alpha \cdot b' \cos\alpha' + w_2 = 0 \\ \Delta c - \Delta a \cdot \cos\beta' - \Delta b \cdot \cos\alpha' \\ \qquad + \Delta\beta a' \sin\beta' + \Delta\alpha b' \sin\alpha' \\ \qquad + w_3 = 0 \end{cases}$$

der Ausdruck:

$$4) \ldots w = (\Delta a)^2 + (\Delta b)^2 + (\Delta c)^2 + (\Delta\alpha)^2 + (\Delta\beta)^2 + (\Delta\gamma)^2$$

ein Minimum werden.

Dabei wird natürlich vorausgesetzt, dass die Gewichte alle gleich seien.

In die Gleichung 4) setze man sodann die Werte für:

$$\Delta\alpha, \ \Delta\beta, \ \Delta c$$

aus den Gleichungen 3) ein. Dann wird $w$ nur die Grössen:

$$\Delta\gamma, \ \Delta b, \ \Delta a$$

enthalten. Wird $w$ nach diesen Grössen partiell differenziert also:

$$\frac{\partial w}{\partial \Delta\gamma} = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial \Delta b} = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial \Delta a} = 0$$

gebildet, so erhält man drei Gleichungen zur Bestimmung der Grössen:

$$\Delta\gamma, \ \Delta b, \ \Delta a$$

**Erkl. 240.** Subtrahieren wir die erste der Gleichungen 2) von der ersten der Gleich. 1), so folgt.

$$(\alpha - \alpha') + (\beta - \beta') + (\gamma - \gamma') = 180^0 - (180^0 + w_1)$$

oder:

$$\Delta\alpha + \Delta\beta + \Delta\gamma = -w_1$$

Setzt man in die zweite der Gleichungen 1):

$$a = a' + \Delta a$$

u. s. w., so folgt:

$$(a' + \Delta a)\sin(\beta' + \Delta\beta) - (b' + \Delta b)\sin(\alpha' + \Delta\alpha) = 0$$

Wird nun gesetzt:

$$\sin(\beta' + \Delta\beta) = \sin\beta' \cos\Delta\beta + \cos\beta' \sin\Delta\beta$$

und darin:

$$\cos\Delta\beta = 1$$
$$\sin\Delta\beta = \Delta\beta$$

so folgt:

$$\sin(\beta' + \Delta\beta) = \sin\beta' + \Delta\beta\cos\beta'$$

also hat man:

$$(a' + \Delta a)[\sin\beta' + \Delta\beta\cos\beta'] - (b' + \Delta b)[\sin\alpha' + \Delta\alpha\cos\alpha'] = 0$$

oder mit Weglassung der kleinen mit $\Delta a \cdot \Delta\beta$ und $\Delta b \cdot \Delta\alpha$ multiplizierten Glieder:

$$(a'\sin\beta' - b'\sin\alpha') + \Delta a \cdot \sin\beta' - \Delta b \cdot \sin\alpha' + \Delta\beta \cdot a'\cos\beta' - \Delta\alpha \cdot b'\cos\alpha' = 0$$

Nun ist aber:

$$a'\sin\beta' - b'\sin\alpha' = w_1$$

woraus die nebenstehende Gleichung 2) den Gleichungen 3) folgt.

Analog ist auch die zweite Gleichung zu bilden.

**Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.**

**Der ausführliche Prospekt und das ausführliche Inhaltsverzeichnis der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer" kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung gratis und portofrei bezogen werden.**

Bemerkt sei hier nur:

1). **Jedes Heft** ist **aufgeschnitten** und gut brochiert, um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu **gestatten.**

2). **Jedes Kapitel enthält** sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und **Erklärungen am** Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). **Monatlich** erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft.

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

---

☛ Das **vollständige**

**Inhaltsverzeichnis**

**der bis jetzt erschienenen Hefte**

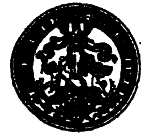
kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

---

**Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.**

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

1304. Heft. | Preis des Heftes 25 Pf. | Vermessungskunde (Geodäsie). Zweiter Teil. Forts. v. Heft 1303. — Seite 1—16. Mit 11 Figuren.





# Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten
erläutert durch
**viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,**
aus allen Zweigen
der **Rechenkunst,** der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus **allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie;** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's;** der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
**zum einzig richtigen und erfolgreichen**
**Studium,** zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

**Dr. Adolph Kleyer,**
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

# Vermessungskunde

## (Geodäsie).

### Zweiter Teil.

Nach **System Kleyer** bearbeitet von **Dr. W. Láska.**

Fortsetzung von Heft 1303. — Seite 1—16. Mit 11 Figuren.

**Inhalt:**

Die Polygonometrie. — Einleitung. — Die Beziehung der Projektionen zu der Koordinatengeometrie. — In und um einen Kreis beschriebene Vielecke. — Verschiedene Sätze über Polygone.

**Stuttgart 1894.**
Verlag von Julius Maier.

**Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.**

# PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann **auch alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch **die überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der **mathematischen** Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln,** Formeln, Sätze etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige Kraft** verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und **praktische Aufgaben** werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit **Angabe der Namen** verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der **Verfasser,** Dr. **Kleyer,** Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren **Erledigung** thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

# Vermessungskunde.

(Geodäsie.)

Zweiter Teil.

# I. Die Polygonometrie.

## 1. Einleitung.

**Frage 1.** Was versteht man unter Polygonometrie?

**Bemerkung.** Das Wort Polygonometrie stammt vom griechischen „πολυς“ viel und „γονυ“ „Winkel“, „Knie“, „Ecke“, daher auch der Name „Vieleck“.

**Antwort.** Unter Polygonometrie versteht man die Lehre von den Eigenschaften und der Berechnung der Polygone oder Vielecke.

---

**Frage 2.** Was ist ein Polygon?

**Antwort.** Ein Polygon ist eine geschlossene, mehr als vierseitige, geradlinige oder krummlinige Figur. Sind die Seiten nicht gerade, so müssen sie einer bestimmten Fläche angehören. Ist diese Fläche ein Kreis, so spricht man von sphärischer Polygonometrie, ist sie ein Ellipsoid, dann hat man eine sphäroidische Polygonometrie u. s. w.

---

**Frage 3.** Welche Arten der Polygone unterscheidet man?

**Antwort.** Man unterscheidet Flächen- und Raumpolygone (auch windschiefe Polygone genannt).

---

**Frage 4.** Was ist ein Flächenpolygon?

**Antwort.** Befinden sich sämtliche Seiten auf einer Fläche, so spricht man von einem Flächenpolygon. So sind z. B. ein ebenes und ein sphärisches Polygon Flächenpolygone.

---

**Frage 5.** Was ist ein Raumpolygon?

**Bemerkung.** Die Raumpolygone gehören der Stereometrie an.

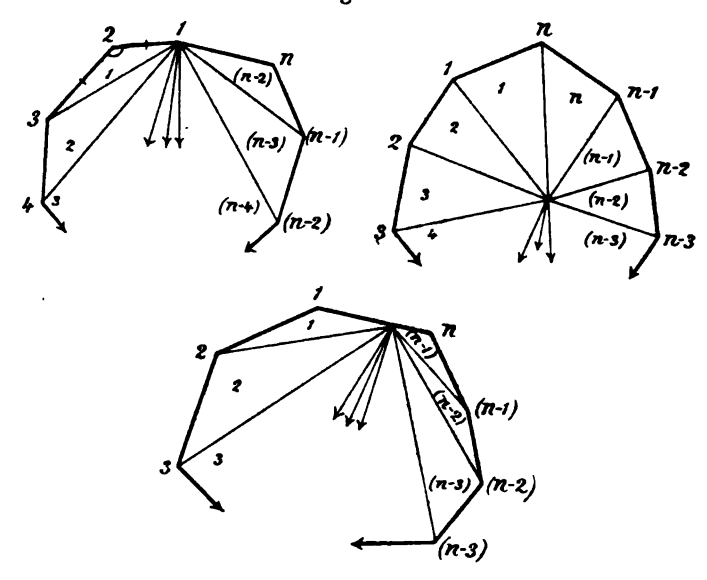
**Antwort.** Steht ein Polygon in keiner Beziehung zu irgend einer Fläche, so wird es ein Raumpolygon genannt.

**Bemerkung.** In der Folge behandeln wir nur ebene Polygone. Ueber die allgemeinen Eigenschaften der Polygone vergleiche auch Sachs, Lehrbuch der Planimetrie, III. Teil, Seite 163 und folgende.

Die regelmässigen Polygone findet man behandelt in Kleyers Lehrbuch der Trigonometrie, Seite 527.

---

Figur 1.




**Frage 6.** Wieviel Diagonalen lassen sich von einem Eckpunkte des $n$-Ecks ziehen?

**Antwort.** Nehmen wir drei aufeinander folgende Eckpunkte 1, 2, 3 (vergl. Figur 1), so lässt sich von 1 bis 3 eine Diagonale ziehen; jeder fernere Punkt liefert wieder eine Diagonale bis zum Punkte $(n - 1)$. Wir haben also im ganzen:

$$n - 2$$

Diagonalen. Durch diese Diagonalen wird das Vieleck in:

$$n - 2$$

Dreiecke zerlegt.

---

**Frage 7.** Wie gross ist die Summe aller Innenwinkel in einem $n$-Eck?

**Antwort.** Nach der Antwort zu der vorhergehenden Aufgabe lässt sich ein $n$-Eck in $n - 2$ Dreiecke zerlegen. Die Summe aller Innenwinkel des Vielecks gleicht aber der Summe aller Winkel dieser Dreiecke, also beträgt sie:

$$(n - 2) \cdot 180^0$$

Diese Gleichung nennt man die erste **Hauptgleichung der Polygonometrie.**

**Bemerkung.** Man kann diesen Satz noch anders beweisen. Zieht man von einem Punkte innerhalb eines $n$-Polygons Verbindungslinien zu den einzelnen Ecken, dann erhält man (vergl. Figur 1) $n$-Dreiecke. Die Summe aller Winkel in diesen Dreiecken beträgt:

$$n \cdot 180^0$$

Von dieser muss aber:

$$360^0 = 2 \cdot 180$$

als der Betrag aller Winkel an den Spitzen in Abzug gebracht werden, so dass man wieder hat:

$$n \cdot 180^0 - 2 \cdot 180^0 = (n - 2)\, 180^0$$

---

**Frage 8.** Durch wieviel Stücke ist ein Polygon eindeutig bestimmt?

**Antwort.** Ein Polygon von $n$ Seiten ist durch

$$2n - 3$$

Stücke bestimmt, es muss sich aber mindestens eine Seite darunter befinden. Denn zerlegt man das Vieleck in Dreiecke, so erhält man

$$n - 2$$

Dreiecke. Das erste Dreieck braucht drei Bestimmungsstücke, jedes folgende nur zwei, also haben wir:

$$3 + [(n - 2) - 1] \cdot 2 = 2n - 3$$

Bestimmungsstücke.

**Bemerkung.** Dass wenigstens eine Seite sich darunter befinden muss, liegt auf der Hand, denn wäre keine gegeben, so könnte man auch keines von den das Vieleck darstellenden Dreiecke konstruieren, denn aus drei Winkeln lässt sich kein Dreieck eindeutig bestimmen.

---

**Frage 9.** Wieviel Stücke dürfen in einem Polygon höchstens unbekannt sein?

**Antwort.** In einem Polygon dürfen höchstens drei Stücke unbekannt sein, worunter aber höchstens zwei Seiten sein dürfen (vergl. Erkl. 1). Denn in einem Polygon von $n$ Seiten gibt es $2n$ zu berechnende Stücke, nämlich $n$ Seiten und $n$ Winkel. Da aber nach der vorhergehenden Frage ein Polygon bestimmt ist, sobald

$$2n - 3$$

Bestimmungsstücke gegeben sind, so bleiben noch:

$$2n - (2n - 3) = 3$$

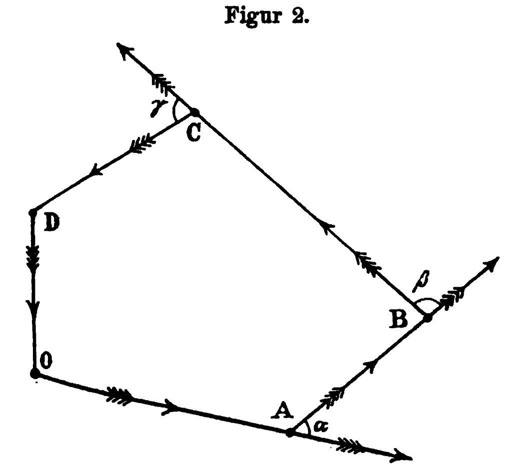
Bestimmungsstücke übrig. Es müssen sich also drei Gleichungen angeben lassen, welche diese Stücke bestimmen. Die eine haben wir in Antwort auf Frage 7 kennen gelernt. Aus ihr kann, da sie keine Seite enthält, nur ein Winkel berechnet werden, demnach können die drei Stücke nicht zugleich drei Seiten sein, weil wir nur zwei Bestimmungsgleichungen haben, in welchen die Seiten vorkommen können.

**Erkl. 1.** Ist also ein Polygon bis auf drei Seiten bestimmt, so können die letzteren aus den gegebenen Stücken nicht berechnet werden.

---

**Frage 10.** Was versteht man unter der Richtung der Polygonseite?

Figur 2.




**Antwort.** Unter der Richtung der Polygonseite wird jene Richtung verstanden, die ein Punkt einnimmt, welcher sich auf dem Umfange des Polygons, ohne seinen Bewegungssinn zu ändern, bewegt (vergleiche Figur 2). Ist nur eine einzige Strecke vorhanden, so ist es im allgemeinen gleichgültig, welche Richtung man ihr zuschreibt, z. B. von $O$ nach $A$ oder $A$ nach $O$ in der Figur 2. Wird an diese eine zweite Strecke angereiht, so kann sie mit der erstern gleich oder ungleich gerichtet sein.

**Bemerkung.** Man hat den Begriff der Richtung in die Polygonometrie aus ökonomischen Rücksichten eingeführt, mit seiner Hilfe lassen sich die Sätze viel einfacher aussprechen, als es sonst möglich wäre.

---

**Frage 11.** Was hat man als Grundsatz bei polygonometrischen Rechnungen hiuzunehmen?

**Bemerkung.** Dieser Grundsatz ist deswegen wichtig, weil er die Berechnung des Polygons wesentlich erleichtert, indem er die Einführung der Richtungswinkel (siehe nachstehende Frage 12) gestattet.

**Antwort.** Es gilt als Grundsatz bei polygonometrischen Rechnungen, dass man alle Seiten als gleichgerichtet betrachtet (vergl. Figur 2 die Richtung der Pfeile). Man sagt, die Seiten seien gleichgerichtet, wenn die Richtung je zwei aufeinander folgender Seiten dieselbe ist.

---

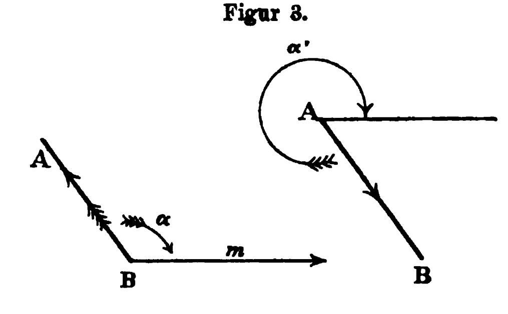
**Frage 12.** Was ist ein Polygonzug?

**Antwort.** Unter einem Polygonzug versteht man die Aneinanderreihung mehrerer geraden Linien gleicher Richtung. Ein Polygonzug braucht nicht geschlossen zu sein. Verbindet man aber die Endpunkte, so erhält man ein geschlossenes Polygon.

---

**Frage 13.** Was ist ein Richtungswinkel?

Figur 3.




**Antwort.** Unter einem Richtungswinkel wird derjenige verstanden, welcher entsteht, wenn man eine gegebene Strecke durch eine Drehung im Sinne des Uhrzeigers mit einer fest gegebenen Richtung zur Deckung bringt.

Dabei ist natürlich die Richtung der Strecke massgebend, so ist z. B. für die Richtung $BA$ $\alpha$ der Richtungswinkel, für die Richtung $AB$ dagegen $\alpha'$ (vergl. Fig. 3, $m$ ist die feste Richtung).

---

**Frage 14.** Welche Beziehung besteht zwischen den zwei möglichen Richtungswinkeln einer Strecke?

**Bemerkung.** In der Polygonometrie wird gewöhnlich eine Seite für die feste Richtung genommen. Ihr Richtungswinkel ist demnach 0 oder 180°.

**Antwort.** Da die Richtung $BA$ dadurch entsteht, dass man die Richtung $AB$ um 180° im Sinne des Uhrzeigers dreht, so wird:

$$\alpha' = 180^0 + \alpha$$

Daraus folgt:

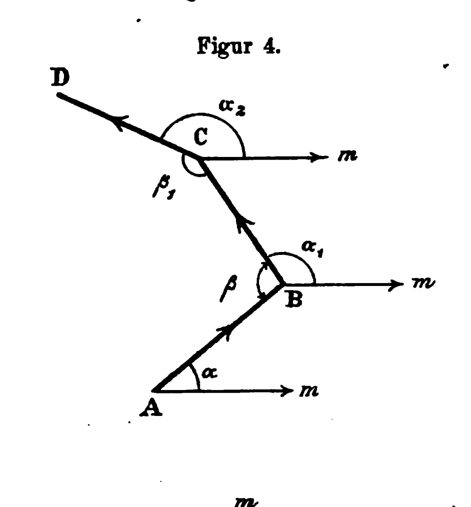
$$\alpha' - \alpha = 180^0$$

d. h. die Differenz der zwei möglichen Richtungswinkel beträgt 180°.

---

**Frage 15.** Man habe zwei zusammenstossende Strecken, die einen Winkel $\beta$ miteinander bilden. In welcher Beziehung steht sodann dieser Winkel zu den Richtungswinkeln?

Figur 4.




**Antwort.** Um die Beziehung zwischen dem Brechungswinkel $\beta$ und den Richtungswinkeln zu finden, betrachten wir die Fig. 4. Hier wird:

$$\sphericalangle \beta + \sphericalangle \alpha_1 + \sphericalangle ABm = 360^0$$

Da aber:

$$\sphericalangle ABm + \alpha = 180^0$$

so wird:

$$\sphericalangle ABm = 180^0 - \alpha$$

also:

$$\beta + \alpha_1 + 180^0 - \alpha = 360^0$$

oder:

$$\beta + \alpha_1 - \alpha = 180^0$$

Gehen wir nun zum nächsten über, so haben wir:

$$\beta_1 + \alpha_2 + \sphericalangle mCB = 360^0$$

oder da:

$$\sphericalangle mCB = 180 - \alpha_1$$

auch:

$$\beta_1 + \alpha_2 - \alpha_1 = 180^0$$

Diese Formel gilt ganz allgemein. Wir haben:

$$\beta_2 + \alpha_3 - \alpha_2 = 180^0$$
$$\beta_3 + \alpha_4 - \alpha_3 = 180^0$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

allgemein:

$$\beta_n + \alpha_{n+1} - \alpha_n = 180^0$$

Stellen wir die Formeln zusammen, so gibt sich:

I. Zur Berechnung des Brechungswinkels aus den Richtungswinkeln die Formel:

$$\beta_n = 180^0 - (\alpha_{n+1} - \alpha_n)$$

II. Zur Berechnung des Richtungswinkels die Formel:

$$\alpha_n = 180^0 - (\beta + \beta_1 + \cdots \beta_{n-1})$$

**Bemerkung.** Nehmen wir an, dass $\alpha = 0$ ist, d. h. dass die Strecke $AB$ die die Richtung angebende ist, dann wird:

$$B + \alpha_1 = 180^0$$

also:

$$\alpha_1 = 180^0 - \beta$$

demnach:

$$\alpha_2 = 180^0 - \beta_1 + \alpha_1$$

oder:

$$\alpha_2 = 2 \cdot 180^0 - (\beta + \beta_1)$$

analog erhalten wir:

$$\alpha_3 = 3 \cdot 180^0 - (\beta + \beta_1 + \beta_2)$$

und allgemein:

$$\alpha_n = n \cdot 880^0 - (\beta + \beta_1 + \cdots \beta_{n-1})$$

Wir sind also im stande aus den Brechungswinkeln immer die Richtungswinkel zu berechnen.

---

**Frage 16.** Was versteht man unter der Horizontal- und was unter der Vertikalprojektion einer Strecke?

**Antwort.** Das Produkt aus der Streckenlänge in den Cosinus des Richtungswinkels wird die Horizontalprojektion genannt. Analog wird das Produkt der Streckenlänge in den Sinus des Richtungswinkels die Vertikalprojektion genannt (vergl. Erkl. 2).

Beide wollen wir allgemein zugeordnete Projektionen nennen.

**Erkl. 2.** Sei $a$ die Strecke, sowie $\alpha$ der Richtungswinkel, so wird:

$$a \cos \alpha = s$$

die Horizontalprojektion:

$$a \sin \alpha = s'$$

die Vertikalprojektion darstellen.

**Frage 17.** Welche Beziehungen bestehen zwischen der Strecke und ihren Projektionen?

**Erkl. 3.** Wir haben:

$$s'^2 + s^2 = a \sin^2\alpha + a^2 \cos^2\alpha$$
$$= a^2 (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$$

Nun ist aber nach Kleyers Goniometrie Formel 18):

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

also:

$$s'^2 + s^2 = a^2$$

w. z. b. w. Aehnlich haben wir:

$$\frac{s'}{s} = \frac{a \sin\alpha}{a \cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$$

Nach Kleyers Goniometrie, Formel 27).

**Erkl. 4.** Man sieht es am besten ein, wenn man sich die Projektionen einer Strecke durch Koordinaten (siehe Lehrbuch der analytischen Geometrie von Cranz) ausgedrückt denkt.

**Antwort.** Wir fanden für die Horizontalprojektion den Ausdruck:

$$s = a \cos\alpha$$

und für die Vertikalprojektion:

$$s' = a \sin\alpha$$

aus diesen beiden Gleichungen folgt (vergl. Erkl. 3):

$$s^2 + s'^2 = a^2$$

ferner:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{s'}{s}$$

Sind also die beiden Projektionen gegeben, so lässt sich nicht nur die Länge der Strecke, sondern auch ihr Richtungswinkel bestimmen. Wir sagen, dass durch die Angabe der beiden Projektionen die Strecke der Länge und Richtung nach gegeben ist, nicht aber dem Orte nach (vergl. Erkl. 4).

## 2. Die Beziehung der Projektionen zu der Koordinatengeometrie.

**Frage 18.** Wodurch ist eine Strecke bestimmt?

**Erkl. 5.** Soll die Strecke auch der Richtung im obigen Sinne nach bestimmt sein, so muss man angeben, welcher von den Endpunkten der Anfangs- und welcher der Endpunkt ist.

**Antwort.** Eine Strecke ist eindeutig der Grösse und Richtung nach durch ihre Endpunkte bestimmt (vergleiche Erkl. 5).

**Frage 19.** Was versteht man unter den Koordinaten eines Punktes?

**Bemerkung.** Man vergleiche: H. Cranz, Lehrbuch der analytischen Geometrie der Ebene. Daselbst findet man die nähere Erörterung der hier nur nebenbei gebrauchten Begriffe.

**Antwort.** Unter den Koordinaten eines Punktes versteht man die Angabe gewisser geometrischer Gebilde, welche den Ort eines Punktes im Raume eindeutig bestimmen.

Da der Raum drei Dimensionen hat, so werden im allgemeinen drei Grössen nötig sein, um die Lage eines Punktes zu charakterisieren. Für die Ebene, die von zwei Dimensionen ist, genügen zwei Grössen.

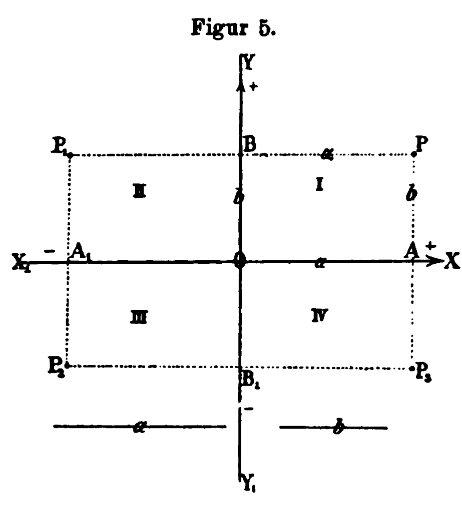
**Frage 20.** Welche Art der Koordinaten kommt in der Polygonometrie zur Verwendung?

**Antwort.** In der Polygonometrie werden fast ausschliesslich die rechtwinkligen Koordinaten der Ebene gebraucht.

**Frage 21.** Welches ist das Wesen der rechtwinkligen ebenen Koordinaten?

**Antwort.** Das Wesen der rechtwinkligen ebenen Koordinaten besteht im folgenden:

Figur 5.




Wir nehmen in einer Ebene zwei Senkrechte Achsen an ($XX_1$, $YY_1$ in der Fig. 5), die sich im Punkte $O$ schneiden. Die Richtung von links nach rechts sei für $XX_1$ die positive, analog der Richtung von unten hinauf für $YY_1$. Dann kann die Lage irgend eines Punktes der Ebene dadurch dargestellt werden, dass wir seine Entfernung von der $X$-Achse (Ordinate $y$ genannt) und seine Entfernung von der $Y$-Achse (Abscisse $x$ genannt) angeben. Diese Grössen sind positiv oder negativ in gleicher Weise wie die Achsen selbst (vergl. Erkl. 6).

**Erkl. 6.** In der Figur 5 ist für den Punkt:

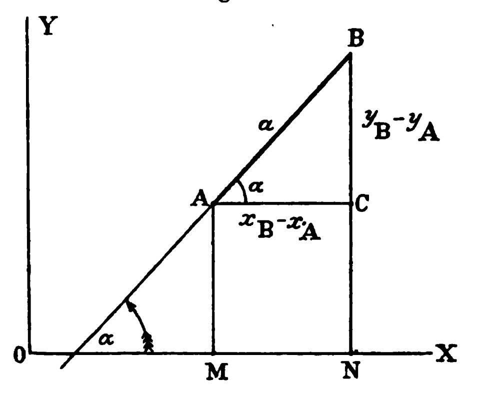
| | | |
|---|---|---|
| $P$ | $x=+a$ | $y=+b$ |
| $P_1$ | $x=-a$ | $y=+b$ |
| $P_2$ | $x=-a$ | $y=-b$ |
| $P_3$ | $x=+a$ | $y=-b$ |

Man sagt auch: $P$ liegt im ersten, $P_1$ im zweiten, $P_2$ im dritten, $P_3$ im vierten Quadranten.

---

**Frage 22.** In welcher Beziehung stehen die Koordinaten zweier Endpunkte einer Strecke zu dieser selbst?

Figur 6.




**Erkl. 7.** Im rechtwinkligen Dreieck $ABC$ haben wir:

$$\operatorname{tg} \sphericalangle BAC = \operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

ferner ist:

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{y_B - y_A}{a}$$

und

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{x_B - x^A}{a}$$

**Antwort.** Seien:

$$x_A \quad y_A$$
$$x_B \quad y_B$$

die Koordinaten der Endpunkte $AB$ einer Strecke (vergl. Figur 6), welche mit der positiven Richtung der Abscissenachse $X$ einen Winkel $\alpha$ einschliesst. Dann ist:

$$x_A = OM \quad x_B = ON$$

also:

$$MN = AC = ON - OM = x_B - x_A$$

analog ist:

$$y_A = MA = NC$$
$$y_B = BN$$

also:

$$BC = BN - NC = y_B - y_A$$

wir haben also (vergl. Erkl. 7):

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

und wenn die Länge $AB = a$ gesetzt wird:

$$a = \frac{y_B - y_A}{\sin\alpha} = \frac{x_B - x_A}{\cos\alpha}$$

also auch:

$$y_B = y_A + a\sin\alpha$$
$$x_B = x_A + a\cos\alpha$$

oder:

$$y_B - y_A = a \sin \alpha$$
$$x_B - x_A = a \cos \alpha$$

Durch Quadrieren dieser Gleichungen ergibt sich:

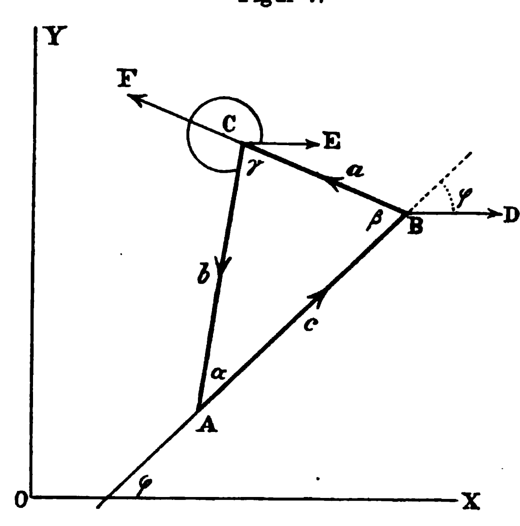
$$a^2 = (y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2$$

**Bemerkung.** Unter $\alpha$ wird immer der Winkel zwischen der Richtung der Strecke und der positiven $x$-Richtung verstanden, d. h. $\alpha$ wird von 0 bis 360° gezählt von der positiven $X$-Achse angefangen über die positive $Y$-Achse. Wir können demnach auch sagen, die Ordinatendifferenz $x_B - x_A$ ist die Horizontalprojektion der Strecke $a$ und die Abscissendifferenz $y_A - y_B$ ist die Vertikalprojektion der Strecke $a$.

---

**Frage 23.** Wie wird ein gegebenes Dreieck in ein Koordinatendreieck verwandelt?

Figur 7.




**Erkl. 8.** Die Seite $BC$ schliesst mit der $+x$-Richtung den Winkel $DBC$ ein, also den Winkel:

$$\varphi + (180^0 - \beta)$$

nun ist:

$$\sin(\varphi + 180^0 - \beta) = -\sin(\varphi - \beta)$$
$$\cos(\varphi + 180^0 - \beta) = -\cos(\varphi - \beta)$$

**Bemerkung.** Wie man $x_A\, y_A$ und $\varphi$ bestimmt, hängt von der jeweiligen Aufgabe ab. In der Geodäsie werden z. B. die Koordinaten von $A$ durch das Pothenotsche Problem bestimmt und damit auch der Winkel $\varphi$, der in der Geodäsie das geodätische Azimut genannt wird. Die Grössen:

$$\alpha \quad \beta \quad \gamma$$
$$a \quad b \quad c$$

werden in der Regel direkt gemessen.

**Antwort.** Um ein durch alle Seiten und Winkel gegebenes Dreieck in ein Koordinatendreieck zu verwandeln (d. h. um die Koordinaten seiner Endpunkte angeben zu können), verfährt man wie folgt (vergleiche Figur 7).

Zunächst bestimmt man sich den Winkel $\varphi$, den eine Seite mit der positiven Richtung der gegebenen Abscissenachse einschliesst. Sodann müssen die Koordinaten eines Eckpunktes gegeben sein, also etwa von $A$, so dass wir als gegeben zu betrachten haben:

$$x_A \quad y_A \quad \varphi$$
$$a \quad b \quad c$$
$$\alpha \quad \beta \quad \gamma$$

Wir haben ferner nach Frage 22:

$$x_B = x_A + c \cos \varphi$$
$$y_B = y_A + c \sin \varphi$$

weiter (vergl. Erkl. 8):

$$x_c = x_B - a \cos(\varphi - \beta)$$
$$y_c = y_B - a \sin(\varphi - \beta)$$

also: $x_c = x_A + c \cos \varphi - a \cos(\varphi - \beta)$

$$y_c = y_B + c \sin \varphi - a \sin(\varphi - \beta)$$

Damit sind die fehlenden Koordinaten bestimmt.

Wir bemerken noch, dass wir vom Punkt $C$ wieder auf den Punkt $A$ kommen können. Es ist:

$$a_A = x_c + b \cos ∢ECA$$

Nun ist aber:

$$∢ECA = ECF + FCA$$

Da aber:

$$∢ECF = DBC = \varphi - \beta + 180^0$$

so wird:

$$∢ECA = (\varphi - \beta + 180^0) + (180^0 - \gamma)$$

oder:

$$∢ECA = 2 \cdot 180^0 + \varphi - \beta - \gamma$$

da nun:

$$\sin(2 \cdot 180^0 + \varphi - \beta - \gamma) = \sin(\varphi - \beta - \gamma)$$
$$\cos(2 \cdot 180^0 + \varphi - \beta - \gamma) = \cos(\varphi - \beta - \gamma)$$

**Erkl. 9.** Wir haben:

$$x_A = x_c + b\cos(\varphi - \beta - \gamma)$$
$$= x_A + c\cos\varphi - a\cos(\varphi - \beta)$$
$$+ b\cos(\varphi - \beta - \gamma)$$

hier hebt sich $x_A$ beiderseits auf und wir erhalten:

$$0 = c\cos\varphi - a\cos(\varphi - \beta) + b\cos(\varphi - \beta - \gamma)$$

**Erkl. 10.** Beachtet man, dass:

$$\beta + \gamma = 180^0 - \alpha$$

und

$$\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha$$

so folgt aus der zweiten Formel:

$$a\sin\beta - b\sin\alpha = 0$$

oder:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

das ist aber der bekannte Sinussatz. Der erste Satz gibt sodann:

$$c = a\cos\beta + b\sin\alpha$$

also den Cosinussatz.

so folgt:

$$x_A = x_c + b\cos(\varphi - \beta - \gamma)$$
$$y_A = y_c + b\sin(\varphi - \beta - \gamma)$$

Setzen wir den für $x_c$ und $y_c$ früher gefundenen Ausdruck ein, so wird (vergleiche Erkl. 9):

$$0 = c\cos\varphi - a\cos(\varphi - \beta) + b\cos(\varphi - \beta - \gamma)$$

und analog:

$$0 = c\sin\varphi - a\sin(\varphi - \beta) + b\sin(\varphi - \beta - \gamma)$$

Diese Formeln werden besonders einfach wenn:

$$\varphi = 0$$

wird. Dann ist:

$$c - a\cos\beta + b\cos(\beta + \gamma) = 0$$
$$a\sin\beta - b\sin(\beta + \gamma) = 0$$

Wir sehen, dass wir so zu Sätzen über das Dreieck gelangt sind, welche das Dreieck bestimmen, wenn noch die bekannte Relation:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0$$

hinzugefügt wird (vergleiche Erkl. 10).

Analoge Sätze lassen sich offenbar für jedes geschlossene Vieleck entwickeln.

---

**Frage 24.** Wie lautet der Identitätssatz der Koordinaten?

**Antwort.** Es seien:

$$y_A\, y_B\, y_c \cdots y_M\, y_N$$
$$x_A\, x_B\, x_c \cdots x_M\, x_N$$

gegebene Koordinaten, dann ist offenbar:

$$(x_A - x_B) + (x_B - x_c) + (x_c - x_D) + \cdots (x_M - x_N) + (x_N - x_A) = 0$$

analog wird:

$$(y_A - y_B) + (y_B - y_c) + (y_c - y_D) + \cdots (y_M - y_N) + (y_N - y_A) = 0$$

Setzen wir nun die Länge zwischen den Punkten:

$$AB = r_{AB}$$

sowie den Winkel, welchen $AD$ mit der $x$-Richtung einschliesst, mit:

$$\varphi_{AB}$$

so folgt nach Frage 22:

$$r_{AB}\cos\varphi_{AB} + r_{BC}\cos\varphi_{BC} + \cdots + r_{MN}\cos\varphi_{MN} + r_{NA}\cos\varphi_{NA} = 0$$
$$r_{AB}\sin\varphi_{AB} + r_{BC}\sin\varphi_{BC} + \cdots + r_{MN}\sin\varphi_{MN} + r_{NA}\sin\varphi_{NA} = 0$$

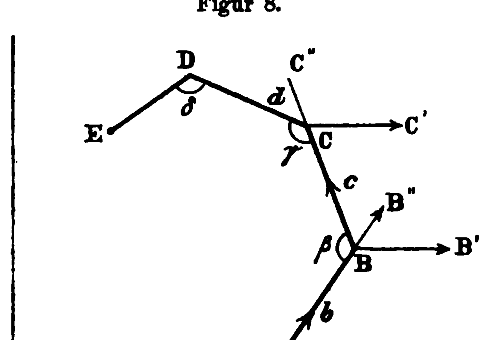
Diese sind die zwei Identitätssätze der Koordinatendifferenzen und im Vereine mit der für jedes Vieleck geltenden Relation für die Winkelsumme zugleich die **drei Hauptsätze der Polygonometrie.**

---

**Frage 25.** In welcher Form werden die Identitätssätze angewendet?

**Antwort.** Für die Anwendung der Identitätssätze wählt man gewöhnlich eine spezielle

Figur 8.




**Erkl. 11.** Es ist:

$$\begin{aligned} \varphi_{CD} &= C'CD = C'CC'' + C''CD \\ &= B'BC + 180^0 - BCD \\ &= \varphi_{BC} + 180^0 - \gamma \\ &= 2\cdot 180^0 - (\alpha+\beta) + 180^0 - \gamma \\ &= 3\cdot 180^0 - (\alpha+\beta+\gamma) \end{aligned}$$

**Erkl. 12.** Nach Kleyers Goniometrie, Formel 5) gilt allgemein:

$$\begin{aligned} \sin(2r\cdot 180^0 - n) &= -\sin n \\ \cos(2r\cdot 180^0 - n) &= +\cos n \\ \sin[(2r+1)\,180^0 - n] &= +\sin n \\ \cos[(2r+1)\,180^0 - n] &= -\cos n \end{aligned}$$

Form der Koordinaten. Man verlegt die eine Seite $OA = a$ in die Richtung der positiven $X$-Achse.

Seien sodann $a, b, c, d \cdots$ Seiten, $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ Innenwinkel eines Polygons, so hat man:

$$\begin{aligned} \varphi_{OA} &= 0 \\ \sphericalangle XAB = \varphi_{AB} &= 180^0 - \alpha \\ \sphericalangle B'BC = \varphi_{BC} &= B'BB'' + B''BC \\ &= BAX + 180^0 - (ABC) \\ &= (180^0 - \alpha) + 180^0 - \beta \end{aligned}$$

also:

$$\varphi_{BC} = 2\cdot 180^0 - (\alpha+\beta)$$

analog ist (vergleiche Erkl. 11):

$$\varphi_{CD} = 3\cdot 180^0 - (\alpha+\beta+\gamma)$$

ferner würden wir erhalten:

$$\varphi_{DE} = 4\cdot 180^0 - (\alpha+\beta+\gamma+\delta)$$

Nun ist weiter:

$$\begin{aligned} r_{OA} &= a \\ r_{AB} &= b \\ r_{AC} &= c \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

so dass wir also haben:

$$\text{II}' \ldots\ a + b\cos(180^0 - \alpha) + c\cos[2\cdot 180^0 - (\alpha+\beta)] + d\cos[3\cdot 180^0 - (\alpha+\beta+\gamma)] + e\cos[4\cdot 180^0 - (\alpha+\beta+\gamma+\delta)] + \cdots = 0$$

$$\text{III}' \ldots\ b\sin(180^0 - \alpha) + c\sin[2\cdot 180^0 - (\alpha+\beta)] + d\sin[3\cdot 180^0 - (\alpha+\beta+\gamma)] + e\sin[4\cdot 180^0 - (\alpha+\beta+\gamma+\delta)] + \cdots = 0$$

Diese Sätze lassen sich noch anders schreiben, es ist (vergl. Erkl. 12):

$$\begin{aligned} \sin(180^0 - n) &= \sin n \\ \cos(180^0 - n) &= -\cos n \\ \sin(2\cdot 180^0 - n) &= -\sin n \\ \cos(2\cdot 180^0 - n) &= \cos n \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

demnach wird:

$$\text{II} \ldots\ a - b\cos\alpha + c\cos(\alpha+\beta) - d\cos(\alpha+\beta+\gamma) + e\cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta) + \cdots = 0$$

$$\text{III} \ldots\ b\sin\alpha - c\sin(\alpha+\beta) + d\sin(\alpha+\beta+\gamma) - e\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta) + \cdots = 0$$

Diese und die vorstehenden Formeln, deren Bildungsgesetz unmittelbar ersichtlich ist, sind die **Grundformeln der Polygonometrie.** Wir werden sie in der Folge einfach mit

II II' III III'

bezeichnen.

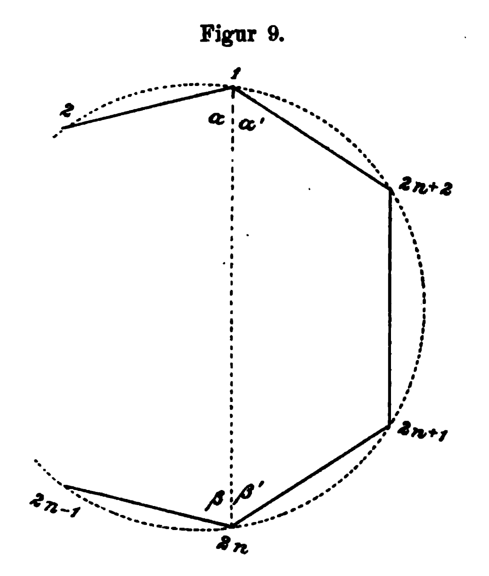
## 3. In und um einen Kreis beschriebene Vielecke.

**Frage 26.** Wann ist ein Vieleck in einem Kreise eingeschrieben?

**Antwort.** Sind alle Seiten eines Vielecks zugleich Sehnen eines und desselben Kreises, so ist dieses Vieleck einem Kreise eingeschrieben.

**Frage 27.** Welche charakteristische Eigenschaft besitzt ein solches Vieleck?

Figur 9.




**Antwort.** Bezeichnet man in einem Vieleck von gerader Seitenzahl die Winkel der Reihe nach mit 1, 2, 3, 4 ··· $2n$, so ist die Summe der durch ungerade Zahlen ausgedrückten Winkel gleich der Summe der durch gerade Zahl gegebenen, also:

$$1+3+5+\cdot\cdot(2n-1)=2+4+6+\cdot\cdot(2n)$$

Um dieses zu beweisen nehmen wir an, der Satz gelte für ein $2n$-Eck.

Sodann schneiden wir vom $(2n+2)$-Eck durch die Diagonale $(1,2n)$ (vergl. Fig. 9) ein $2n$-Eck ab. Für dieses gilt der Satz, also haben wir:

$$\alpha+3+\cdot\cdot(2n-1)=\beta+2+4+\cdot\cdot(2n-2)$$

Nun ist aber das Viereck $(1,\ 2n+2,\ 2n+1,\ 2n)$ ein Kreisviereck, für dieses gilt (vergl. Erkl. 13) der Satz:

$$\alpha'+(2n+1)=\beta'+(2n+2)$$

Addiert man diese Gleichung zu der vorhergehenden und beachtet, dass:

$$\alpha+\alpha'=1$$
$$\beta+\beta'=2n$$

so folgt:

$$1+3+\cdots(2n+1)=2+4+\cdots(2n+2)$$

Es gilt also der Satz für ein $(2n+2)$-Eck, wenn er für ein $2n$-Eck gilt. Nun gilt er aber für das Viereck, also auch für das Sechseck, Achteck etc., d. h. allgemein für ein $2n$-Eck (vergl. Erkl. 14).

**Erkl. 13.** Ein planimetrischer Satz lautet: Die Summe je zwei gegenüber liegender Winkel in einem Kreisviereck beträgt 180°. Da nun die Summe aller Winkel im Viereck 2·180° beträgt, so hat man für ein Kreisviereck den Satz:

$$1+3=2+4$$

**Erkl. 14.** Diese Schlussweise heisst der Schluss von $n$ auf $n+1$.

---

**Frage 28.** Wie ergibt sich ein analoger Satz für ein Vieleck von ungerader Seitenzahl?

**Antwort.** Hat man ein Vieleck von ungerader Seitenzahl, etwa $2n-1$, so ziehe man an eine Ecke etwa $2n-1$ die Kreistangente (vergleiche Figur 10) dann gilt der Satz:

$$1+3+5+\cdots+2n-3+n'$$
$$=2+4+6+\cdots+2n-2+m'$$

Denn verbindet man 1 mit $(2n-2)$, so hat man ein $2n-2$-Eck, für dieses gilt nach vorhergehender Frage der Satz:

$$\alpha+3+\cdots 2n-3=\beta+2+\cdots 2n-4$$

Zieht man in $(2n-1)$ die Tangente $T$, so wird (vergleiche Erkl. 15):

$$n=\alpha'$$
$$m=\beta'$$

also da (vergl. Erkl. 16):

$$n'+n=90^0$$
$$m'+m=90^0$$

**Erkl. 15.** Ein planimetrischer Satz lautet: Der Peripheriewinkel $(\alpha')$ ist gleich demjenigen Winkel $(n)$ der die zu ihm gehörige Sehne $(2n-2,\ 2n-1)$ mit der Tangente $(T)$ an einem Endpunkte $(2n-1)$ hat.

**Erkl. 16.** Ein planimetrischer Satz lautet: Die Tangente $(T)$ steht auf dem Radius des Kreises $(0,\ 2n-1)$ senkrecht.

Figur 10.

auch

$$n' + \alpha' = 90^0$$
$$m' + \beta' = 90^0$$

woraus

$$n' + \alpha' = m' + \beta$$

folgt. Addiert man diesen Satz zum obigen und beachtet, dass:

$$\alpha' + \alpha = 1$$
$$\beta' + \beta = 2n - 2$$

so folgt:

$$1 + 3 + 5 + \cdots 2n - 3 + n'$$
$$= 2 + 4 + 6 + \cdots 2n - 2 + m'$$

---

**Frage 29.** Welche Eigentümlichkeit zeigt ein dem Kreise umschriebenes $2n$-Eck?

**Erkl. 17.** Der Beweis wird genau so geführt wie beim Viereck in Sachs, Lehrbuch der Planimetrie, worauf hiemit verwiesen werden mag.

**Antwort.** Für ein dem Kreise umbeschriebenes $2n$-Eck (d. h. ein $2n$-Eck, dessen Seiten Tangenten an einem und demselben Kreis sind) gilt der Satz:

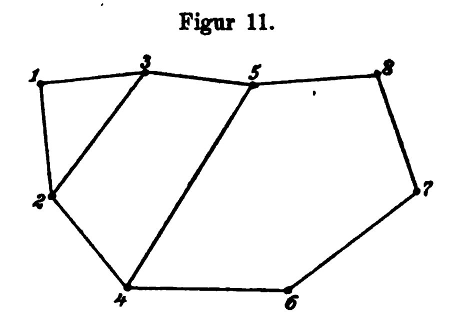
Die Summe der Längen aus der zweiten, vierten $\cdots$ $2n$ ten Seite ist gleich der Summe der Längen aus der ersten, dritten $\cdots$ $2n - 1$ Seite (vergl. Erkl. 17).

---

## 4. Verschiedene Sätze über Polygone.

**Frage 30.** Wie lautet der Satz von Cauchy über eine Vieleckteilung?

Figur 11.




**Antwort.** Man habe ein Netz von $a$ Dreiecken, $b$ Vierecken, $c$ Fünfecken etc. in der Ebene.

Die Anzahl der Verbindungslinien sei $K$, die Anzahl der Punkte sei $E$, die Zahl der Einzelfiguren sei $S$, so ist:

$$E + S = K + 1$$

(vergleiche Erkl. 18).

Sei $E'$ und $K'$ die Zahl der am Umfange der Figur liegenden Punkte und Seiten (vergleiche Erkl. 19) und $E''$, $K''$ die Zahl der im Innern, so ist offenbar:

$$E = E' + E''$$
$$K = K' + K''$$

und auch:

$$K' = E'$$

weil ein $n$-Eck $n$ Seiten hat.

**Erkl. 18.** Hat man ein Dreieck, Viereck und Fünfeck wie in der Figur 11 angedeutet, so hat man:

$$S = 3$$

d. h. (123) (2345) (45678)

ferner:

$$E = 8$$

nämlich:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

endlich:

$$K = 10$$

und zwar:

13, 12, 23, 24, 4, 5, 35
46, 67, 78, 85

**Erkl. 19.** Also ist in der Figur 11:

$$E' = 8$$
$$K' = 8$$

denn 32 und 45 liegen im Innern.

**Erkl. 20.** Denn es ist:

$$a + 2b + 3c + \cdots = 2E + K' - 2$$
$$a + b + c + \cdots = S$$

also:

$$2a + 3b + 4c + \cdots = 2E + K' - 2 + S$$

**Erkl. 21.** Wir haben:

$$E = E' + E''$$

also:

$$E'' = E - E'$$

und da:

$$E' = K'$$

auch:

$$E'' = E - K'$$

Dann wird:

$$2E'' + K' - 2 + S = 2(E - K') + K' - 2 + S'$$
$$= 2E - K' - 2 + S = K + K'' - S$$

oder:

$$2(E - 1 + S) = K + K' + K''$$

da aber:

$$K' + K'' = K$$

auch:

$$2(E - 1 + S) = 2K$$

oder:

$$E - 1 + S = K$$

Man hat ferner:

$$S = a + b + c + \cdots$$

Wir haben also:

$a$ Dreiecke $= 3a$ Seiten
$b$ Vierecke $= 4b$ Seiten etc.

also:

$$(S) = 3a + 4b = 5c + \cdots$$

dabei wurden die inneren Seiten doppelt gezählt, also ist:

$$(S) = K' + 2K'' = K' + K'' + K''$$

oder:

$$(S) = K + K''$$

also ist:

$$2a + 3b + 4c = (3a + 4b + 5c + \cdots)$$
$$- (a + b + c + \cdots)$$
$$= (S) - S = K + K'' - S$$

Bilden wir nun die Summe aller Winkel. Diese ist gleich:

$$(a + 2b + 3c + \cdots) \cdot 180^0$$

Nun ist die Summe am Umfange:

$$= (K' - 2) \cdot 180^0$$

und die Summe im Innern:

$$= 2E'' \cdot 180^0$$

denn um jeden Punkt im Innern liegen $360^0$, also haben wir:

$$a + 2b + 3c + \cdots = 2E'' + K' - 2$$

demnach (vergleiche Erkl. 20):

$$2a + 3b + 4c + \cdots = 2E'' + K' - 2 + S$$

Wir fanden aber oben:

$$2a + 3b + 4c + \cdots = K + K'' - S$$

also wird:

$$2E'' + K' - 2 + S = K + K'' - S'$$

woraus weiter (vergleiche Erkl. 21):

$$E + S = K + 1$$

folgt, was zu beweisen war.

Dieser Satz kann auch auf Polygone ausgedehnt werden, die nicht in einer Ebene liegen.

---

**Frage 31.** Wieviel Verbindungslinien können zwischen $n$ Punkten gezogen werden?

**Antwort.** Zwischen $n$ Punkten können

$$\frac{n}{2}(n - 1)$$

Verbindungslinien gezogen werden, denn zwischen drei Punkten sind nur drei möglich. Kommt ein vierter dazu, so kann er mit jedem der vorhandenen Punkte verbunden werden, wir haben also:

$$3 + 3 = 6$$

**Erkl. 22.** Wir haben

für 2 Punkte 1

„ 3 „ $1+2=3$

„ 4 „ $3+3=6=1+2+3$

„ 5 „ $6+4=1+2+3+4=10$

„ 6 „ $10+5=1+2+3+4+5$

also für $n$ Punkte:

$$S_n = 1+2+3+4 \cdots + (n-1)$$

Die Summe dieser Reihe ist aber:

$$S_n = \frac{n}{2}(n-1)$$

Um dieses einzusehen, nehme man $n = 100$, so wird man die Zahlen zu zwei Gruppen zusammenziehen können:

$$0+99=99$$
$$1+98=99$$
$$2+97=99$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$
$$49+50=99$$

also wird:

$$1+2+3+\cdots+99 = 50\cdot 99 = \frac{100}{2}(100-1)$$

kommt noch einer, so kann er wieder mit jedem der vier verbunden werden, wir haben also:

$$6+4=10$$

bei einem weiteren:

$$10+5 \text{ u. s. f.}$$

allgemein ein $n$ ter (vergleiche Erkl. 22):

$$S_{n-1} + n - 1 = S_n$$

wo $S_n$ die Zahl der Verbindungen für $n$ Punkte bezeichnet.

Daraus folgt:

$$S_n - S_{n-1} = n - 1$$

also (vergleiche Erkl. 22):

$$S_n = \frac{n}{2}(n-1)$$

---

**Frage 32.** Wie findet man die allgemeine Formel für den Flächeninhalt eines Polygons?

**Antwort.** Um eine allgemeine Formel für den Flächeninhalt eines Polygons zu finden, betrachten wir zunächst ein Viereck mit den Winkeln:

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$$

und ziehen die Diagonale $\alpha\gamma$, dann ist:

$$2J = ab\sin\beta + cd\sin\delta$$

Man hat aber (vergleiche Erkl. 23):

$$0 = b\sin\gamma + a\sin(\gamma+\beta) + d\sin(\alpha+\beta+\gamma) = b\sin\gamma + a\sin(\gamma+\beta) - d\sin\delta$$

also wenn diese Gleichung mit $c$ multipliziert wird:

$$cd\sin\delta = bc\sin\gamma + ac\sin(\gamma+\beta)$$

so dass also:

$$2J = ab\sin\beta \quad + bc\sin\gamma \quad + ac\sin(\beta+\gamma)$$

wird.

Analog findet man für ein Fünfeck mit den Winkeln:

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon$$

wenn man die Diagonale $\alpha\delta$ zieht:

$$2J = ab\sin\beta + ac\sin(\beta+\gamma) + bc\sin\gamma + de\sin\varepsilon$$

Nun ist aber:

$$0 = c\sin\delta + b\sin(\delta+\gamma) + a\sin(\delta+\gamma+\beta) - e\sin\varepsilon$$

also wenn diese Gleichung mit $d$ multipliziert wird und man sie in die Vorhergehende einsetzt:

$$2J = ab\sin\beta \quad + bc\sin\gamma \quad + cd\sin\delta$$
$$ac\sin(\beta+\gamma) \quad + bd\sin(\gamma+\delta)$$
$$ad\sin(\beta+\gamma+\delta)$$

**Erkl. 23.** Es ist:

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = 360^0$$

also:

$$\alpha+\beta+\gamma = 360^0 - \delta$$

demnach:

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma) = \sin(360^0-\delta) = -\sin\delta$$

**Bemerkung.** Man wird aber wohl selten nach diesen Formeln rechnen. Wir werden später viel einfachere Arten der Berechnung kennen lernen an einzelnen Beispielen. Wir haben den nebenstehenden Satz blos darum bewiesen, um die Analogie zu der einfachen Dreiecksformel:

$$2J = ab\sin\gamma$$

herzustellen.

**Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.**

**Der ausführliche Prospekt und das ausführliche Inhaltsverzeichnis der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer" kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung gratis und portofrei bezogen werden.**

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert, um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft.

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

---

☛ Das **vollständige**

**Inhaltsverzeichnis**

**der bis jetzt erschienenen Hefte**

kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

---

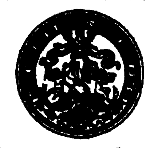
**Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.**

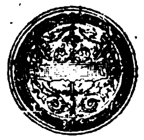
Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

**1305. Heft.**

**Preis des Heftes 25 Pf.**

**Vermessungskunde** (Geodäsie). **Zweiter Teil.** Forts. v. Heft 1304. — Seite 17—32. Mit 15 Figuren.





# Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
**Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten**
erläutert durch
**viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,**
aus allen Zweigen
der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus **allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie**; des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's**; der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
**zum einzig richtigen und erfolgreichen**
**Studium**, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

**Dr. Adolph Kleyer,**
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in **Frankfurt a. M.**
unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

# Vermessungskunde

## (Geodäsie).

**Zweiter Teil.**

Nach **System Kleyer** bearbeitet von **Dr. W. Láska.**

Fortsetzung von Heft 1304. — Seite 17—32. Mit 15 Figuren.

**Inhalt:**

Verschiedene Sätze über Polygone. — Aufgaben über das Dreieck und Viereck. — Aufgaben über das Fünfeck und Sechseck. — Ueber die Behandlung schwieriger Probleme. — Fehlertheorie der Polygone.

**Stuttgart 1894.**
Verlag von Julius Maier.

**Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.**

# PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch **alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der **mathematischen** Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die **gehabten Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung zur **Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige Kraft** verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren praktischen Verwertungen und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit **Angabe der Namen** verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der **Verfasser, Dr. Kleyer,** Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren **Erledigung** thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

Das Bildungsgesetz springt sofort in die Augen und man hat allgemein für ein $n$-Eck:

$$\begin{aligned}2J = &ab\sin\beta &&+ bc\sin\gamma &&+\cdots+ mn\sin\nu\\ &ac\sin(\beta+\gamma) &&+ bc\sin(\gamma+\delta)\\ &ad\sin(\beta+\gamma+\delta) &&+\\ &\vdots &&\vdots\\ &\vdots &&+ bn\sin(\gamma+\delta+\varepsilon+\cdots+\nu)\\ &an\sin(\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\cdots+\nu)\end{aligned}$$

Wollte man den Beweis allgemein führen, so kann dieses durch den Schluss von $n$ auf $n+1$ geschehen.

---

**Frage 33.** Was versteht man unter dem Punkt der mittleren Entfernungen?

**Antwort.** Unter dem Punkt der mittleren Entfernungen versteht man jenen Punkt, dessen Koordinaten gegeben sind durch:

$$x = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n)$$

$$y = \frac{1}{n}(y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_n)$$

Legt man durch diesen Punkt die Koordinatenachsen, so werden die Koordinaten sein:

$$\xi_1\ \xi_2 \cdots \xi_n$$

$$\eta_1\ \eta_2 \cdots \eta_n$$

und es wird:

$$\xi_1 + \xi_2 + \cdots \xi_n = 0$$

$$\eta_1 + \eta_2 + \cdots \eta_n = 0$$

Führt man Polarkoordinaten ein durch die Gleichungen:

$$\xi_k = \varrho_k \cos\alpha_k$$

$$\eta_k = \varrho_k \sin\alpha_k$$

für $k$ nacheinander:

$$1,\ 2,\ 3 \cdots n$$

gesetzt, so hat man:

$$\varrho_1\cos\alpha_1 + \varrho_2\cos\alpha_2 + \cdots \varrho_n\cos\alpha_n = 0$$

$$\varrho_1\sin\alpha_1 + \varrho_2\sin\alpha_2 + \cdots \varrho_n\sin\alpha_n = 0$$

Zieht man nun von irgend einem Punkt, der vorher durch den Punkt der mittleren Entfernungen gehenden Achse nach allen Punkten Gerade:

$$\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3 \cdots \sigma_n$$

so wird, wenn $a$ die Entfernung dieses Punktes vom Punkt der mittleren Entfernungen bezeichnet:

$$\sigma_1^2 = \varrho_1^2 + a^2 - 2\varrho_1 a\cos\alpha_1$$

$$\sigma_2^2 = \varrho_2^2 + a^2 - 2\varrho_2 a\cos\alpha_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sigma_n^2 = \varrho_n^2 + a^2 - 2\varrho_n a\cos\alpha_n$$

also wenn man addiert:

$$\Sigma\sigma^2 = \Sigma\varrho^2 + \Sigma a^2 - 2a(\varrho_1\cos\alpha_1 + \cdots \varrho_n\cos\alpha_n)$$

Der Ausdruck in der Klammer ist aber gleich Null, ferner ist:

$$\Sigma a^2 = na^2$$

Man hat also:

$$\Sigma\sigma^2 = \Sigma\varrho^2 + na^2$$

d. h. die Summe der Quadrate der Entfernungen irgend eines Punktes in der Ebene eines $n$-Eckes von dessen $n$ Spitzen ist immer gleich der Summe der Quadrate der Ent-

fernungen des Punktes der mittleren Entfernungen von den $n$ Winkelspitzen nebst dem $n$fachen Quadrate der Entfernung des ersten Punktes von dem Punkt der mittleren Entfernungen.

Eine unmittelbare Folge davon ist, dass die Summe der Quadrate der Entfernungen von dem Mittelpunkt ein Minimum ist.

## 5. Aufgaben über das Dreieck und Viereck.

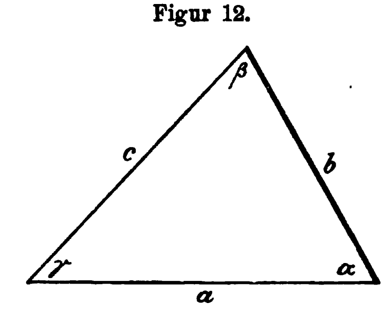
**Aufgabe 1.** Wie lauten die drei Grundgleichungen für das Dreieck?

**Erkl. 24.** Nach Kleyers Goniometrie ist:

$$\cos(180-\alpha) = -\cos\alpha$$

$$\cos(2\cdot 180-\alpha-\beta) = \cos(\alpha+\beta)$$
$$= -\cos[180-(\alpha+\beta)] = -\cos\gamma$$

Figur 12.




**Bemerkung.** Hier möge noch angeführt werden, dass es sich empfiehlt, statt des gewöhnlich angewandten Satzes:

$$a = \sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\beta}$$

(vergl. Figur 12) besser zu rechnen ist nach:

$$a\sin\frac{1}{2}(\alpha-\gamma) = (b+c)\sin\frac{1}{2}\beta$$

$$a\cos\frac{1}{2}(\alpha-\gamma) = (b-c)\cos\frac{1}{2}\beta$$

Man erhält so $a$ und $\alpha-\gamma$, während:

$$\alpha+\gamma = 180^0-\beta$$

Man beachte aber, dass wir hier abweichende Winkelbezeichnung eingeführt haben, um mit unseren polygonometrischen Formeln in Einklang zu bleiben.

**Auflösung.** Zunächst hat man aus I:

$$\alpha+\beta+\gamma = 180^0$$

Dann wird aus II':

$$a+b\cos(180-\alpha)+c\cos(2\cdot 180-\alpha-\beta) = 0$$

oder (vergl. Erkl. 24):

$$a-b\cos\alpha-c\cos\gamma = 0$$

Endlich folgt aus III:

$$b\sin\alpha-c\sin\gamma = 0$$

So dass wir also die drei Gleichungen haben:

$$\alpha+\beta+\gamma = 180^0$$
$$a = b\cos\alpha+c\cos\gamma$$
$$b\sin\alpha = c\sin\gamma$$

Vermittels dieser Gleichungen lassen sich alle Aufgaben über das Dreieck lösen.

Natürlich weicht unsere Bezeichnung von der sonst üblichen ab (vergl. Figur 12).

Die letztere Gleichung:

$$a = b\cos\alpha+c\cos\gamma$$

lässt sich durch eine andere ersetzen. Es ist:

$$a^2 = (b\cos\alpha+c\cos\gamma)^2+0^2$$

Setzt man:

$$0 = (b\sin\alpha-c\sin\gamma)$$

so folgt:

$$a^2 = (b\cos\alpha+c\cos\gamma)^2+(b\sin\alpha-c\sin\gamma)^2$$
$$= b^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)$$
$$+2bc(\cos\alpha\cos\gamma-\sin\alpha\sin\gamma)$$
$$+c^2(\cos^2\gamma+\sin^2\gamma)$$

Da nun:

$$\cos\alpha\cos\gamma-\sin\alpha\sin\gamma = \cos(\alpha+\gamma)$$
$$= \cos(180^0-\beta) = -\cos\beta$$

und

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha = 1$$
$$\cos^2\gamma+\sin^2\gamma = 1$$

so folgt:

$$a^2 = b^2+c^2-2bc\cos\beta$$

das ist aber der bekannte Carnotsche Satz.

---

**Aufgabe 2.** Von einem Punkt $A$ (vergl. Figur 13) wurden bis zum Punkt $D$ die Strecken $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, sowie die Winkel $ABC=\beta$, $BCD=\gamma$ gemessen.

**Auflösung.** Wir berechnen zuerst die Richtungswinkel. Wir haben für den Richtungswinkel von $BC$ gegen $AB$:

Welchen Winkel schliesst $AD$ mit $AB$ ein und wie lang ist die Strecke $AD$?

Figur 13.

$$\alpha = 180^0 - \beta$$

sowie für den Richtungswinkel von $CD$:

$$\alpha' = 2 \cdot 180 - (\beta + \gamma)$$

Bezeichnen wir hierauf die unbekannte Entfernung:

$AD$ mit $x$

sowie ihren Richtungswinkel:

$mAD$ mit $\varphi$

so haben wir:

$$a + b\cos(180^0 - \beta) + c\cos(2 \cdot 180 - \beta - \gamma) + x\cos\varphi = 0$$

sowie:

$$b\sin(180^0 - \beta) + c\sin(2 \cdot 180 - \beta - \gamma) + x\sin\varphi = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen lässt sich $x$ und $\varphi$ leicht berechnen. Zunächst haben wir, wenn wir die zweite durch die erste dividieren:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b\sin(180^0 - \beta) + c\sin(2 \cdot 180 - \beta - \gamma)}{a + b\cos(180^0 - \beta) + c\cos(2 \cdot 180 - \beta - \gamma)}$$

sodann ist:

$$x = -\frac{1}{\sin\varphi}\left[b\sin(180^0 - \beta) + c\sin(2 \cdot 180 - \beta - \gamma)\right]$$

**Bemerkung.** Die vorstehenden Formeln bleiben ihrer Gestalt nach bestehen, wenn der Polygonzug beliebig viele Strecken umfasst. Sie werden vorzugsweise in der Vermessungskunde angewendet.

---

**Aufgabe 3.** In einem Viereck sind drei Seiten und die zwei zwischen diesen liegenden Winkel gegeben, gesucht werden die übrigen Stücke.

Figur 14.

**Erkl. 25.** Man hat:

$$\frac{n}{b} = \frac{\sin(180 - \beta)}{\sin(\alpha + \beta - 180^0)}$$

$$\frac{m}{b} = \frac{\sin(180 - \alpha)}{\sin(\alpha + \beta - 180^0)}$$

**Auflösung.** Man wendet in diesem Falle nicht die allgemeinen Vielecksformeln an, sondern verfährt wie folgt:

Seien (vergl. Figur 14) $a$, $b$, $c$ die gegebenen Seiten, sowie $\alpha$ und $\beta$ die gegebenen Winkel. Sodann bezeichne man die gesuchte Seite mit $x$ und die gesuchten Winkel mit $\varphi$ und $\psi$.

Ergänzt man sich das Viereck zum Dreieck, so lassen sich die Seiten $m$ und $n$ des Ergänzungsdreieckes leicht berechnen (vergl. Erkl. 25).

Sodann hat man im grossen Dreieck:

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{a+n}{c+m}$$

ferner:

$$\varphi + \psi = 180^0 - \mu$$

wobei:

$$\mu = (\alpha + \beta - 180^0)$$

Aus den beiden vorhergehenden Gleichungen lässt sich $\varphi$ und $\psi$ berechnen (vergl. Erkl. 26). Sodann hat man:

**Erkl. 26.** Sei also gegeben:

$$\varphi + \psi = 180^0 - \mu$$

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = k = \frac{a+n}{c+m}$$

Man setze:

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \operatorname{tg} y = k$$

so wird:

$$\frac{\sin\varphi + \sin\psi}{\sin\varphi - \sin\psi} = \frac{\operatorname{tg} y + 1}{\operatorname{tg} y - 1}$$

oder [vergl. Kleyer, Lehrbuch der Goniometrie, Formel 117)]:

$$\frac{\sin\varphi + \sin\psi}{\sin\varphi - \sin\psi} = -\operatorname{tg}(45^0 + y)$$

Nun ist aber nach Kleyer, Lehrbuch der Goniometrie, Formel 188):

$$\frac{\sin\varphi + \sin\psi}{\sin\varphi - \sin\psi} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi+\psi)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi-\psi)}$$

also wird:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi+\psi) = \operatorname{tg}(45^0 + y)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\psi - \varphi)$$

Da aber:

$$\varphi + \psi, \text{ sowie } y$$

gegeben sind, lässt sich aus dieser Gleichung:

$$\varphi - \psi$$

bestimmen.

$$x = (a+n)\frac{\sin\mu}{\sin\varphi}$$

oder:

$$x = (c+m)\frac{\sin\mu}{\sin\psi}$$

Die doppelte Berechnungsart für $x$ kann als Kontrolle dienen.

Die Auflösung nach den allgemeinen Formeln der Polygonometrie würde viel komplizierter ausfallen. Bei einem Viereck empfiehlt sich immer die Ergänzung zu einem Dreieck.

---

**Aufgabe 4.** In einem Vierecke seien alle vier Seiten und ein Winkel $\alpha$ gegeben. Die übrigen Stücke zu finden.

Figur 15.



**Erkl. 27.** Die Gleichung:

$$bc\cos\psi + ad\cos(\mu - \psi) = h$$

wobei:

$$h = \frac{1}{2}(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)$$

kann wie folgt gelöst werden.

**Auflösung.** Man verfährt am bequemsten wie folgt:

Man ziehe die Diagonale $m$ (vergleiche Figur 15), sodann hat man nach dem Carnotschen Satze (vergl. Aufgabe 1 dieses Teiles):

$$b^2 + a^2 - 2ab\cos\alpha = m^2$$

$$d^2 + c^2 - 2dc\cos\varphi = m^2$$

also:

$$b^2 + a^2 - 2ab\cos\alpha = d^2 + c^2 - 2dc\cos\varphi$$

so dass:

$$\cos\varphi = \frac{b^2 + a^2 - (d^2 + c^2) - 2ab\cos\alpha}{2dc}$$

Denkt man sich die zweite Diagonale gezogen und seien $\psi$ und $\chi$ die noch unbekannten Winkel, so hat man:

$$\psi + \chi = 360^0 - (\alpha - \varphi)$$

$$b^2 + c^2 - 2bc\cos\psi = a^2 + d^2 - 2ad\cos\chi$$

also:

$$2(bc\cos\psi + ad\cos\chi) = a^2 + d^2 - (b^2 + c^2)$$

Es ist aber:

$$\chi = 360^0 - a - \varphi - \psi$$

Man hat:

$$\cos(\mu-\psi)=\cos\psi\cos\mu+\sin\psi\sin\mu$$

also wird:

$$(bc+ad\cos\mu)\cos\psi+ad\sin\mu\cdot\sin\psi=h$$

Setzt man:

$$\varrho\sin\Theta=bc+ad\cos\mu$$
$$\varrho\cos\Theta=ad\sin\mu$$

so wird:

$$\varrho\sin(\Theta+\psi)=h$$

oder:

$$\sin(\Theta+\psi)=\frac{h}{\varrho}$$

da aber $\varrho$ und $\Theta$ gegebene Grössen sind, so lässt sich hieraus $\psi$ berechnen.

also wenn:

$$360^0-\alpha-\varphi=\mu$$

gesetzt wird:

$$\chi=\mu-\psi.$$

Daraus folgt:

$$2[bc\cos\psi+ad\cos(\mu-\psi)]=a^2+d^2-(b^2+c^2)$$

aus dieser Formel berechnet sich (vergleiche Erkl. 27) $\psi$, mit diesem ist aber wegen:

$$\chi=\mu-\varphi$$

auch $\chi$ gegeben.

Man kann die Produkte $bc$ etc. auch mit Hilfe einer Quadrattafel bilden. Es ist nämlich:

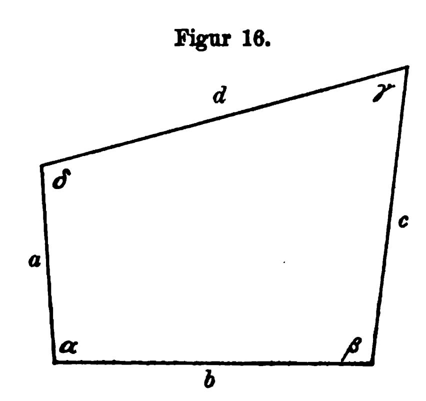
$$bc=\frac{1}{2}[(b+c)^2-b^2-c^2]$$

und analog bilden sich die übrigen Produkte.

---

**Aufgabe 5.** Es seien in dem Viereck $ABCD$ gegeben: drei Seiten $a$, $b$, $c$ und die Winkel an der Seite $d$, d. h. die Winkel $\alpha$ und $\delta$, die übrigen Stücke sind zu berechnen.

Figur 16.




**Bemerkung.** Die Formel:

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{c\sin\delta-a\sin\alpha}{b}$$

logarithmierbar zu machen, setze man:

$$\sin\alpha=c\sin^2\varphi$$
$$\sin\delta=a\sin^2\varphi$$

so wird:

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{ac}{b}(\sin^2\psi-\sin^2\varphi)$$
$$=-\frac{ac}{b}[\sin(\varphi+\psi)\sin(\varphi-\psi)]$$

**Erkl. 28.** Diese Formel wird genau so wie die oben angeführte:

$$0=a\sin\alpha+b\sin(\alpha+\beta)-c\sin\delta$$

abgeleitet.

**Auflösung.** Wir haben zunächst:

$$\sphericalangle\delta=360^0-(\alpha+\beta+\gamma)$$

also:

$$\sin\delta=-\sin(\alpha+\beta+\gamma)$$

Nun ist aber:

$$0=a\sin\alpha+b\sin(\alpha+\beta)+c\sin(\alpha+\beta+\gamma)$$

also auch:

$$0=a\sin\alpha+b\sin(\alpha+\beta)-c\sin\delta$$

so dass also:

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{c\sin\delta-a\sin\alpha}{b}$$

hat man $\alpha+\beta$ hieraus bestimmt, so folgt:

$$\gamma=360^0-(\alpha+\beta)-\delta$$

und auch:

$$\beta=(\alpha+\beta)-\alpha$$

so dass alle vier Winkel gegeben sind. Um $d$ zu berechnen hat man:

$$d=-[a\cos\alpha+b\cos(\alpha+\beta)+c\cos(\alpha+\beta+\gamma)]$$

Man hat aber auch die Formel:

$$d\sin\delta=b\sin\gamma-a\sin(\beta+\gamma)$$

aus welcher:

$$d=\frac{b\sin\gamma-a\sin(\beta+\gamma)}{\sin\delta}$$

folgt (vergl. Erkl. 28).

---

**Aufgabe 6.** Ein Grundstück $ABCD$ besteht aus Ackerfeld $AEGD$ und dem Wiesengelände $EBCG$. Von jenem soll die Fläche:

$$AEKL = f$$

von diesem das Stück:

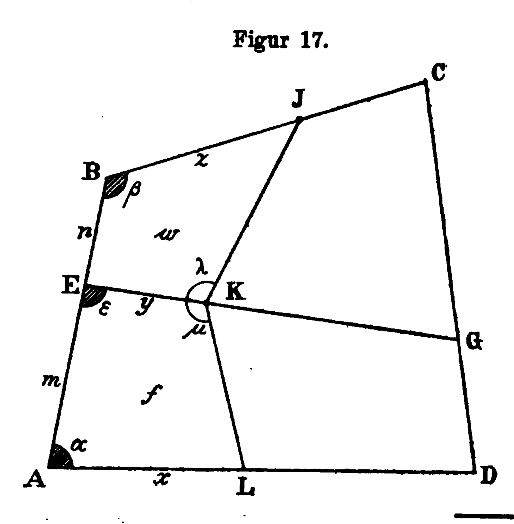
$$EBJK = w$$

abgeschnitten werden und es sollen dazu die Strecken:

$$x = AL$$
$$z = BJ$$

berechnet werden. Dabei soll die Strecke $EK = l$ sein.

Figur 17.




**Auflösung.** Sei:

$$AE = m, \quad EB = n$$

sowie $f$ der Inhalt von $EKBJ$ und $w$ der von $EKAL$, so hat man nach Frage 32:

$$2f = xm \sin\alpha - xl \sin(\alpha + \varepsilon) + ml \sin\varepsilon$$
$$2w = ln \sin\varepsilon - lz \sin(\varepsilon - \beta) + nz \sin\beta$$

Man hat also aus der ersten Gleichung:

$$x = \frac{2f - ml \sin\varepsilon}{m \sin\alpha - l \sin(\alpha + \varepsilon)}$$

Sodann:

$$z = \frac{2w - 2n \sin\varepsilon}{n \sin\beta - l \sin(\varepsilon - \beta)}$$

---

**Aufgabe 7.** Von einem Viereck seien gegeben die vier Seiten $a$, $b$, $c$, $d$ und der Flächeninhalt $J$, man soll die übrigen Stücke berechnen.

**Erkl. 29.** Nach Kleyer, Lehrbuch der Trigonometrie, ist der Inhalt eines Dreiecks gegeben durch das halbe Produkt zweier Seiten in den eingeschlossenen Winkel. Die nebenstehende Vierecksformel ergibt sich, wenn das Viereck durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerlegt gedacht wird.

**Erkl. 30.** Beide Seiten drücken das Quadrat der Diagonale aus.

**Auflösung.** Bezeichnen wir die von den Seiten $ab$, resp. $cd$ eingeschlossenen Winkel mit $\varphi$ und $\psi$, dann ist (vergl. Erkl. 29):

$$2J = ab \sin\varphi + cd \sin\varphi$$

ferner ist nach Erkl. 30:

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos\varphi = c^2 + d^2 - 2cd \cos\psi$$

so dass wir also zur Bestimmung der unbekannten Winkel $\varphi$ und $\psi$ die Gleichungen haben:

$$1) \ldots \begin{cases} ab \sin\varphi + cd \sin\psi = 2J \\ ab \cos\varphi - cd \cos\psi = N \end{cases}$$

wobei:

$$N = a^2 + b^2 - c^2 - d^2$$

gesetzt wurde.

Quadriert man die Gleichungen 1), so folgt:

$$a^2 b^2 \sin^2\varphi + 2abcd \sin\varphi \sin\psi + c^2 d^2 \sin^2\psi = 4J^2$$
$$a^2 b^2 \cos^2\varphi - 2abcd \cos\varphi \cos\psi + c^2 d^2 \cos^2\psi = N^2$$

also, wenn man addiert:

$$2abcd(\sin\varphi \sin\psi - \cos\varphi \cos\psi) = 4J^2 + N^2 - a^2 b^2 - c^2 d^2$$

**Erkl. 31.** Es ist (vergl. Kleyer, Lehrbuch der Goniometrie):

$$\sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\psi = -\cos(\varphi+\psi)$$

**Erkl. 32.** Es ist:

$$ab\sin\varphi + cd\sin(u-\varphi)$$
$$= ab\sin\varphi + cd\sin u\cos\varphi - cd\cos u\sin\varphi$$
$$= \sin\varphi[ab - cd\cos u] + \cos\varphi\cdot cd\sin u$$

**Erkl. 33.** Es ist:

$$\varrho\cos\Theta\sin\varphi + \varrho\sin\Theta\cdot\cos\varphi = 2J$$
$$= \varrho(\cos\Theta\sin\varphi + \cos\varphi\sin\Theta)$$
$$= \varrho\sin(\varphi+\Theta)$$

Daraus (vergl. Erkl. 31):

$$\cos(\varphi+\psi) = \frac{a^2b^2 + c^2d^2 - (4J^2 + N^2)}{4abcd}$$

Ist so $\varphi + \psi$ bestimmt, dann setze man:

$$\varphi + \psi = u$$
$$\psi = u - \varphi$$

worauf die erste der Gl. 1) sich wie folgt schreiben lässt (vergl. Erkl. 32):

$$\sin\varphi(ab - cd\cos u) + \cos\varphi\cdot cd\sin u = 2J$$

Setzt man nun:

$$\varrho\cos\Theta = ab - cd\cos u$$
$$\varrho\sin\Theta = cd\sin u$$

so folgt (vergl. Erkl. 33):

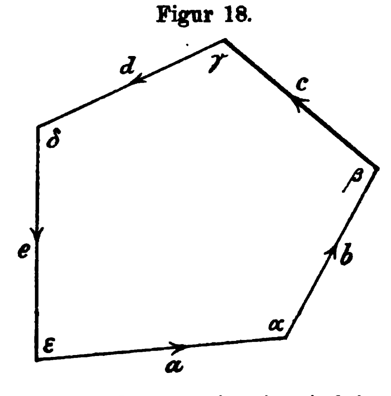
$$\varrho\sin(\varphi+\Theta) = 2J$$

Da nun $\varrho$ und $\Theta$ bekannt sind, so berechnet sich hieraus leicht der Winkel $\varphi$.

---

## 6. Aufgaben über das Fünfeck und Sechseck.

Figur 18.




**Bemerkung.** In den nachstehenden Fünfecksaufgaben bezeichnen wir die Seiten des Fünfecks mit:

$$a \quad b \quad c \quad d \quad e$$

und die auf sie folgenden Winkel mit:

$$\alpha \quad \beta \quad \gamma \quad \delta \quad \varepsilon$$

Alle Seiten werden gleichgerichtet angenommen.

Nach Frage 8 müssen immer mindestens sieben Stücke gegeben sein. Die drei fehlenden dürfen nicht zu gleicher Zeit Seiten sein.

Dann lauten die Fundamentalgleichungen auf die Richtung der Seite $a$ bezogen:

$$\text{I} \ldots \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 540^0$$

$$\text{II} \ldots a + b\cos(180^0 - \alpha) + c(2\cdot180^0 - \alpha - \beta) + d\cos(3\cdot180^0 - \alpha - \beta - \gamma) + e\cos(4\cdot180^0 - \alpha - \beta - \gamma - \delta) = 0$$

$$\text{III} \ldots b\sin(180^0 - \alpha) + c\sin(2\cdot180^0 - \alpha - \beta) + d\sin(3\cdot180^0 - \alpha - \beta - \gamma) + e\sin(4\cdot180^0 - \alpha - \beta - \gamma - \delta) = 0$$

Alle Probleme, die ein Fünfeck liefert, lassen sich mit Hilfe dieser Formeln lösen.

**Aufgabe 8.** Es sei in einem Fünfeck eine Seite und die ihr anliegenden Winkel unbekannt. Man soll dieselben aus den gegebenen anderen Stücken berechnen.

**Auflösung.** Da die Bezeichnung der Unbekannten Seite gleichgültig ist, so nennen wir sie $a$. Dann sind die beiden Winkel $\alpha$ und $\varepsilon$ zu berechnen.

Wir haben aus I:

$$\alpha + \varepsilon = 540^0 - \beta - \gamma - \delta$$

Ferner ist in III (vergleiche Erkl. 34):

$$1) \ldots b \sin(180^0 - \alpha) = \beta \sin\alpha$$

$$c\sin(2\cdot180^0 - \alpha - \beta) = c\sin[(2\cdot180^0 - \beta) - \alpha]$$
$$= c\sin(2\cdot180^0 - \beta)\cos\alpha - c\cos[(2\cdot180^0 - \beta)]\sin\alpha = -c\sin\beta\cos\alpha - c\cos\beta\sin\alpha$$

analog wird:

$$d\sin(3\cdot180^0 - \alpha - \beta - \gamma) = d\sin[(3\cdot180^0 - \beta - \gamma) - \alpha]$$
$$= d\sin(3\cdot180^0 - \beta - \gamma)\cos\alpha - d\cos(3\cdot180^0 - \beta - \gamma)\sin\alpha$$
$$= +d\sin(\beta+\gamma)\cos\alpha + d\cos(\beta+\gamma)\sin\alpha$$

endlich erhält man:

$$d\sin(4\cdot180^0 - \alpha - \beta - \gamma - \delta) = e\sin[(4\cdot180^0 - \beta - \gamma - \delta) = \alpha]$$
$$= -e\sin(\beta+\gamma+\delta)\cos\alpha - \cos(\beta+\gamma+\delta)\sin\alpha$$

Setzt man also:

$$M = b - c\cos\beta + d\cos(\beta+\gamma) - e\cos(\beta+\gamma+\delta)$$
$$N = -c\sin\beta + d\sin(\beta+\gamma) - e\sin(\beta+\gamma+\delta)$$

so folgt aus III:

$$M\sin\alpha - N\cos\alpha = 0$$

also hat man:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{N}{M}$$

Hat man hieraus $\alpha$ berechnet, so folgt aus I:

$$\varepsilon = 540 - \beta - \gamma - \delta - \alpha$$

und die Seite $a$ aus der Gleichung II.

**Erkl. 34.** Nach Kleyers Lehrbuch der Goniometrie ist:

$$\sin(180 - m) = +\sin m$$
$$\cos(180 - m) = -\cos m$$
$$\sin(2\cdot180 - m) = -\sin m$$
$$\cos(2\cdot180 - m) = +\cos m$$
$$\sin(3\cdot180 - m) = -\sin m$$
$$\cos(3\cdot180 - m) = +\cos m$$
$$\sin(4\cdot180 - m) = +\sin m$$
$$\cos(4\cdot180 - m) = -\cos m$$

**Bemerkung.** Es ist klar, dass man in analoger Weise zu verfahren hat, wenn eine Seite und zwei beliebige Winkel gesucht werden.

---

**Aufgabe 9.** In irgend einem Fünfeck seien zwei Seiten und irgend ein Winkel unbekannt. Man soll sie aus den gegebenen übrigen Stücken berechnen.

**Auflösung.** Den unbekannten Winkel erhält man aus der ersten Grundgleichung:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 540^0$$

Sodann seien $a$ und etwa $c$ die unbekannten Seiten. Dann berechnet sich $c$ aus der Grundgleichung III. Es wird nämlich:

$$c = -\frac{b\sin(180^0 - \alpha) + d\sin(3\cdot180^0 - \alpha - \beta - \gamma) + e\sin(4\cdot180^0 - \alpha - \beta - \gamma - \delta)}{\sin(2\cdot180^0 - \alpha - \beta)}$$

und $a$ aus der Grundgleichung II:

---

**Aufgabe 10.** In einem Fünfeck sind alle Stücke bis auf drei Winkel gegeben, man soll die drei Winkel berechnen.

**Bemerkung.** Die nebenstehende Aufgabe, offenbar die komplizierteste der Polygonalaufgaben, sucht man in der Praxis durch geeignete Zerlegung in Dreiecke zu umgehen. Oder wenn

**Auflösung.** Man bestimmt sich zunächst einen der unbekannten Winkel aus der Gleichung I:

Seien also:

$$\alpha,\ \gamma,\ \varepsilon$$

die unbekannten Winkel, so wird:

$$\varepsilon = 540 - (\alpha + \beta + \gamma + \delta)$$

dieses nicht angeht, dadurch, dass man eine Diagonale zieht, die sich berechnen lässt und so das Fünfeck in ein Dreieck und ein Viereck zerlegt, welches wesentlich einfacher zu behandeln ist.

**Erkl. 35.** Aus der Gleichung:

$$m\,\mathrm{tg}^2\gamma + n\,\mathrm{tg}\gamma + p = 0$$

erhalten wir im allgemeinen zwei Werte für $\mathrm{tg}\gamma$. Da aber:

$$\mathrm{tg}\,\gamma = \mathrm{tg}\,(180^0 + \gamma)$$

so haben wir vier mögliche Werte für $\mathrm{tg}\gamma$. Welcher zu nehmen ist, muss aus den näheren Umständen des speziell vorgelegten Problems entschieden werden.

**Bemerkung.** Für die numerische Behandlung empfehlen wir nachstehendes Fünfeck:

$a = 486{,}0 \qquad \alpha = 46^0\,38'$
$b = 467{,}1 \qquad \beta = 136^0\,05'$
$c = 394{,}2 \qquad \gamma = 38^0\,51'$
$d = 482{,}4 \qquad \delta = 302^0\,21'$
$e = 137{,}8 \qquad \varepsilon = 16^0\,5'$

Der Inhalt dieses Fünfecks ist gleich 122833,5.

Dieser ist also als gegeben zu betrachten, wenn man $\alpha$ und $\gamma$ kennt.

Sodann schreiben wir die Gleichung III wie in der Aufgabe 8, wo gefunden wurde:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{N}{M}.$$

Behandelt man in ähnlicher Weise die Gleichung II, so erhält man eine ähnliche Gleichung:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{N'}{M'}$$

so dass also:

$$\frac{N}{M} = \frac{N'}{M'}$$

oder:

$$NM' - MN' = 0$$

Diese Gleichung enthält kein $\alpha$ mehr und auch kein $\varepsilon$, sondern nur eine einzige Unbekannte, nämlich den Winkel $\gamma$. Man erhält so für $\gamma$ eine Gleichung von der Form:

$$m\sin^2\gamma + n\sin\gamma\cos\gamma + p\cos^2\gamma = 0$$

oder:

$$m\,\mathrm{tg}^2\gamma + n\,\mathrm{tg}\gamma + p = 0$$

Hier sind also zwei Lösungen möglich (vergleiche Erkl. 35).

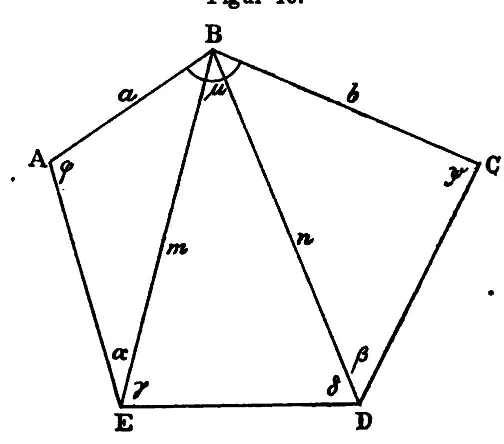
---

**Aufgabe 11.** In einem Fünfeck (vergleiche Figur 19) sind gemessen worden die Seiten $AB = a$, $BC = b$ und der eingeschlossene Winkel $ABC = \mu$; ferner die vier Winkel:

$$AEB = \alpha$$
$$BED = \gamma$$
$$BDC = \beta$$
$$BDE = \delta$$

das Fünfeck ist zu berechnen.

Figur 19.




**Auflösung.** Es sei (vergl. Figur 19):

$$\sphericalangle BAE = \varphi$$
$$\sphericalangle BCD = \psi$$

sodann haben wir, da die Summe aller Winkel in einem Fünfeck:

$$(5-2)\,180^0 = 3\cdot 180^0 = 540^0$$

$$\text{I} \ldots \varphi + \psi = 540^0 - (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \mu)$$

Sei ferner:

$$BE = m, \quad BD = n$$

so wird im $\triangle ABE$ resp. im $\triangle BDC$:

$$\sin\varphi = \sin\alpha\,\frac{m}{a}$$

$$\sin\psi = \sin\beta\,\frac{n}{b}$$

also:

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{m}{n}$$

Nun ist aber im $\triangle BDE$:

$$\frac{m}{n} = \frac{\sin\delta}{\sin\gamma}$$

also:

$$\text{II} \ldots \frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{\sin\delta}{\sin\gamma}$$

Durch die Gleichungen I und II ist das Problem gelöst.

Um auch numerisch die Rechnung durchzuführen schreibe man:

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{\sin(\varphi+\psi-\psi)}{\sin\psi} = \frac{\sin(\varphi+\psi)\cos\psi - \cos(\varphi+\psi)\sin\psi}{\sin\psi}$$

$$= \sin(\varphi+\psi)\operatorname{ctg}\psi - \cos(\varphi+\psi) = M$$

wobei:

$$M = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{\sin\delta}{\sin\gamma}$$

Man hat sodann die Gleichung:

$$\sin(\varphi+\psi)\operatorname{ctg}\psi = M + \cos(\varphi+\psi)$$

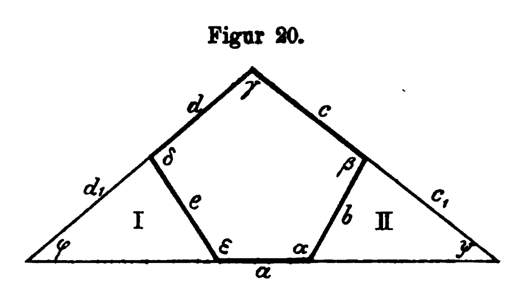
oder:

$$\text{III} \ldots \operatorname{tg}\psi = \frac{\sin(\varphi+\psi)}{M+\cos(\varphi+\varphi)}$$

---

**Aufgabe 12.** Von einem Fünfeck sind alle Seiten und alle Winkel gegeben. Es wird der Flächeninhalt gesucht.

Figur 20.




**Erkl. 36.** Nach Kleyer, Lehrbuch der Trigonometrie, gilt für den Inhalt $J$ eines Dreiecks aus zwei Seiten $m$, $n$ und dem eingeschlossenen Winkel $\gamma$ der Satz:

$$2J = mn\sin\gamma$$

**Bemerkung.** In der Geodäsie kommen in der Regel nur Vielecke vor, von welchen alle Seiten und alle Winkel gegeben sind. Dieselben sind dann, wenn nicht die Koordinatenrechnung bereits ausgeführt ist, analog zu behandeln.

**Auflösung.** Seien:

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e$$

Seiten und

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon$$

Winkel des Fünfecks. Wird dasselbe zum Dreieck ergänzt (vergl. Figur 20), so folgt:

$$\varphi + (180 - \delta) = \varepsilon$$
$$\psi + (180 - \beta) = \alpha$$

Damit sind die Winkel $\varphi$ und $\psi$ bestimmt. Ferner ist im Dreieck I nach dem Sinussatze:

$$d_1 = \frac{e}{\sin\varphi}\cdot\sin\varepsilon$$

und im Dreieck II:

$$c_1 = \frac{b}{\sin\psi}\cdot\sin\alpha$$

Sei nun $i$ der Inhalt des grossen Dreiecks mit den Winkeln $\gamma$, $\varphi$, $\psi$, sowie $j_{\text{I}}$ und $j_{\text{II}}$ die Inhalte der Dreiecke I und II, so folgt (vergl. Erkl. 36):

$$2i = (d + d_1)(c + c_1)\sin\gamma$$
$$2j_{\text{I}} = d_1 e \sin\delta$$
$$2j_{\text{II}} = b c_1 \sin\beta$$

Dann ist der Flächeninhalt des Fünfecks $F$ offenbar gleich:

$$i - (j_{\text{I}} + j_{\text{II}})$$

womit die Aufgabe gelöst ist.

Zur Uebung wird empfohlen, für das Viereck eine analoge Auflösung durchzuführen.

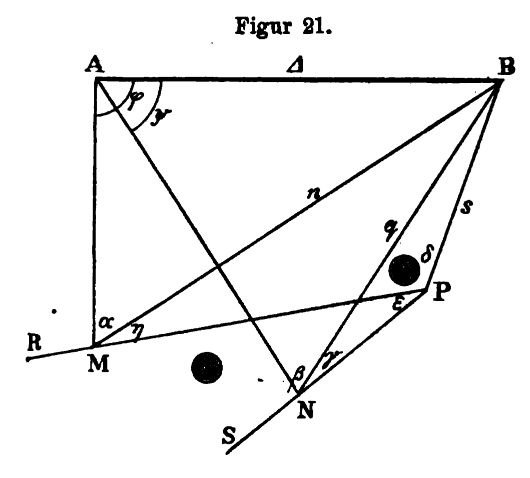
---

**Aufgabe 13.** Eine Basis $AB$ ist gegeben, ihre Länge sei $b$. Von den Punkten $M$, $N$, $P$ waren ferner folgende Winkel gemessen:

$AMB = \alpha,\quad BMP = \eta$
$ANB = \beta,\quad BNP = \gamma$
$MPN = \varepsilon,\quad MPB = \delta$

Es sollen die Punkte $M$, $N$, $P$ bestimmt werden (vergl. Figur 21).

Figur 21.




**Bemerkung.** Diese Aufgabe hat eine praktische Verwendung in der Vermessungskunde. Seien $A$ und $B$ gegebene Katastralpunkte, dann kann man auf Grund der Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$, $\eta$ die drei Punkte $M$, $N$, $P$ festsetzen. Es ist ein Vorteil gegen die sonst angewendete Methode der Pothenotschen Bestimmung, dass man nur zweier Katastralpunkte bedarf, analog wie bei der nach Hansen genannten Aufgabe.

**Auflösung.** Wir bezeichnen:

$MB$ mit $n$
$PB$ mit $s$
$NB$ mit $q$

ferner:

$\sphericalangle MAB$ mit $\varphi$
$\sphericalangle NAB$ mit $\psi$

Dann haben wir im $\triangle MAB$:

$$1) \ldots \frac{b}{n} = \frac{\sin\alpha}{\sin\varphi}$$

und im $\triangle MBP$:

$$2) \ldots \frac{n}{s} = \frac{\sin\delta}{\sin\eta}$$

ferner im $\triangle NPB$:

$$3) \ldots \frac{s}{q} = \frac{\sin\gamma}{\sin(\delta+\varepsilon)}$$

und endlich im $\triangle ANB$:

$$4) \ldots \frac{q}{b} = \frac{\sin\psi}{\sin\beta}$$

Multiplizieren wir die Gleichungen 1) bis 4) miteinander, so folgt:

$$\text{I} \ldots \frac{\sin\psi}{\sin\varphi} = \frac{\sin\beta\sin\eta\sin(\delta+\varepsilon)}{\sin\alpha\sin\delta\sin\gamma}$$

Hier sind die Winkel $\varphi$ und $\psi$ unbekannt. Wir haben ferner im Viereck $ABPN$:

$$\psi = 360^0 - (\beta+\gamma+\varepsilon+\delta) - \sphericalangle ABP$$

und im Viereck $ABPB$:

$$\varphi = 360^0 - (\alpha+\eta+\delta) - \sphericalangle ABP$$

Subtrahiert man die zweite Gleichung von der ersten, so folgt:

$$\text{II} \ldots \varphi - \psi = (\alpha+\eta) - (\beta+\gamma+\varepsilon)$$

Dadurch haben wir eine zweite Gleichung zur Berechnung der Unbekannten $\varphi$ und $\psi$ erhalten. Die Lösung kann analog der früheren Aufgabe durchgeführt werden (vergleiche jedoch Erkl. 35).

---

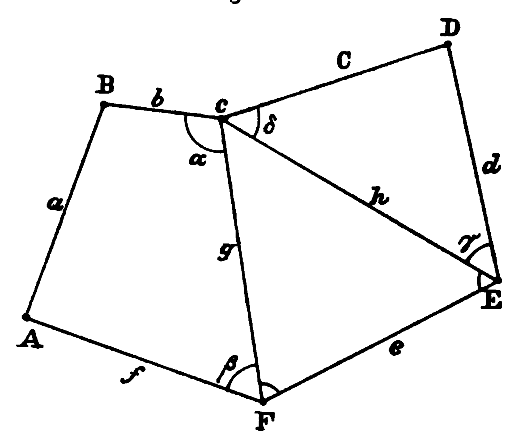
**Aufgabe 14.** In einem Sechseck sind alle Seiten und alle Winkel bis auf drei gegeben. Man soll das Sechseck berechnen. (Lösung von Dr. Nell, Zeitschrift für Vermessungswesen, 1893, 15. Sept.)

**Auflösung.** In der Figur 22 seien etwa die Winkel $C$, $E$, $F$ unbekannt. Man ziehe die Diagonalen $CF$ und $CE$, sodann ist das Viereck $ABCF$ und das Dreieck $CDE$ vollkommen gegeben.

Wir haben im ersteren:

$$g\sin\alpha = a\sin B - f\sin(B+A)$$
$$g\cos\alpha = b - a\cos B + f\cos(B+A)$$
$$\beta = 360^0 - (B+A+\alpha)$$

Figur 22.




und im letzteren:

$$h \sin\frac{1}{2}(\gamma - \delta) = (c - d)\cos\frac{1}{2}D$$

$$h \cos\frac{1}{2}(\gamma - \delta) = (c + d)\sin\frac{1}{2}D$$

$$\frac{1}{2}(\gamma + \delta) = 90^0 - \frac{1}{2}D$$

Damit ist endlich auch das Dreieck $FEC$ bestimmt, denn die dritte Seite $c$ ist bekannt.

**Bemerkung.** Als Beispiel sei empfohlen:

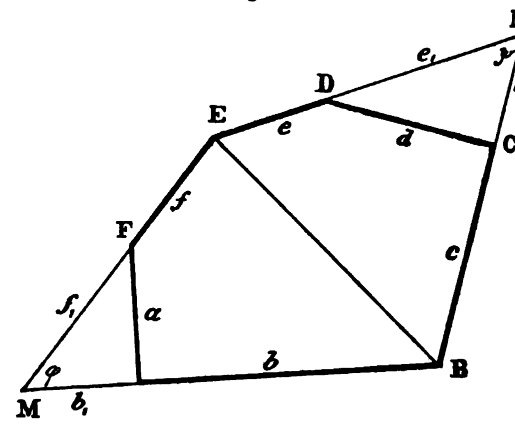
| | |
|---|---|
| $a = 954 \cdot 3$ | $A = 83^0 44'$ |
| $b = 481 \cdot 0$ | $B = 46^0 44'$ |
| $c = 533 \cdot 0$ | $C = 244^0 30'$ |
| $d = 657 \cdot 5$ | $D = 30^0 24'$ |
| $e = 624 \cdot 0$ | $E = 290^0 46'$ |
| $f = 1040 \cdot 0$ | $F = 23^0 52'$ |

Man erhält im allgemeinen zwei Lösungen. Der Leser möge jene bestimmen, die unseren Daten entsprechen. Man ersieht hieraus, dass, sowie es bei gewissen Dreiecksaufgaben zwei Lösungen gab, auch in der Polygonometrie manchmal mehrere Lösungen vorkommen können.

---

**Aufgabe 15.** Es soll der Inhalt eines Sechsecks $ABCDEF$ bestimmt werden, wenn alle Seiten und Winkel bekannt sind.

Figur 23.




**Auflösung.** Man ziehe die Diagonale $EB$ und verlängere $ED$ sowie $BC$ bis zum Schnittpunkt $N$ und ähnlich $EF$ und $BA$ zum Schnittpunkt $M$. Sei sodann:

$$CN = c_1, \quad AM = b_1$$
$$DN = e_1, \quad FM = f_1$$

sowie:

$$\sphericalangle DNC = \psi, \quad \sphericalangle FMA = \varphi$$

so wird:

$$\varphi + (180 - F) + (180 - A) = 180^0$$

also:

$$\varphi = A + F - 180^0$$

analog wird:

$$\psi = D + C - 180^0$$

Dann ist im $\triangle MFA$:

$$f_1 = \frac{a}{\sin\varphi}\sin A$$

$$b_1 = \frac{a}{\sin\varphi}\sin F$$

und analog im $\triangle DNC$:

$$c_1 = \frac{d}{\sin\psi}\sin D$$

$$e_1 = \frac{d}{\sin\psi}\sin C$$

**Bemerkung.** Man beachte hier die Leichtigkeit der ganzen Rechnung.

Um $f_1$ und $b_1$ zu bestimmen hat man:

$$\frac{a}{\sin\varphi}$$

mit

$$\sin A \text{ resp. } \sin F$$

zu multiplizieren, analog einfach bestimmt sich $c_1$ und $d_1$.

**Erkl. 37.** Man hat zwar:

$$\frac{1}{2} f_1 b_1 \sin\varphi = \frac{a}{\sin\varphi} \cdot \sin A \cdot \frac{a}{\sin\varphi} \sin F \cdot \sin\varphi$$

$$= \frac{a^2}{\sin\varphi} \sin A \sin F$$

$$= \frac{a^2 \sin A \sin F}{\sin(A+F)}$$

aber es empfiehlt sich, die ganze Rechnung so durchzuführen wie sie abgeleitet wurde.

Dann hat man ferner für den Flächeninhalt der Dreiecke (vergl. Erkl. 37):

$$AMF \cdots \frac{1}{2} f_1 b_1 \sin\varphi$$

$$AEB \cdots \frac{1}{2} (f+f_1)(b+b_1) \sin\psi$$

ferner:

$$DNC \cdots \frac{1}{2} c_1 e_1 \sin\psi$$

$$ENB \cdots \frac{1}{2} (c+c_1)(e+e_1) \sin\varphi$$

Nun ist aber der Inhalt des Sechsecks:

$$ABCDEF = (BEM - MAF) + (EBN - DCN)$$

womit die Aufgabe gelöst erscheint.

## 7. Ueber die Behandlung schwieriger Probleme.

**Anmerkung 1.** Es kommt vor, dass man Probleme zu lösen hat, die sehr schwierig zu behandeln sind und auf höhere Gleichungen führen. In solchen Fällen benützt man ein Näherungsverfahren, welches gewöhnlich sehr rasch zum Ziele führt. Allgemeine Regeln lassen sich freilich nicht angeben, doch wird man sich leicht in allen Fällen zurechtfinden können, wenn man einige durchgenommen hat, da die Methode stets dieselbe bleibt.

**Aufgabe 16.** Von einem Viereck $ABCD$ (vergl. Figur 24) ist die Seite:

$$AB = a$$

und die Winkel an den Diagonalen und zwar:

$$CAB = \alpha$$
$$DBC = \beta$$
$$ACD = \gamma$$
$$ADB = \delta$$

gegeben. Das Viereck soll berechnet werden.

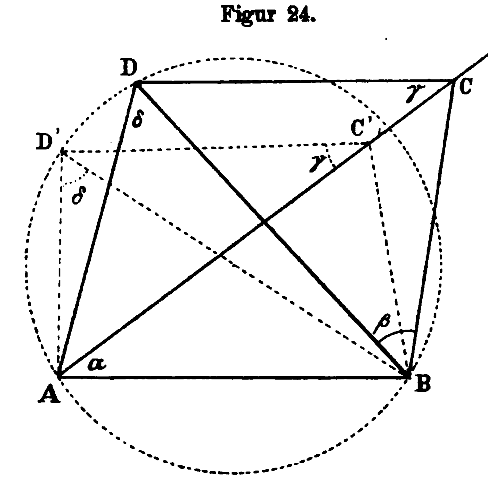
**Auflösung.** Die direkte Auflösung führt auf höhere Gleichungen. Man hat demnach zu verfahren wie folgt:

I. Lösung durch Konstruktion.

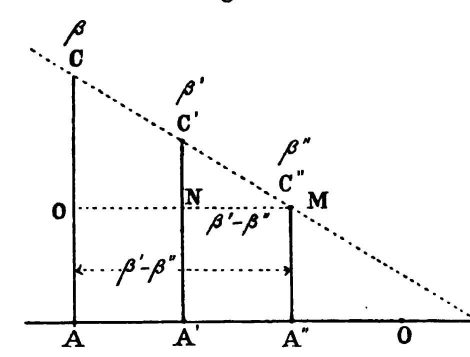
Dieselbe muss der numerischen immer vorausgehen, denn sie verschafft nicht nur eine gute Uebersicht des Ganzen, sondern erleichtert auch die Rechnung resp. macht die Berechnung nach der folgenden Methode möglich, indem sie Näherungswerte der zu berechnenden Grössen liefert.

Man zeichne über der gegebenen Seite $a = AB$ einen Kreis mit dem Peripheriewinkel $\delta$ und trage mit der Spitze in $A$ den Winkel $\alpha = BAC$ auf. Auf der Geraden $AC$ nehme man einen beliebigen Punkt $C'$ an, trage den Winkel $AC'D' = \gamma$ auf und verbinde $D'$ mit $A$ und $B$. Sodann sollte $\sphericalangle D'BC' = \beta$ sein, was aber im allgemeinen nicht der Fall sein wird, indem man einen anderen Winkel $\beta'$ erhält. Ebenso ergibt sich aus der Wahl eines anderen Punktes $C''$ der Winkel $\beta''$.

Figur 24.

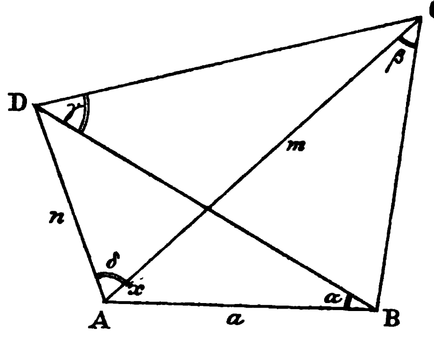



Figur 25.




**Bemerkung.** Das hier auseinandergesetzte Verfahren ist nichts anderes als die geometrische Regula falsi. Man vergleiche hierüber jene Teile der Kleyerschen Encyklopädie, die über die höheren Gleichungen handeln.

Figur 26.




Um nun einen genaueren Wert für den Punkt $C$ zu finden messe man auf dem Papier die Längen $AC'$, $AC''$ ab und bestimme $AC$ aus der Gleichung:

$$AC = AC'' + \frac{\beta - \beta''}{\beta' - \beta''} \cdot (AC' - AC'')$$

dabei sind $\beta$ in Grade auszudrücken.

Dieses Verfahren wird aber nur dann genau, wenn die Winkel $\beta'$ und $\beta''$ nahe an $\beta$ liegen. Die obige Gleichung für $AC$ ergibt sich aus nachstehender Betrachtung:

Denkt man sich von $O$ aus (vergl. Fig. 25) in der Richtung $OA$ die Winkel:

$$\beta'' = OA''$$
$$\beta' = OA'$$
$$\beta = OA$$

wobei man etwa 1 mm $= 1^0$ setzen kann, und senkrecht in $A''$ die Strecke:

$$A''C'' = AC''$$

analog in $A'$:

$$A'C' = AC'$$

aufgetragen und die Punkte $C'C''$ durch eine Gerade verbunden, so wird unter der Annahme linearer Unabhängigkeit die in $A$ errichtete Senkrechte $AC$ den genäherten Wert dieser Grösse bestimmen. Nun kann man in der Nähe dieses Punktes einen neuen Punkt wählen und die Konstruktion wiederholen. Dieses wird so lange fortgesetzt, als es die konstruktive Genauigkeit erlaubt.

## II. Strenge Lösung durch Berechnung.

Es sei die Diagonale:

$$AC = m$$

und die Seite:

$$AD = n$$

Dann ist im $\triangle ABC$:

$$1) \ldots m = a \frac{\sin(x + \beta)}{\sin \beta}$$

wobei der Winkel $CAB = x$ gesetzt wurde.

Ferner ist im $\triangle ABD$:

$$n = a \frac{\sin \alpha}{\sin(\delta + \alpha + x)}$$

und im $\triangle ADC$ (vergl. Erkl. 38):

$$m = n \frac{\sin(\gamma - \alpha - x - \delta)}{\sin(\alpha + x - \gamma)}$$

also auch:

$$2) \ldots m = a \frac{\sin \alpha \sin(\gamma - \alpha - x - \delta)}{\sin(\delta + \alpha + x) \sin(\alpha + x - \gamma)}$$

Durch Gleichsetzung der Gl. 1) und 2) folgt weiter:

$$3) \ldots \sin(x + \beta) \sin(\delta + \alpha + x) \sin(\alpha + x - \gamma) = \sin \alpha \sin \beta \sin(\gamma - \alpha - x - \delta)$$

Diese Gleichung muss durch Versuche gelöst werden. Einen Näherungswert kann

**Erkl. 33.** Es ist:

$$\sphericalangle CDA = \gamma + (180^0 - \alpha - x - \delta)$$
$$= 180^0 + \gamma - \alpha - x - \delta$$

und

$$\sphericalangle DCA = 180^0 - \delta - CDA$$
$$= 180^0 - \delta - 180^0 - \gamma + \alpha + x + \delta$$
$$= \alpha + x - \gamma$$

man sich durch obige geometrische Konstruktion verschaffen.

Wir gehen nicht weiter. Man übersieht sofort, dass sich die Gl. 3) auf die Form:

$$M \sin x + N \cos x + P \sin 3x + Q \cos 3x = 0$$

bringen lässt.

---

## 8. Fehlertheorie der Polygone.

**Frage 34.** Was bezweckt die Fehlertheorie der Polygone?

**Antwort.** Die Fehlertheorie der Polygone beschäftigt sich mit zweierlei Problemen. Einmal hat sie zur Aufgabe, die begangenen Fehler zu entdecken und sodann gibt sie Rechenschaft über den Einfluss der Fehler auf das Resultat der Rechnung.

---

**Frage 35.** Welche Fehler können durch Rechnung entdeckt werden?

**Antwort.** Nur solche Fehler, die sich nicht auf mehrere Elemente der Rechnung beziehen, können rechnerisch entdeckt werden. Wird also in einem Polygon nur eine Seite oder nur ein Winkel falsch angegeben resp. gemessen, so kann der Fehler berechnet werden. Natürlich handelt es sich dabei nur um grobe Fehler.

---

**Frage 36.** Wie wird ein grober Winkelfehler bestimmt?

**Antwort.** Um einen groben Winkelfehler zu entdecken stellen wir folgende Ueberlegung an: Es seien die richtigen Gleichungen eines Vierecks:

$$a - b \cos\alpha + c \cos(\alpha + \beta) - d \cos(\alpha + \beta + \gamma) = 0$$
$$b \sin\alpha - c \sin(\alpha + \beta) + d \sin(\alpha + \beta + \gamma) = 0$$

Nehmen wir nun an, wir hätten statt $\beta$:

$$\beta + \Delta\beta$$

wobei $\Delta\beta$ ein grober Fehler ist. Dann wird:

$$a - b \cos\alpha + c \cos(\alpha + \beta + \Delta\beta) - d \cos(\alpha + \beta + \Delta\beta + \gamma) = f_1$$
$$b \sin\alpha - c \sin(\alpha + \beta + \Delta\beta) + d \sin(\alpha + \beta + \Delta\beta + \gamma) = f_2$$

wobei $f_1$ und $f_2$ die durch den Fehler $\Delta\beta$ entstandenen Ueberschüsse über Null bezeichnen.

Aus der ersten Gleichung folgt:

$$a - b \cos\alpha + \cos\Delta\beta\,[c \cos(\alpha + \beta) - d \cos(\alpha + \beta + \gamma)]$$
$$- \sin\Delta\beta\,[c \sin(\gamma + \beta) - d \sin(\alpha + \beta + \gamma)] = f_1$$

und aus der zweiten:

$$b \sin\alpha - \cos\Delta\beta\,[c \sin(\alpha + \beta) - d \sin(\alpha + \beta + \gamma)]$$
$$- \sin\Delta\beta\,[c \cos(\alpha + \beta) - d \cos(\alpha + \beta + \gamma)] = f_2$$

Nun ist aber:

$$c \sin(\alpha + \beta) - d \sin(\alpha + \beta + \gamma) = b \sin\gamma$$
$$c \cos(\alpha + \beta) - d \cos(\alpha + \beta + \gamma) = b \cos\alpha - c$$

also wird sein:

$(a - b\cos\alpha)(1 - \cos\Delta\beta) - b\sin\alpha\cdot\sin\Delta\beta = f_1$

$(a - b\cos\alpha)\sin\Delta\beta + b\sin\alpha(1 - \cos\Delta\beta) = f_2$

Hier haben wir zwei Gleichungen und nur eine Unbekannte. Trotzdem genügt eine Gleichung zur Bestimmung dieser Unbekannten nicht. Denn wir haben vorausgesetzt, dass der Fehler im Winkel $\beta$ liegt.

Demnach müssen wir allgemeiner schreiben:

$$1)\ldots\begin{cases} N(1-\cos\Delta w) - M\sin\Delta w = f_1 \\ N\sin\Delta w + M(1-\cos\Delta w) = f_2 \end{cases}$$

Darin bezeichnen $N$ resp. $M$ die ersten Glieder der Reihen:

$a - b\cos\alpha + c\cos(\alpha+\beta) + \cdots\ (N)$

$b\sin\alpha - c\sin(\alpha+\beta) + \cdots\ (M)$

bis zum fehlerhaften Winkel $w$.

Was den Betrag des fehlerhaften Winkels anbetrifft, so bilde man die Summe $S$ aller Winkel. Dieselbe wird ein bestimmtes Vielfache von 180°, der Ueberschuss über diese Zahl gibt den Fehler $\Delta\beta$. Man hat also für ein $n$-Eck:

$$S = (n-2)\,180^0 + \Delta\beta$$

Damit ist $\Delta\beta$ bestimmt und man kann nun aus den Gleichungen 1) die Grössen $M$ und $N$ direkt berechnen (vergl. Erkl. 39). Man hat:

$$N = \frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{2}f_2\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\Delta w$$

$$M = \frac{1}{2}f_2 + \frac{1}{2}f_1\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\Delta w$$

Dadurch ist $M$ und $N$ bestimmt.

Nun weiss man ja, dass:

$N = a - b\cos\alpha + c\cos(\alpha+\beta)\cdots$

$M = b\sin\alpha - c\sin(\alpha+\beta) + \cdots$

und zwar gehen die Glieder bis zu jenem, in welchem der fehlerhafte Winkel vorkommt. Da nun alles bekannt ist, so bildet man die einzelnen Summen:

$S_1 = a$

$S_2 = a - b\cos\alpha$

$S_3 = a - b\cos\alpha + c\cos(\alpha+\beta)$

und so weiter bis man zur Summe $S_n$ gelangt, welche gleich $N$ ist. Sei diese z. B.:

$a - b\cos\alpha + c\cos(\alpha+\beta) - d\cos(\alpha+\beta+\gamma)$

so weiss man, dass der Winkel $\delta$ fehlerhaft ist.

**Erkl. 39.** Man hat:

$$N(1-\cos\Delta w) - M\sin\Delta w = f_1$$
$$N\sin\Delta w + M(1-\cos\Delta w) = f_2$$

also wenn die erste Gleichung mit:

$$1 - \cos\Delta w$$

die zweite mit:

$$\sin\Delta w$$

multipliziert wird und man hernach beide Gleichungen addiert:

$$N[(1-\cos\Delta w)^2 + \sin^2\Delta w] = f_1(1-\cos\Delta w) + f_2\sin\Delta w$$

oder:

$$2N(1-\cos\Delta w) = f_1(1-\cos\Delta w) + f_2\sin\Delta w$$

oder weiter:

$$N = \frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{2}f_2\frac{\sin\Delta w}{1-\cos\Delta w}$$

Nun ist aber:

$$\frac{\sin\Delta w}{1-\cos\Delta w} = \operatorname{ctg}\frac{1}{2}\Delta w$$

also wird:

$$N = \frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{2}f_2\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\Delta w$$

analog findet man:

$$M = \frac{1}{2}f_2 - \frac{1}{2}f_1\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\Delta w$$

---

**Frage 37.** Wie wird ein grober Seitenfehler entdeckt?

**Antwort.** Sei $c + \Delta c$ die fehlerhafte, $c$ die richtige Seite, dann ist:

$$a - b\cos\alpha + (c+\Delta c)\cos(\alpha+\beta) - d\cos(\alpha+\beta+\gamma) = f_1$$
$$b\sin\alpha - (c+\Delta c)\sin(\alpha+\beta) + d\sin(\alpha+\beta+\gamma) = f_2$$

**Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.**

**Der ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ **kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung gratis und portofrei bezogen werden.**

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert, um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft.

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

---

☛ Das **vollständige**

## Inhaltsverzeichnis

### der bis jetzt erschienenen Hefte

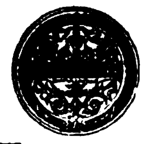
kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

---

**Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.**

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

1310. Heft. | Preis des Heftes 25 Pf. | Vermessungskunde (Geodäsie). Zweiter Teil. Forts. v. Heft 1305. — Seite 33—48. Mit 13 Figuren.

# Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

**Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten**

erläutert durch

**viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,**

aus allen Zweigen

der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — **aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie**; des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar-** u. **Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

**zum einzig richtigen und erfolgreichen**

**Studium** zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

**Dr. Adolph Kleyer,**

Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

# Vermessungskunde

## (Geodäsie).

### Zweiter Teil.

Nach **System Kleyer** bearbeitet von **Dr. W. Láska.**

Fortsetzung von Heft 1305. — Seite 33—48. Mit 13 Figuren.

**Inhalt:**

Ueber die Zahl der Bestimmungsstücke in Punktpolygonen. — Aufgaben über die Bedingungsgleichungen. — Die Koordinatenaufnahme. — Einleitung. — Aufgaben über Koordinaten. — Berechnung des Polygonzuges. — Das Pothenot'sche Problem.

**Stuttgart 1894.**

Verlag von Julius Maier.

**Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.**

# PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch **alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben **beigegeben**, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze für** den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles der mathematischen** Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen **oft** keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten und belebt werden.**

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen geben.**

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. Kleyer, Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

**Stuttgart.** **Die Verlagshandlung.**

**Bemerkung.** Man beachte, dass man nicht nur die Grösse des Fehlers, sondern auch die Grösse selbst bestimmen muss, die fehlerhaft ist. Darum kann man die Fehler nicht bestimmen, wenn zwei Elemente zugleich fehlerhaft sind.

also auch:

$$f_1 = \Delta c \cos(\alpha + \beta)$$
$$-f_2 = \Delta c \sin(\alpha + \beta)$$

Man hat also:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = -\frac{f_2}{f_1}$$

Damit ist aber der dieser Seite zugehörige Winkel bestimmt. Der Fehler selbst ist:

$$\Delta c = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$$

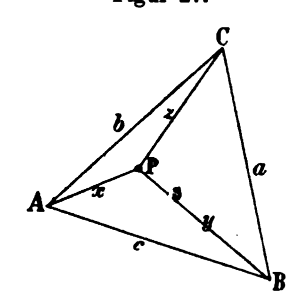
oder:

$$\Delta c = \frac{f_1}{\cos(\alpha + \beta)} = -\frac{f_2}{\sin(\alpha + \beta)}$$

## 9. Ueber die Zahl der Bestimmungsstücke in Punktpolygonen.

**Frage 38.** Was versteht man unter einem Punktpolygon?

Figur 27.




**Antwort.** Unter einem Punktpolygon versteht man ein durch die Verbindungslinien einer Anzahl von Punkten bestimmtes Polygon. Wurden alle Punkte mit einander verbunden, so sagen wir, das Polygon sei vollständig (vergl. Figur 27).

**Frage 39.** Durch wieviel Bestimmungsstücke wird ein $n$-Punktpolygon bestimmt?

**Erkl. 40.** Sei $p = 3$, dann haben wir:

$$2 \cdot 3 - 3 = 3 \text{ Stücke.}$$

Sei $p = 4$, so haben wir:

$$2 \cdot 4 - 3 = 5 \text{ Stücke,}$$

also ist ein Viereck im allgemeinen durch 5 Stücke bestimmt (vergl. Frage 9). In der Figur 27 haben wir fünf Punkte, also sind zu ihrer Feststellung:

$$2 \cdot 5 - 3 = 7$$

Angaben nötig. Es möge hier noch einmal daran erinnert werden, dass unter diesen Stücken sich mindestens eine Seite vorfinden muss.

**Antwort.** Nehmen wir an, wir haben eine Seite gegeben. Dann bedürfen wir zur Feststellung eines dritten Punktes zweier weiteren Angaben (Seiten oder Winkel). Gehen wir zum nächsten Punkte, so können wir die eine Dreiecksseite benützen, so dass zu seiner Feststellung nur noch zwei weitere Grössen erforderlich werden. So fortfahrend sehen wir ein, dass wenn wir zu zwei gegebenen Punkten $(p - 2)$ neue bestimmen, hiezu:

$$3 + (p - 3) \cdot 2 = 2p - 3$$

Stücke notwendig werden (vergl. Erkl. 40).

**Bemerkung.** In der praktischen Anwendung der Polygonometrie, insbesondere in der Vermessungskunde, werden in der Regel mehr Seiten und Winkel gemessen, als absolut notwendig ist. Nachdem sich nun die überzähligen Stücke aus den notwendigen herleiten lassen, wird es gewisse Gleichungen geben, denen einige oder alle gegebene Grössen genügen müssen. Diese werden Bedingungsgleichungen genannt.

**Frage 40.** Welche Arten der Bedingungsgleichungen unterscheidet man?

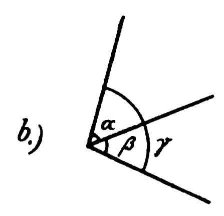
**Antwort.** Man unterscheidet Winkel- und Seitengleichungen.

---

**Frage 41.** Was ist eine Winkelgleichung?

Figur 28.

a.)




**Antwort.** Unter einer Winkelgleichung wird eine Relation verstanden, welcher die Winkel einer Figur genügen müssen. Z. B. die drei Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ eines Dreieckes genügen der Gleichung:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0$$

Die vier zusammenstossenden Winkel der Figur 28a genügen der Gleichung:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^0$$

Ferner hat man für die drei Winkel der Figur 28b die Relation:

$$\alpha + \beta - \gamma = 0$$

---

**Frage 42.** Was versteht man unter einer Seitengleichung?

**Bemerkung.** Die nebenstehende Definition wird am besten an der folgenden Aufgabe aufgeklärt.

**Antwort.** Unter einer Seitengleichung versteht man einen, im allgemeinen aus Seiten und Winkeln zusammengesetzten Ausdruck, der durch die Gleichstellung zweier verschiedenen Berechnungsarten einer und derselben Grösse (Seite) entsteht.

---

## Aufgaben über die Bedingungsgleichungen.

**Aufgabe 17.** Man söll für die Figur 29 eine Seitengleichung aufstellen, wenn gemessen worden sind die Seite $a$ und die Winkel 1 bis 8.

Figur 29.

**Auflösung.** Man hat im $\triangle ABC$ nach dem Sinussatze:

$$\text{I} \ldots b = a \frac{\sin(3)}{\sin(8)}$$

andererseits ist im $\triangle ADC$:

$$1) \ldots b = CD \cdot \frac{\sin(6)}{\sin(1)}$$

und im $\triangle CDB$:

$$2) \ldots CD = CB \frac{\sin(4)}{\sin(5+6)}$$

und endlich im $\triangle ABC$:

$$3) \ldots CB = a \frac{\sin(1+2)}{\sin(8)}$$

Durch Multiplikation der Gl. 1) bis 3) folgt:

$$\text{II} \ldots b = a \frac{\sin(6)\sin(4)\sin(1+2)}{\sin(1)\sin(5+6)\sin(8)}$$

**Bemerkung.** Man kann noch andere Seitengleichungen entwickeln; so ergibt sich z. B. für die Figur 29 auch:

$$\frac{\sin(3)\sin(5)\sin(7+8)}{\sin(3+4)\sin(6)\sin(8)} = 1$$

Mit Hilfe der in der nächsten Aufgabe angegebenen Winkelgleichungen können beide Formen ineinander übergeführt werden.

Durch Gleichsetzung der Gl. 1) und 2) folgt:

$$\frac{\sin(6)\sin(4)\sin(1+2)}{\sin(1)\sin(5+6)\sin(3)} = 1$$

welches die verlangte Seitengleichung ist.

Wird dieser Bedingungsgleichung nicht genügt, so lässt sich aus den gegebenen Grössen kein Polygon konstruieren.

---

**Aufgabe 18.** Es soll die Figur 29 in Bezug auf die Bedingungsgleichungen genauer diskutiert werden.

**Bemerkung.** Es sind scheinbar 5 Punkte vorhanden, aber $E$ ist kein selbständiger Punkt, sondern nur der Schnittpunkt der Geraden $AD$ und $BC$.

**Bemerkung.** Die vierte noch mögliche Gleichung:

$$(2) + (3) + (4) + (5) = 180^0$$

entsteht, wenn von der Summe der beiden ersten die dritte subtrahiert wird; sie ist also keine unabhängige Gleichung mehr.

**Auflösung.** In der Figur 29 haben wir 4 Punkte, also sind zu ihrer Festlegung:

$$2 \cdot 4 - 3 = 5$$

Grössen nötig. Da nun 9 Grössen gemessen wurden, so müssen:

$$9 - 5 = 4$$

Bedingungsgleichungen stattfinden. Zunächst haben wir:

$$(8) + (1) + (2) + (3) = 180^0$$
$$(4) + (5) + (6) + (7) = 180^0$$
$$(1) + (6) + (7) + (8) = 180^0$$

Da dadurch die Winkelgleichungen erschöpft sind, so kann nur noch eine Seitengleichung aufgestellt werden, was durch die vorhergehende Aufgabe geschehen ist.

---

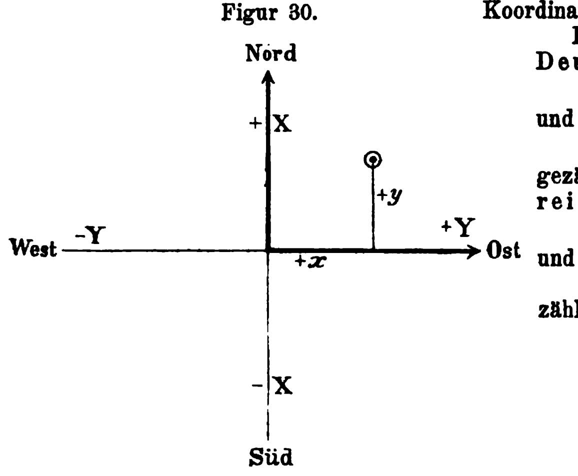
# II. Die Koordinatenaufnahme.

## 1. Einleitung.

**Anmerkung 2.** Die Grundideen der Koordinaten haben wir bereits im I. Teil in den Fragen 151 bis 154 dieses Werkes auseinandergesetzt.

**Frage 43.** Wodurch wird die Lage eines Punktes bei der Feld- oder Landaufnahme festgestellt?

Figur 30.




**Antwort.** Die Lage eines Punktes wird bei der Feld- oder Landaufnahme durch seine Koordinaten festgestellt.

Dabei ist zu bemerken, dass in **Deutschland** die

$+X$ nach Norden

und die

$+Y$ nach Osten

gezählt wird, während man in **Oesterreich und Baden**

$+X$ nach Süden

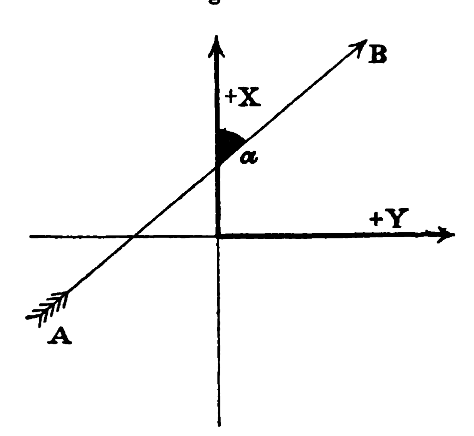
und

$+Y$ nach Westen

zählt.

**Frage 44.** Was versteht man unter dem geodätischen Azimut einer Richtung?

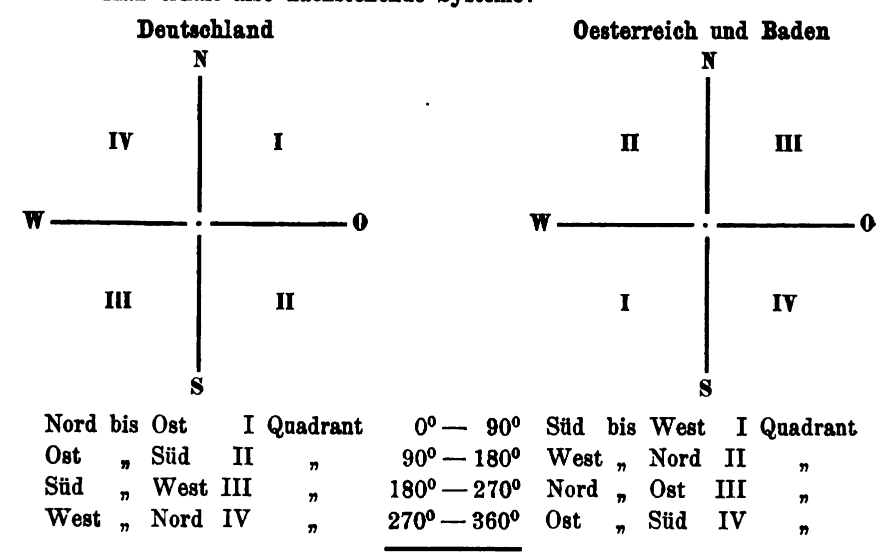
Figur 31.




**Antwort.** Unter Azimut einer Richtung wird jener Winkel verstanden, welcher diese Richtung mit der positiven $X$-Achse einschliesst (in der Figur 31 ist $\alpha$ Azimut der Richtung von $A$ nach $B$). Eine jede Gerade hat also je nach dem Sinne, in welchem sie genommen wird, zwei Azimute, die sich um 180° unterscheiden (Azimut der Richtung $B$ nach $A$ ist $180^0 + \alpha$).

**Anmerkung 3.** Das geodätische Koordinatensystem unterscheidet sich vom analytischen wesentlich. 1) Die Anfangsachse ist im geodätischen System parallel dem Meridian, im analytischen senkrecht darauf. 2) Der Drehungssinn von $+X$ zu $+Y$ geschieht beim geodätischen System im Sinne des Uhrzeigers (positive Drehung), während beim analytischen eine negative Drehung (entgegengesetzt dem Sinne des Uhrzeigers) gebräuchlich ist. Nebenbei sei bemerkt, dass auch die Teilung der Winkelinstrumente eine positive ist.

Man erhält also nachstehende Systeme:




| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nord bis Ost | I | Quadrant | 0° — 90° | Süd | bis | West | I | Quadrant |
| Ost „ Süd | II | „ | 90° — 180° | West | „ | Nord | II | „ |
| Süd „ West | III | „ | 180° — 270° | Nord | „ | Ost | III | „ |
| West „ Nord | IV | „ | 270° — 360° | Ost | „ | Süd | IV | „ |

**Frage 45.** In welcher Beziehung stehen die rechwinkligen Koordinaten zweier Punkte zu dem Azimut der sie verbindenden Strecke?

**Antwort.** Seien:

$x_A y_A$

$x_B y_B$

**Bemerkung.** Man beachte, dass das Azimut entgegengesetzt, d. h.:

$$\alpha_{AB}$$

von der Differenz:

$$y_B - y_A$$

bezeichnet ist, d. h. um das Azimut der Richtung von $A$ nach $B$ zu erhalten, muss man die Koordinaten von $B$ von denen von $A$ abziehen. Die Nichtbeachtung dieser Bemerkung kann bei den polygonometrischen Rechnungen viele Unannehmlichkeiten zur Folge haben.

die Koordinaten zweier Punkte, dann ist nach Antwort auf Frage 22:

$$\text{I} \ldots y_B - y_A = a \sin\alpha_{AB}$$

$$\text{II} \ldots x_B - x_A = a \cos\alpha_{AB}$$

dabei bezeichnet $\alpha_{AB}$ das Azimut der Richtung von $A$ gegen $B$ und $a$ die Entfernung der beiden Punkte.

Durch Division der beiden Gleichungen ergibt sich:

$$\text{III} \ldots \operatorname{tg}\alpha_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

ferner hat man nach der Frage 22:

$$\text{IV} \ldots a = \frac{y_B - y_A}{\sin\alpha_{AB}} = \frac{x_B - x_A}{\cos\alpha_{AB}}$$

---

**Frage 46.** Welche allgemeine Bemerkung ist zur Berechnung des Azimuts aus den Koordinaten zu machen?

**Erkl. 41.** Aus den Grundlehren der Trigonometrie ist bekannt, dass:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

nehmen wir an, es seien $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ gleich bezeichnet, was dann geschehen kann, wenn $\alpha$ im I. oder III. Quadranten liegt, dann bekommen wir für $\operatorname{tg}\alpha$ immer einen positiven Wert.

Ist also nur der Wert für $\operatorname{tg}\alpha$ gegeben, und ist dieser positiv, so kann man nicht entscheiden, ob der Winkel im I. oder im III. Quadranten liegt, d. h. ob man den Winkel $\alpha$ oder $180^0 + \alpha$ zu nehmen hat. Sind aber $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ dem Vorzeichen nach gegeben, dann liegt $\alpha$ im I. Quadranten, wenn diese Werte beide zugleich positiv sind, und im III., wenn sie beide zugleich negativ sind.

**Antwort.** Es ist bekannt, dass zu der Gleichung:

$$\operatorname{tg}\alpha = p$$

zwei Winkelwerte gehören:

$$\alpha \text{ und } 180^0 + \alpha$$

denn wir haben schon früher gezeigt, dass eine Strecke im allgemeinen je nach ihrer Richtung zwei um $180^0$ verschiedene Azimute haben kann (vergl. Erkl. 41).

In der Vermessungskunde ist aber in dem speziellen Falle, den wir im Auge haben, das Vorzeichen des Sinus und des Cosinus bekannt, denn $\sin\alpha_{AB}$ hat das Vorzeichen von:

$$y_B - y_A$$

und $\cos\alpha_{AB}$ hat das Vorzeichen von:

$$x_B - x_A$$

danach kann leicht entschieden werden, in welchem Quadranten der Winkel liegt.

Bezeichnen wir mit $\alpha_{AB}$ den absoluten Wert (ohne Rücksicht auf den für das Vorzeichen genommenen Wert), der zu $\operatorname{tg}\alpha_{AB}$ gehört, dann haben wir folgendes Schema:

| $y_B - y_A$ | $x_B - x_A$ | Azimut | Quadrant |
|---|---|---|---|
| + | + | $\alpha$ | I |
| + | − | $180^0 - \alpha$ | II |
| − | − | $180^0 + \alpha$ | III |
| − | + | $360^0 - \alpha$ | IV |

---

**Frage 47.** Gibt es irgend welche Kontrollformel für die Berechnung des Azimuts?

**Antwort.** Es gibt eine bequeme Kontrollformel für die Berechnung des Azimuts, die wie folgt abgeleitet werden kann.

Es ist (vergl. Erkl. 42):

$$\operatorname{tg}(45 \pm \alpha) = \frac{1 \pm \operatorname{tg}\alpha}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha}$$

Setzt man nun:

$$\operatorname{tg}\alpha_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

so folgt:

$$\operatorname{tg}(45 \pm \alpha) = \frac{(x_B - x_A) \pm (y_B - y_A)}{(x_B - x_A) \mp (y_B - y_A)}$$

und dieses ist die verlangte Formel.

**Erkl. 42.** Setzt man in der allgemeinen Formel:

$$\operatorname{tg}(m \pm n) = \frac{\operatorname{tg}m \pm \operatorname{tg}n}{1 \mp \operatorname{tg}m \cdot \operatorname{tg}n}$$

$\operatorname{tg}m = 1$, d. h. $m = 45^0$, so wird:

$$\operatorname{tg}(45^0 \pm n) = \frac{1 \pm \operatorname{tg}n}{1 \mp \operatorname{tg}n}$$

---

**Frage 48.** Welche wichtige Bemerkung ist zu der vorhergehenden Formel zu machen?

**Antwort.** Die vorhergehende Formel:

$$\operatorname{tg}(45^0 \pm \alpha) = \frac{(x_B - x_A) \pm (y_B - y_A)}{(x_B - x_A) \mp (y_B - y_A)}$$

kontrolliert zwar den Winkel $\alpha$, nicht aber die Richtigkeit der Differenzen:

$$x_B - x_A$$
$$y_B - y_A$$

welche die Grundlage der Rechnung bilden. Auf die Berechnung dieser Differenzen ist besondere Sorgfalt zu verwenden.

Man kann auch nach Jordan die Formel so berechnen:

$$\operatorname{tg}(45^0 + \alpha) = \frac{(x_B + y_B) - (x_A + y_A)}{-(y_B - y_A) + (x_B - x_A)}$$

dann erhält man eine vollends genügende Kontrolle, vorausgesetzt, dass nicht etwa zwei entgegengesetzte Fehler gemacht werden, was sehr unwahrscheinlich ist.

**Bemerkung.** Es ist allgemein zu bemerken, dass durch eine jede Kontrolle nur die Richtigkeit der Rechnung, nicht aber die Richtigkeit der Grundlagen kontrolliert wird. Dieses gilt für alle Kontrollen der Rechenkunst, welche insgesamt auf Transformationen der Rechnungsformeln beruhen.

---

## 2. Aufgaben über Koordinaten.

**Aufgabe 19.** Es seien die Koordinaten zweier Punkte gegeben:

| | $x$ | $y$ |
|---|---|---|
| $A$ | — 141 028·77 | — 713·12 |
| $B$ | — 140 477·95 | — 1564·77 |

Man soll die Entfernung $AB$, sowie das Azimut der Richtung:

$A$ nach $B$

sowie:

$B$ nach $A$

bestimmen.

**Auflösung.** Man hat nach Gl. III, Frage 45:

$$\operatorname{tg}\alpha_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

somit ist das Azimut $\alpha_{AB}$ von $A$ nach $B$ bekannt. Sodann wird:

$$\alpha_{BA} = 180^0 + \alpha_{AB}$$

und man hat für die Entfernung:

$$AB = a$$

**Bemerkung.** Man achte auf das Schema der Rechnung.

die Gleichungen:

$$a = \frac{y_B - y_A}{\sin \alpha_{AB}}$$

womit das Problem gelöst ist.

| | $y$ | | $x$ | |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | $-713 \cdot 12$ | | $-141\,028 \cdot 77$ | $\log \operatorname{tg} \alpha_{AB} = 0 \cdot 1\,892\,555_n$ |
| $B$ | $-1\,564 \cdot 77$ | | $-140\,477 \cdot 95$ | $\alpha_{AB} = 360^0 - 57^0\,6'\,24''$ |
| $y_B - y_A$ | $-851 \cdot 65$ | $x_B - x_A$ | $+550 \cdot 82$ | $= 302^0\,53'\,36''$ |
| $\log(y_B - y_A)$ | $2 \cdot 130\,262_n$ | $\log(x_B - x_A)$ | $2 \cdot 741\,007$ | $\alpha_{BA} = 482^0\,53'\,36''$ |
| $\log \sin \alpha_{AB}$ | $9 \cdot 924\,116_n$ | $\log \cos \alpha_{AB}$ | $1 \cdot 734\,861$ | $= 122^0\,53'\,36''$ |
| $\log a$ | $3 \cdot 006\,146$ | | $3 \cdot 006\,146$ | |

**Bemerkungen.** Es war $y_B - y_A$ negativ, $x_B - x_A$ positiv, also liegt $\alpha_{AB}$ im vierten Quadranten. Da zu $\log \operatorname{tg} \alpha = 9 \cdot 1\,892\,555$ der absolute Wert $57^0\,6'\,24''$ gehört, hat man:

$$\alpha_{AB} = 360^0 - 57^0\,6'\,24''$$

Damit wird:

$$\alpha_{BA} = 180^0 + \alpha_{AB}$$
$$= 360^0 + 122^0\,53'\,36''$$

## Aufgabe mit Resultat.

$y_a = -18\,152 \cdot 94 \qquad x_a = -115\,651 \cdot 17$

$y_b = -21\,902 \cdot 76 \qquad x_b = -112\,753 \cdot 60$

so wird das Azimut:

$$\alpha_{ab} = 307^0\,41'\,38''\,6$$
$$\alpha_{ba} = 127^0\,41'\,38''\,6$$

sowie die Entfernung:

$$\log(ab) = 3 \cdot 6\,756\,764$$

**Aufgabe 20.** Die Koordinaten des Punktes:

| | $x$ | $y$ |
|---|---|---|
| $A$ | $-141\,028 \cdot 77$ | $-713 \cdot 12$ |

sind gegeben, sowie die Entfernung $a$ durch:

$$\log a = 3 \cdot 006\,146$$

und das Azimut:

$$\alpha_{BA} = 302^0\,53'\,36''$$

bezüglich des Punktes $B$. Welche sind die Koordinaten dieses Punktes?

**Auflösung.** Wir rechnen hier nach den Formeln:

$$x_B = x_A + a \cos \alpha_{AB}$$
$$y_B = y_A + a \sin \alpha_{AB}$$

welche unmittelbar aus:

$$x_B - x_A = a \cos \alpha_{AB}$$
$$y_B - y_A = a \sin \alpha_{AB}$$

folgen.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\log \sin \alpha_{AB}$ | $9 \cdot 924\,116_n$ | $\log a \sin \alpha_{AB} = 2 \cdot 930\,262_n$ | $\log a \cos \alpha_{AB} = 2 \cdot 741\,007$ |
| $\log a$ | $3 \cdot 006\,146$ | $a \sin \alpha_{AB} = -851 \cdot 65$ | $a \cos \alpha_{AB} = +550 \cdot 90$ |
| $\log \cos \alpha_{AB}$ | $9 \cdot 734\,861$ | $y_A = -713 \cdot 12$ | $x_A = 141\,028 \cdot 77$ |
| | | $y_B = -1\,564 \cdot 77$ | $x_B = -140\,477 \cdot 97$ |

**Bemerkung.** Von der vorstehenden Aufgabe, welche eine der wichtigsten in der Vermessungskunde ist, werden wir später bei der Berechnung der Polygone einen ausgiebigen Gebrauch machen (vergl. Aufgabe 26).

### Aufgabe mit Resultat.

$y_a = -20\,926{\cdot}11 \qquad x_a = -109\,657{\cdot}72$

$\log a = 3{\cdot}8\,198\,924$

$\alpha_{ab} = 335^0\,10'\,12''\,0$

Man findet:

$y_b = -18\,152{\cdot}94 \qquad x_b = -115\,651{\cdot}17$

---

**Aufgabe 21.** Es seien die Koordinaten zweier Punkte:

| | $y$ | $x$ |
|---|---|---|
| $C =$ | $-712{\cdot}120$ | $-141\,028{\cdot}770$ |
| $B =$ | $-1\,564{\cdot}771$ | $-140\,477{\cdot}954$ |

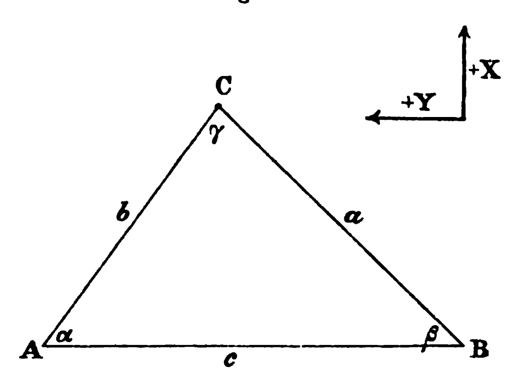
sowie die Winkel:

$\alpha = BCA = 80^0\,3'\,59''$

$\alpha = ABC = 65^0\,19'\,28''$

gegeben, gesucht werden die Koordinaten des Punktes $C$.

Figur 32.




**Bemerkung.** Wir fanden schon in der Aufgabe 19:

$\log a = 3{\cdot}006\,146$

$\alpha_{CB} = 302^0\,53'\,36''$

Nebenrechnung:

$\gamma = 34^0\,36'\,33''$

$\alpha_{CB} = 302\;53\;36$

$180 - \beta = 114\;40\;32$

$\alpha_{CA} = 268^0\,17'\,3''$

$\alpha_{BA} = 188\;13\;4$

**Auflösung.** Wir berechnen zunächst den Winkel $\gamma$ nach:

$$\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$$

so dass also:

| | | | | Erg. zu 90⁰ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha =$ | 80⁰ | 3' | 59'' | 9 | 56 | 1 |
| $\beta =$ | 65 | 19 | 28 | 24 | 40 | 32 |
| $\gamma =$ | 34 | 36 | 33 | | | |
| Kontrolle | 360⁰ | 0' | 0'' | | | |

**Bemerkung.**

$9^0\,56'\,1'' = 90^0 - 80^0\,3'\,59$

Sodann rechnen wir die Seiten:

$$b = \frac{a}{\sin\alpha}\sin\beta$$

$$c = \frac{a}{\sin\alpha}\sin\gamma$$

nachdem wir uns aus:

$$\operatorname{tg}\alpha_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B}$$

und

$$a = \frac{y_C - y_B}{\sin\alpha_{BC}} = \frac{x_C - x_B}{\cos\alpha_{BC}}$$

$a$ berechnet haben (vergl. Bemerkung).

Die Rechnung stellt sich wie folgt:

$\log a = 3{\cdot}006\,146 \qquad \log\sin\beta \quad 9{\cdot}958414$

$\log\sin\beta = 9{\cdot}993\,440 \qquad \log\frac{a}{\sin\alpha} \quad 3{\cdot}012\,706$

$\log\sin\gamma \quad 9{\cdot}754\,329$

$\log b = 2{\cdot}971\,120$

$\log c = 2{\cdot}767\,035$

Nun bedürfen wir der Azimute. Ueber diese muss aus der Situation entschieden werden. Für unsern Fall haben wir:

$$\alpha_{CA} = \alpha_{CB} - \gamma$$

$$\alpha_{BA} = \alpha_{CB} - (180 - \beta)$$

also (vergl. Nebenrechnung):

$\alpha_{CA} = 268^0\,17'\,3''$

$\alpha_{BA} = 188^0\,13'\,4''$

$$x_A = x_C + b \cos \alpha_{BA}$$
$$y_A = y_C + b \sin \alpha_{CA}$$

Nun wird gerechnet nach den Formeln:

$$x_A = x_B + c \cos \alpha_{BA}$$
$$y_A = y_B + c \sin \alpha_{BA}$$

Die Doppelrechnung gibt zugleich eine Kontrolle. Man hat also nachstehendes Schema:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\log \sin \alpha_{CA} = 9{\cdot}999\,805_n$ | | $\log \sin \alpha_{BA} = 9{\cdot}155\,141_n$ | |
| $\log b = 2{\cdot}971\,120$ | | $\log a = 2{\cdot}767\,035$ | |
| $\log \cos \alpha_{CA} = 8{\cdot}476\,288_n$ | | $\log \cos \alpha_{BA} = 9{\cdot}995\,517_n$ | |
| $\log (x_A - x_C) = 1{\cdot}447\,408_n$ | | $\log (x_A - x_B) = 2{\cdot}762\,552_n$ | |
| $\log (y_A - y_C) = 2{\cdot}970\,925_n$ | | $\log (y_A - y_B) = 1{\cdot}922\,176_n$ | |
| — 935·244 | — 83·594 | — 28·016 | — 578·831 |
| — 713·120 | — 1564·771 | — 141 028·770 | — 140 477·954 |
| — 1648·364 | — 1648·365 | — 141 056·786 | — 141 056·785 |

Die Koordinaten des Punktes sind also:

$$x = -141\,056{\cdot}786 \text{ m}$$
$$y = -1648{\cdot}364 \text{ m}$$

---

**Aufgabe 22.** Die Koordinaten des Punktes $C$:

$$y = -713{\cdot}120 \qquad x = -141\,028{\cdot}770$$

sind gegeben, ferner die Entfernung zweier Punkte $AB$ durch:

$$\log AB = 2{\cdot}075\,474$$

und das Azimut:

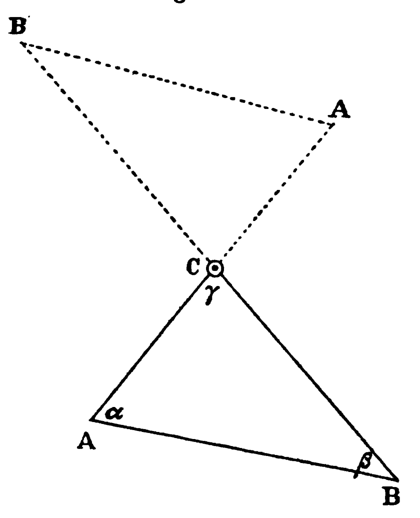
$$\alpha_{AB} = 81^0\,10'\,3''$$

sowie die Winkel:

$$\beta = ABC = 29^0\,22'\,9''$$
$$\alpha = BAC = 51^0\,\;3'\,2''$$

Es sollen die Koordinaten der beiden Punkte $A$ und $B$ berechnet werden.

Figur 33.




**I. Auflösung.** Mit Hilfe des gegebenen Azimuts leiten wir zunächst die Azimute der Seiten $AC$ und $BC$ ab. Wir finden:

$$\alpha_{AC} = 30^0\;\,7'\;\,1''$$
$$\alpha_{BC} = 290^0\,32'\,12''$$

Diese Azimute werden am besten auf Grund einer vorhandenen Skizze abgeleitet. Denn wie Figur 33 zeigt, liegt hier eine zweifache Lösung vor.

Dann werden die beiden Seiten $AC$ und $BC$ bestimmt durch die Formel:

$$AC = \frac{AB}{\sin\gamma} \sin\beta$$
$$BC = \frac{AB}{\sin\gamma} \sin\alpha$$

Dadurch sind aber Entfernungen und Azimute bekannt, so dass nunmehr die Aufgabe 22 vorliegt.

Das nachstehende Schema gibt die Einzelheiten der Rechnung.

$\log AB = 2{\cdot}075\,474$
$\log \sin\gamma = 9{\cdot}993\,900$

$\log \sin\alpha_{AC} = 9{\cdot}70{\cdot}502$
$\log AC = 1{\cdot}772\,155$
$\log \cos\alpha_{AC} = 9{\cdot}937\,010$

$\log (y_A - y_C) = 1{\cdot}472\,657$
$\log (x_A - x_C) = 1{\cdot}709\,174$

$\log \sin\alpha = 9{\cdot}890\,809$
$\log AB : \sin\gamma = 2{\cdot}081\,574$
$\log \sin\beta = 9{\cdot}690\,581$

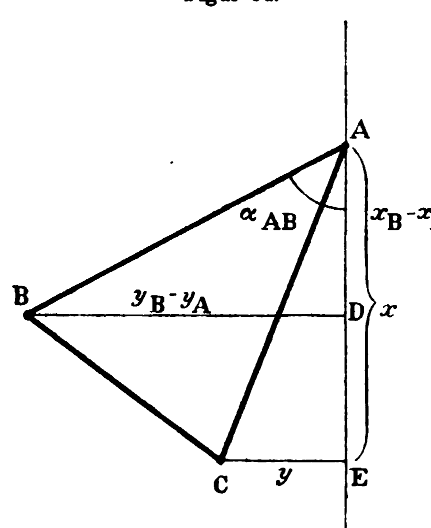
$\log \sin\alpha_{BC} = 9{\cdot}971\,491$
$\log BC = 1{\cdot}972\,383$
$\log \cos\alpha_{BC} = 9{\cdot}545\,011$

$\log (y_B - y_C) = 1{\cdot}943\,874$
$\log (x_B - x_C) = 1{\cdot}517\,394$

| | $A$ | | $B$ | |
|---|---|---|---|---|
| $y_C$ | $-713{\cdot}120$ | $-141\,028{\cdot}770$ | $-713{\cdot}120$ | $-141\,028{\cdot}770$ |
| $y_A - y_C$ | $+29{\cdot}693$ | $+51{\cdot}189$ | $-87{\cdot}877$ | $+32{\cdot}915$ |
| | $y_A = -683{\cdot}427$ | $x_A = -140\,977{\cdot}591$ | $y_B = -800{\cdot}997$ | $x_B = -140\,995{\cdot}855$ |

Zur Kontrolle könnte man aus diesen beiden Werten ihre Entfernung und ihr Azimut bestimmen.

Figur 34.




**Erkl. 48.** Man hat:

$$y = AC \sin(\alpha_{AB} - A)$$

ferner ist im $\triangle ABC$:

$$AC = AB \frac{\sin B}{\sin C}$$

und im $\triangle ABD$:

$$\frac{BD}{\sin BAD} = AB = \frac{y_B - y_A}{\sin\alpha_{AB}}$$

**II. Auflösung.** Man kann rechnen wie folgt: Zunächst wird berechnet:

$$\operatorname{tg}\alpha_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Dann wird:

$$x_C = x_A + AE = x_A + x$$
$$y_C = y_A + CE = y_A + y$$

Man hat aber, wenn $ABC$ die Winkel an den Punkten $A$, $B$, $C$ im $\triangle ABC$ bezeichnen:

$$x = AC\cos(\alpha_{AB} - A)$$
$$= AB \cdot \frac{\sin B}{\sin C} \cdot \cos(\alpha_{AB} - A)$$
$$= \frac{x_B - x_A}{\cos\alpha_{AB}} \cdot \frac{\sin B}{\sin C} \cos(\alpha_{AB} - A)$$

also:

$$x = (x_B - x_A)\left(\frac{\sin B}{\sin C}\right)\frac{\cos(\alpha_{AB} - A)}{\cos\alpha_{AB}}$$

Analog ergibt sich (vergl. Erkl. 43):

$$y = (y_B - y_A)\left(\frac{\sin B}{\sin C}\right)\frac{\sin(\alpha_{AB} - A)}{\sin\alpha_{AB}}$$

Ist diese berechnet, so folgt:

$$x_C = x_A + x$$
$$y_C = y_A + y$$

Man kann diese Formeln zur eventuellen Kontrolle verwenden.

## Beispiel zur Uebung.

| | $x$ | $y$ |
|---|---|---|
| $A$ | $-18\,755{\cdot}73$ | $-1\,123\,709{\cdot}6$ |
| $B$ | $-18\,152{\cdot}94$ | $-115\,651{\cdot}17$ |
| $C$ | $-21\,902{\cdot}76$ | $-112\,753{\cdot}60$ |

$\alpha = 93^0\,28'\,50''$
$\beta = 41\;\;53\;\;35$
$\gamma = 44\;\;47\;\;35$

$\log a = 3{\cdot}6\,756\,764$
$\log b = 3{\cdot}5\,010\,871$
$\log c = 3{\cdot}5\,231\,128$

$\varphi_{CB} = 127^0\,41'\,38''\,6$

**Erkl. 44.** Subtrahieren wir die zweite von der ersten, so folgt:

$$x_C(\operatorname{tg}\alpha_{AC} - \operatorname{tg}\alpha_{BC}) = y_A - y_B - x_A \operatorname{tg}\alpha_{AC} + x_B \operatorname{tg}\alpha_{AB}$$

Damit wird:

$$x_C = \frac{y_A - y_B}{\operatorname{tg}\alpha_{AC} - \operatorname{tg}\alpha_{AB}} - \frac{x_A \operatorname{tg}\alpha_{AC} - x_B \operatorname{tg}\alpha_{AB}}{\operatorname{tg}\alpha_{AC} - \operatorname{tg}\alpha_{AB}}$$

Aus $x_C$ folgt leicht:

$$y_C = y_A - x_A \operatorname{tg}\alpha_{AC} - x_C \operatorname{tg}\alpha_{AC}$$

Aus diesen lassen sich (vergl. Erkl. 44) $y_C$ und $x_C$ berechnen.

Wir könnten diese Aufgabe noch dadurch lösen, dass wir zuerst die Entfernung $AB$ berechnen, sodann mit Hilfe des Azimuts $AB$ und der gegebenen Azimute $AC$ und $BC$ die Winkel bei $A$ und $B$ im Dreieck $ABC$. Wir überlassen die Ausführung dieser Andeutungen dem Leser.

Die vorstehende Auflösung wird dann mit Vorteil angewendet, wenn der Punkt $C$ nicht aus zwei, sondern aus mehreren bestimmt werden soll, weil die letzten Gleichungen für die Auflösung nach der Methode der kleinsten Quadrate sehr bequem sind. Wir kommen auf dieses Problem noch zurück.

---

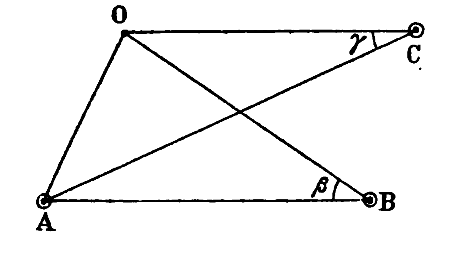
**Aufgabe 23.** Es seien $A$, $B$, $C$ gegebene Punkte (vergl. Figur 35).

Ferner sind die Winkel:

$$ABO = \beta$$
$$ACO = \gamma$$

gemessen worden. Welche sind die Koordinaten des Punktes $O$?

Figur 35.




**Auflösung.** Hier berechnen wir aus den gegebenen Punkten zunächst die Azimute aus:

$$\operatorname{tg}\alpha_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}$$

$$\operatorname{tg}\alpha_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

und mit diesen und den gegebenen Winkeln $\beta$, $\gamma$ die Azimute:

$$\alpha_{OC} \text{ und } \alpha_{OB}$$

Dann haben wir analog der vorhergehenden Aufgabe:

$$y_O - x_O \operatorname{tg}\alpha_{OB} = y_B - x_B \operatorname{tg}\alpha_{OB}$$
$$y_O - x_O \operatorname{tg}\alpha_{OC} = y_C - x_C \operatorname{tg}\alpha_{OC}$$

Bezüglich dieser Aufgabe gilt das bei der vorigen Gesagte.

---

**Aufgabe 24.** Es soll ein verloren gegangener Dreieckspunkt, dessen Koordinaten $x$ und $y$ gegeben sind, wieder bestimmt werden. Seine ungefähre Lage ist auf $\pm 20$ m im Umkreise bekannt.

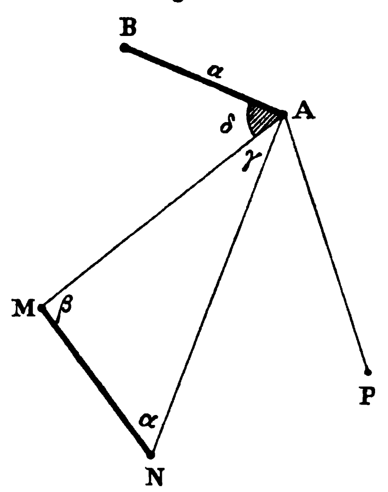
**Bemerkung.** In Oesterreich wurden viele Katastralpunkte in nachstehender Weise festgelegt. Man grub eine etwa 2 m tiefe Stolle, füllte dieselbe mit Glasscherben etwa 1 bis 2 dm hoch bei einer Breite von 3 bis 4 dm. Auf diese kam ein mit eingemeisseltem K V (d. h. Katastralvermessung) und oben mit einem $\times$ versehener Stein, der wieder mit Erde verschüttet wurde. Ueber das Ganze wurde ein

**Auflösung.** Man stellt sich in der Nähe des zu suchenden Punktes (also $A$ in der Figur 36) auf und bestimmt die Koordinaten des Endpunktes (etwa nach Pothenot aus drei bekannten Punkten $M$, $N$, $P$ oder in anderer durch Umstände gegebener Weise, z. B. von $M$ und $N$ aus durch die Messung der Winkel $\alpha$, $\beta$ eventuell auch $\gamma$). Die Koordinaten des Punktes $A$ seien $X_A$ und $Y_A$.

Der gesuchte Punkt $B$ wird bestimmt sein, wenn die Entfernung $BA = a$, ferner der

1 bis 2 m hoher Hügel errichtet. Derselbe verschwand mit der Zeit und so ist man gezwungen, die Punkte zu suchen. Eine recht unerquickliche Arbeit, nachdem sich niemand durch volle 30 Jahre um die Katastralpunkte gekümmert hatte.

Figur 36.




Winkel $\delta = BAM$ bekannt sein wird. Wir rechnen:

$$\operatorname{tg} \alpha_{AM} = \frac{Y_M - Y_A}{X_M - X_A}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{AB} = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A}$$

Dann ist:

$$\delta = \alpha_{AB} - \alpha_{AM}$$

ferner wird:

$$a = \frac{Y_B - Y_A}{\sin \alpha_{AB}} \doteq \frac{X_B - X_A}{\cos \alpha_{AB}}$$

Wird daher von $M$ aus mit Hilfe des Theodolits die Richtung $AB$ abgesteckt und auf dieser die Länge $a$ abgemessen, so trifft man den gesuchten Punkt.

---

**Aufgabe 25.** Für zwei Punkte, die auf zwei verschiedenen Sektionsblättern liegen, soll der Randpunkt ($M$ in der Figur 37) der verbindenden Geraden bestimmt werden.

**Auflösung.** Seien:

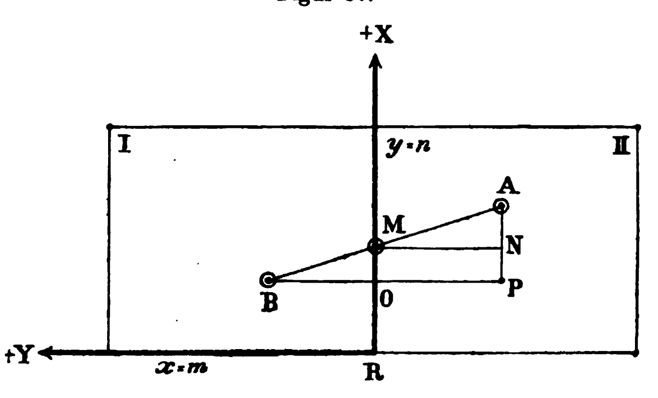
$$x = m$$
$$y = n$$

die Koordinaten des Sektionsrandes der einzelnen Detailblätter I und II und $A$ und $B$ (vergl. Figur 37) die gegebenen Punkte.

Dann folgt aus den ähnlichen Dreiecken $AMM \sim ABP$:

$$OM : PA = BO : BP$$

Figur 37.



**Bemerkung.** Man hat gewöhnlich die Azimute, dann wird wegen:

$$\operatorname{tg} \alpha_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

auch:

$$x_M - x_B = \operatorname{ctg} \alpha_{BA} (n - y_B)$$

Im Sinne der analytischen Geometrie besagt diese Gleichung, dass die drei Punkte $AMB$ auf einer Geraden liegen.

oder da:

$$OM = X_M - X_B$$
$$PA = X_A - X_B$$
$$BO = Y_M - Y_B = n - y_B$$
$$BP = Y_A - Y_B$$

auch:

$$1) \ldots X_M - X_B = \frac{X_A - X_B}{Y_A - Y_B} (n - y_B)$$

Nun ist aber:

$$RM = RO + OM = (x_B - m) + (x_M - x_B)$$

also:

$$2) \ldots RM = x_M - m$$

Aus der Gl. 1) berechnet man sich $X_M$ und aus der Gl. 2) $RM$, wodurch der Punkt $M$ bestimmt ist.

Analog verfährt man in dem Falle, wo der Punkt $M$ auf die Ordinate zu liegen kommt.

---

**Aufgabe 26.** Bei einer Vermessung wurden zwei trigonometrisch festgelegte Punkte:

| | $y$ | $x$ |
|---|---|---|
| $A$ | — 17 398·38 | — 112 069·97 |
| $B$ | — 18 196·35 | — 111 948·05 |

durch einen Polygonzug miteinander verbunden, welcher fünf Punkte umfasste.

Das Azimut von $A$ bis 1 ward gefunden:

259° 0′ 25″

die Brechungswinkel und Seitenlängen waren:

1) 204° 15′ 10″ ($A$1) = 162·53 m
2) 193° 45′ 8″ (12) = 139·82 m
3) 189° 57′ 7″ (23) = 152·13 m
4) 149° 45′ 5″ (34) = 138·24 m
5) 153° 10′ 2″ (5$B$) = 135·33 m

Es sollen die Koordinaten der einzelnen Punkte bestimmt werden.

**Auflösung.** Wir haben zunächst die Azimute der einzelnen Seiten zu berechnen. Das Anfangsazimut:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $A$ 1 = | 259° | 0′ | 25″ | |
| | 204 | 15 | 10 | Brechungswinkel 1 |
| | 463 | 15 | 35 | |
| | — 180 | | | |
| | 283 | 15 | 35 | Azimut 12 |
| | 193 | 45 | 8 | Brechungswinkel 2 |
| | 477 | 0 | 43 | |
| | — 180 | | | |
| | 297 | 0 | 43 | Azimut 23 |
| | 189 | 57 | 7 | Brechungswinkel 3 |
| | 486 | 57 | 50 | |
| | — 180 | | | |
| | 306 | 57 | 59 | Azimut 34 |
| | 149 | 45 | 5 | Brechungswinkel 4 |
| | 456 | 42 | 55 | |
| | — 180 | | | |
| | 276 | 42 | 55 | Azimut 45 |
| | 153 | 10 | 2 | Brechungswinkel 5 |
| | 429 | 52 | 57 | |
| | — 180 | | | |
| | 249° | 52′ | 57″ | Azimut 5 $B$ |

Auf diese Weise haben wir die Azimute erhalten.

**Bemerkung.** Um das Azimut $A1$ zu erhalten stellt man sich in $A$ auf und visiert einen gegebenen Punkt, etwa $M$, und bestimmt zugleich den Winkel $MA1$. Dann hat man:

$$\operatorname{tg} \alpha_{AM} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A}$$

und

$$\alpha_{A1} = A_{AM} \pm \sphericalangle MA1$$

Dieses wird gewöhnlich sofort bei der Bestimmung des Punktes $A$ absolviert.

Dann wird gerechnet nach den Formeln:

$$x_1 = x_A + (A1) \cos \alpha_{A1}$$
$$y_1 = y_A + (A1) \sin \alpha_{A1}$$
$$x_2 = x_1 + (12) \cos \alpha_{12}$$
$$y_2 = y_1 + (12) \sin \alpha_{12}$$
u. s. w.

wobei $(A1)$ die Entfernung $A$ von 1, also 162·53 m bezeichnet, analog $(12) = 139 \cdot 82$ m u. s. w. Nachstehendes Schema gibt den Gang der Rechnung.

## Berechnung des Polygonzuges.

| | Azimut | Seitenlänge | | | $\Delta y$ | $\Delta x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1) | 259° 0′ 25″ | 162·53 | 9·99 196$_n$ | | | |
| | | | 2·21 093 | 2·20 289$_n$ | | |
| | 204° 15′ 10″ | | 9·28 033$_n$ | 1·49 126$_n$ | −159·55 | −30·99 |
| 2) | 283° 15′ 35″ | 139·82 | 9·98 826$_n$ | | | |
| | | | 2·14 557 | 2·13 383$_n$ | | |
| | 193° 45′ 8″ | | 9·36 053 | 1·50 610 | −136·09 | +32·07 |
| 3) | 297° 0′ 43″ | 152·13 | 9·94 983 | | | |
| | | | 2·18 221 | 2·13 204$_n$ | | |
| | 189° 57′ 7″ | | 9·65 722 | 1·83 943 | −135·53 | +69·09 |
| 4) | 306° 57′ 50″ | 138·24 | 9·90 255$_n$ | | | |
| | | | 2·14 063 | 2·04 318$_n$ | | |
| | 149° 45′ 5″ | | 9·77 910 | 1·91 973 | −110·45 | +83·13 |
| 5) | 276° 42′ 55″ | 130·44 | 9·99 701$_n$ | | | |
| | | | 2·11 541 | 2·11 242 | | |
| | 153° 10′ 2″ | | 9·06 795 | 1·18 336 | −129·54 | +15·25 |
| 6) | 249° 52′ 57″ | 135·33 | 9·97 266$_n$ | | | |
| | | | 2·13 139 | 2·10 405$_n$ | | |
| | | | 9·53 650$_n$ | 1·66 789$_n$ | −127·07 | −46·55 |

Dieser Zug führte von einem Punkte, dessen Koordinaten waren:

$y_A = -17\,398 \cdot 38 \qquad x_A = -112\,069 \cdot 97$

bis zum Punkte:

$y_B = -18\,196 \cdot 35 \qquad x_B = -111\,978 \cdot 05$

Beide Punkte waren trigonometrisch bestimmt und ausgeglichen. Man hat nun nachstehende Rechnung:

| | $y$ | | | $x$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_A =$ | −17 398·38 | | $x_A =$ | −112 069·97 | |
| | −159·55 | | | −30·99 | |
| 1) | −17 557·93 | +0·04 | | −112 100·96 | −0·01 |
| | −136·09 | | | +32·07 | |
| 2) | −17 694·02 | +0·08 | | −112 068·89 | −0·02 |
| | −135·53 | | | +69·09 | |
| 3) | −17 829·55 | +0·13 | | −112 999·80 | −0·04 |
| | −110·45 | | | +83·13 | |
| 4) | −17 940·00 | +0·17 | | −111 916·67 | −0·05 |
| | −129·54 | | | +15·25 | |
| 5) | −18 069·54 | +0·21 | | −111 901·42 | −0·06 |
| | −127·07 | | | −46·55 | |
| $(y_B)$ | −18 196·61 | +0·26 | $(x_B)$ | −111 947·97 | −0·08 |
| Statt $y_B$ | −18 196·35 | | Statt $x_B$ | −111 948·05 | |

Wir haben demnach Unterschiede:

$$y_B - (y_B) = +0{\cdot}26\,. \qquad x_B - (x_B) = -0{\cdot}08$$

Diese wollen wir gleichmässig verteilen, also da 6 Punkte sind:

$$\frac{+0{\cdot}26}{6} = +0{\cdot}04 \qquad \frac{-0{\cdot}08}{6} = -0{\cdot}01$$

Die Reste:

$$-0{\cdot}02 \qquad -0{\cdot}02$$

wollen wir wie folgt verteilen:

$$6:2 = 3 \qquad 6:2 = 3$$

also wollen wir immer den dritten Punkt um $+0{\cdot}05$ resp. $-0{\cdot}02$ statt $+0{\cdot}04$ resp. $-0{\cdot}01$ korrigieren. Diese Korrektionen schreiben wir neben die Koordinaten in der obigen Berechnung:

So dass wir nachstehende Koordinaten der Punkte erhalten:

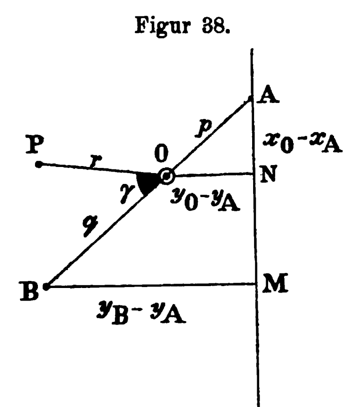
| $y$ | $x$ |
|---|---|
| — 17 557·89 | — 112 100·97 |
| — 17 693·96 | — 112 068·91 |
| — 17 829·42 | — 111 999·84 |
| — 17 939·83 | — 111 916·72 |
| — 18 069·33 | — 111 901·48 |

**Bemerkung.** Die gleichmässige Verteilung der Fehler dürfte sich für die Praxis, wo man keine weitläufigen theoretischen Berechnungen ausführen kann, am besten empfehlen.

**Aufgabe 27.** Auf der Verbindungslinie zweier Punkte, deren Koordinaten gegeben sind, befindet sich ein Punkt, dessen Abstände von beiden Punkten gegeben sind.

Welche sind seine Koordinaten?

Figur 38.




**Auflösung.** Es seien $x_A y_A$ und $x_B y_B$ die gegebenen Koordinaten und

$$OA = p, \quad OB = q$$

(vergl. Figur 38) die gegebenen Entfernungen. Bezeichnen wir die Koordinaten des Punktes $O$ mit $x_O y_O$, dann ist:

$$y_O - y_A : p = y_B - y_A : p + q$$
$$x_O - x_A : p = x_B - x_A : p + q$$

also haben wir:

$$y_O = y_A + \frac{p}{p+q}(y_B - y_A)$$
$$x_O = x_A + \frac{p}{p+q}(x_B - x_A)$$

**Aufgabe 28.** Es seien wieder die Punkte $A$, $B$, $C$ wie in der vorigen Aufgabe bestimmt. Es gehe von $O$ aus ein Strahl $OP$ von der Länge $r$ unter einem Neigungswinkel $\gamma$ gegen die Richtung $AB$. Welche sind die Koordinaten des Punktes $P$?

**Auflösung.** Nachdem die Koordinaten von $O$ gegeben sind, hat man:

$$\operatorname{tg} \alpha_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

ferner:

$$\alpha_{OP} = \alpha_{AB} + \gamma$$

Dann ist aber:

$$x_P - x_O = r \cos \alpha_{OP}$$
$$y_P - y_O = r \sin \alpha_{OP}$$

Sei $\gamma = 90^0$, dann wird:

$$r \cos \alpha_{OP} = -r \sin \alpha_{AB} = -r \frac{y_B - y_A}{p+q}$$

und analog:

$$r \sin \alpha_{OP} = +r \frac{x_B - x_A}{p+q}$$

also wenn wir diese und die obigen Formeln vereinigen:

$$x_P = x_A + \frac{p}{p+q}(x_B - x_A) - \frac{r}{p+q}(y_B - y_A)$$
$$y_P = y_A + \frac{p}{p+q}(y_B - y_A) + \frac{r}{p+q}(x_B - x_A)$$

**Erkl. 45.** Es ist:

$$\cos(\alpha_{OP}) = \cos(\alpha_{AB} + 90^0) = -\sin \alpha_{AB}$$

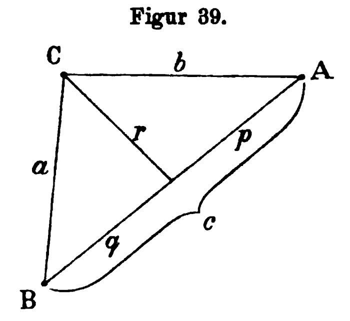
und

$$\sin(\alpha_{OP}) = \sin(\alpha_{AB} + 90^0) = +\cos \alpha_{AB}$$

---

**Aufgabe 29.** Die Koordinaten zweier Punkte $A$ und $B$ seien gegeben. Es werden die Koordinaten eines Punktes $C$ gesucht, der von $A$ um die Strecke $b$ und von $B$ um die Strecke $a$ absteht.

Figur 39.




**Auflösung.** Man kann diese Aufgabe auf die vorige reduzieren.

Es ist (vergl. Figur 39):

$$b^2 = r^2 + p^2$$
$$a^2 = r^2 + q^2$$

also:

$$b^2 - a^2 = p^2 - q^2 = (p+q)(p-q)$$

da nun:

$$p + q = c$$

so wird:

$$p - q = \frac{b^2 - a^2}{p+q} = \frac{b^2 - a^2}{c}$$

also:

$$p = \frac{1}{2}\frac{c^2 + b^2 - a^2}{c}$$
$$q = \frac{1}{2}\frac{c^2 - b^2 + a^2}{c}$$

und endlich:

$$r = \sqrt{b^2 - p^2} = \sqrt{a^2 - q^2}$$

zugleich als Probe.

**Bemerkung.** Hat man:

$$r = \sqrt{b^2 - p^2}$$

auszurechnen, so schreibe man:

$$r = \sqrt{(b+p)(b+q)}$$

und

$$\log r = \frac{1}{2}\log(b+q) + \frac{1}{2}\log(b+q)$$

---

## 3. Das Pothenotsche Problem.

**Anmerkung 4.** Die nachstehende wichtige Aufgabe wird allgemein nach einem französischen Mathematiker Pothenot (Laurent, Professor der Mathematik zu Paris) benannt, der im Jahre 1692 eine Lösung dieser ursprünglich schon von Ptolemaeus gelösten Aufgabe gegeben hat. Wegen ihrer eminent praktischen Bedeutung beschäftigen wir uns mit ihr hier eingehender.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

**Der ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert, um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft.

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

---

☛ Das **vollständige**

## Inhaltsverzeichnis

### der bis jetzt erschienenen Hefte

kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

---

**Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.**

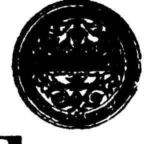
---

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

1311. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Vermessungskunde (Geodäsie).
Zweiter Teil.
Forts. v. Heft 1310. — Seite 49—64.
Mit 5 Figuren.

# Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten
erläutert durch
**viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,**
aus allen Zweigen
der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — **aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie**; des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
**zum einzig richtigen und erfolgreichen**
**Studium zur Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

**Dr. Adolph Kleyer,**
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in **Frankfurt a. M.**
unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

# Vermessungskunde
## (Geodäsie).
### Zweiter Teil.

Nach **System Kleyer** bearbeitet von **Dr. W. Láska.**
Fortsetzung von Heft 1310. — Seite 49—64. Mit 5 Figuren.

**Inhalt:**



**Stuttgart 1894.**
Verlag von Julius Maier.

**Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.**

# PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar **in vollständig gelöster Form,** mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann **auch alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist **ein Anhang von ungelösten Aufgaben beigegeben**, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien,** Schullehrer-**Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

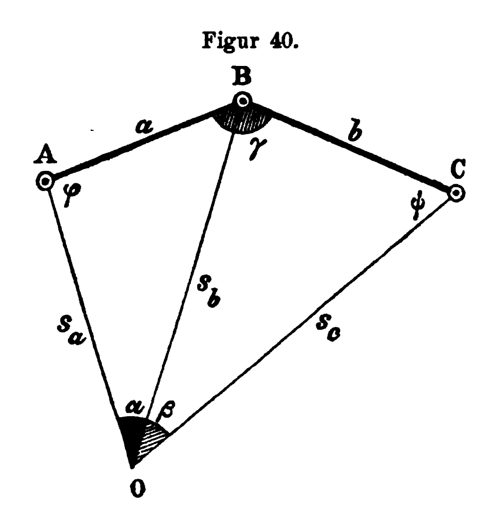
Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht **vergessenen** mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige Kraft** verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. **Kleyer,** Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen und **wird** deren **Erledigung** thunlichst berücksichtigt.

**Stuttgart.** **Die Verlagshandlung.**

**Frage 49.** Worin besteht das Pothenotsche Problem?

Figur 40.




**Bemerkung.** Es liegen 4 Punkte $A$, $B$, $C$, $O$ vor, also sind zu ihrer Bestimmung (vergl. Frage 9):

$$2 \cdot 4 - 3 = 5$$

Grössenangaben nötig, d. h.:

$$a, \; b, \; \gamma, \; \alpha, \; \beta.$$

Die übrigen Stücke lassen sich berechnen.

**Antwort.** Das Pothenotsche Problem bestimmt durch blosse Winkelmessungen die Lage irgend eines Standpunktes, wenn drei sichtbare, ihrer Lage nach gegebene Punkte vorliegen. Seien also (vergl. Fig. 40) die drei Punkte $A$, $B$, $C$ gegeben und zwar ihrer Lage nach (d. h. durch ihre Koordinaten), dann kennen wir die Längen:

$$AB = a, \; BC = b$$

und den Winkel:

$$ABC = \gamma$$

Nehmen wir weiter an, wir hätten vom Punkte $O$ die Punkte $A$, $B$, $C$ anvisiert, dann kennen wir auch die Winkel:

$$AOB = \alpha$$
$$BOC = \beta$$

Durch diese Grössen lassen sich die noch unbekannten Entfernungen:

$$OA = s_a$$
$$OB = s_b$$
$$OC = s_c$$

berechnen.

---

**Frage 50.** Wie werden die Grössen:

$$s_a \quad s_b \quad s_c$$

der Frage 49 erhalten?

**Erkl. 46.** Die Summe aller Winkel im Viereck beträgt 360°, also ist:

$$\alpha + \beta + \gamma + \varphi + \psi = 360^0$$

woraus die nebenstehende Formel folgt.

**Erkl. 47.** Wir haben zunächst:

$$a \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha} = b \frac{\sin \psi}{\sin \beta}$$

woraus:

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{b}{a} \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

folgt.

**Antwort.** Um die Grössen:

$$s_a \quad s_b \quad s_c$$

berechnen zu können, führen wir zwei Winkel

$$\sphericalangle BAO = \varphi$$
$$\sphericalangle BCO = \psi$$

ein, sodann wird (vergl. Erkl. 46):

$$\text{I} \ldots \varphi + \psi = 360^0 - (\alpha + \beta + \gamma)$$

Sodann haben wir nach dem Sinussatze im $\triangle ABO$:

$$s_b = a \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha}$$

und analog im $\triangle OBC$:

$$s_b = b \frac{\sin \psi}{\sin \beta}$$

also durch Gleichsetzung beider Formeln (vergl. Erkl. 47):

$$\text{II} \ldots \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{a}{b} \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

Durch die Gleichungen I und II ist das Problem gelöst, denn dann wird:

$$\text{III} \ldots s_a = \frac{a}{\sin\alpha} \sin(\varphi + \alpha)$$

$$\text{IV} \ldots s_c = \frac{b}{\sin\beta} \sin(\psi + \beta)$$

während wir oben:

$$\text{V} \ldots s_b = \frac{a}{\sin\alpha} \sin\varphi = \frac{b}{\sin\beta} \sin\psi$$

fanden.

---

**Frage 51.** In welcher Weise werden die Gleichungen I und II am bequemsten aufgelöst.

**Antwort.** Um die Gleichungen I und II am bequemsten auflösen zu können, wendet man folgendes Verfahren an:

Man setzt:

$$\frac{a \sin\beta}{b \sin\alpha} = \operatorname{tg}\mu = \frac{\sin\psi}{\sin\varphi}$$

sodann wird (vergl. Erkl. 48):

$$\frac{\sin\varphi - \sin\psi}{\sin\varphi + \sin\psi} = \frac{1 - \operatorname{tg}\mu}{1 + \operatorname{tg}\mu}$$

Nun ist aber:

$$\sin\varphi - \sin\psi = 2 \sin\frac{\varphi - \psi}{2} \cos\frac{\varphi + \varphi}{2}$$

$$\sin\varphi - \sin\psi = 2 \cos\frac{\varphi - \psi}{2} \sin\frac{\varphi + \psi}{2}$$

also:

$$\frac{\sin\varphi - \sin\psi}{\sin\varphi + \sin\psi} = \operatorname{tg}\frac{\varphi - \psi}{2} \operatorname{ctg}\frac{\varphi + \psi}{2}$$

Ferner ist (vergl. Erkl. 49):

$$\frac{1 - \operatorname{tg}\mu}{1 + \operatorname{tg}\mu} = \operatorname{tg}(45^0 + \mu)$$

so dass wir also erhalten:

$$\text{VI} \ldots \operatorname{tg}\frac{\varphi - \psi}{2} = \operatorname{tg}\frac{\varphi + \psi}{2} \operatorname{ctg}(45^0 + \mu)$$

Da nun $\varphi + \psi$ und $\mu$ bekannt, so berechnet man leicht aus dieser Gleichung $\varphi$ und $\psi$.

**Erkl. 48.** Setzt man:

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\sin\psi}{\sin\varphi}$$

so wird:

$$1 \pm \operatorname{tg}\mu = 1 \pm \frac{\sin\psi}{\sin\varphi}$$

also:

$$1 + \operatorname{tg}\mu = \frac{\sin\varphi + \sin\psi}{\sin\varphi}$$

$$1 - \operatorname{tg}\mu = \frac{\sin\varphi - \sin\psi}{\sin\varphi}$$

Wird die letzte der beiden Gleichungen durch die erste dividiert, so folgt:

$$\frac{1 - \operatorname{tg}\mu}{t + \operatorname{tg}\mu} = \frac{\sin\varphi - \sin\psi}{\sin\varphi + \sin\psi}$$

**Erkl. 49.** Setzt man in der allgemeinen Formel:

$$\operatorname{tg}(m + n) = \frac{\operatorname{tg} m - \operatorname{tg} n}{1 + \operatorname{tg} m \cdot \operatorname{tg} n}$$

$m = 45^0$ also $\operatorname{tg} m = 1$ so folgt die benützte Gleichung.

---

**Frage 52.** Zu welchen Folgerungen führt die Formel VI?

**Antwort.** Aus der Formel VI folgt, dass das Pothenotsche Problem nicht allgemein lösbar ist. Ist nämlich:

$$\varphi + \psi = 180^0$$

also:

$$\sin\varphi = \sin\psi$$

d. h.:

$$\operatorname{tg}\mu = 1 \text{ oder } \mu = 45^0$$

also auch:

$$45^0 + \mu\ 90^0$$

dann haben wir:

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi - \psi}{4} = \operatorname{tg} 90^0 \cdot \operatorname{ctg} 90^0$$

**Bemerkung.** Ist $\varphi + \psi = 180^0$, dann ist das Viereck ein Kreisviereck. Die beiden Kreise, welche wir im I. Teile Seite 98 zur konstruktiven Lösung dieses Problems angewandt haben, fallen zusammen, d. h. der gesuchte Standpunkt ist unbestimmbar (nicht aber unbestimmt).

**Bemerkung.** Ueber die Art der Unbestimmtheit des Ausdruckes:

$$\infty \cdot 0, \frac{0}{0}$$

vergleiche Kleyers Lehrbuch der Differentialrechnung.

**Bemerkung.** Es lassen sich wohl Regeln aufstellen, nach welchen man ohne Figur das Problem lösen kann. Wir ziehen es vor, immer auf Grund einer kleinen Skizze zu rechnen, weil man damit schneller vorwärts kommt und man schon bei der Konstruktion auf einen etwaigen Ausnahmefall $0 \cdot \infty$ aufmerksam wird.

oder:

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi - \psi}{2} = \infty \cdot 0 = \frac{0}{0}$$

d. h. unbestimmt. Dieser Fall wird wohl selten in der Praxis vorkommen, aber auch dann, wenn:

$$\varphi + \psi$$

nahe an 180° sind, liefert die obige Formel weniger genaue Resultate.

Der besagten Formel haftet jedoch noch eine andere Unbestimmtheit an. Es ist nämlich:

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi - x}{2} = \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi - x}{2} \pm 180^0 \right)$$

also muss man am besten aus der Figur entscheiden, welcher Wert zu nehmen ist.

---

## Aufgabe.

Es sind die Koordinaten dieser Punkte gegeben:

| | $x$ | $y$ |
|---|---|---|
| $A$ | — 141 028·77 | — 713·12 |
| $B$ | — 141 864·38 | — 5408·34 |
| $C$ | — 146 561·91 | + 3929·25 |

ferner zwei von einem Standpunkte 0 gemessene Winkel:

$$\alpha = 76^0\ 9'\ 34''$$
$$\beta = 44^0\ 46'\ 18''$$

Es sollen die Koordinaten des Standpunktes 0 bestimmt werden. Wir müssen zunächst die Längen $a$ und $b$ sowie den Winkel $\gamma$ an der Spitze bestimmen.

Dazu rechnen wir:

$$\operatorname{tg} \alpha_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \qquad \operatorname{tg} \alpha_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B}$$

Sodann ist:

$$a = \frac{y_B - y_A}{\sin \alpha_{AB}} \qquad b = \frac{y_C - y_B}{\sin \alpha_{CB}}$$

und

$$\gamma = \alpha_{AB} - \alpha_{BC}$$

oder:

$$180 \gamma = \alpha_{AB} - \alpha_{BC}$$

Welcher von beiden Fällen stattfindet, lässt sich leicht einer Skizze entnehmen, auf welcher man, nach aufgetragenen Koordinaten, die geometrische Konstruktion ausgeführt hat. Vergleiche Figur 41, welche unserem Falle entspricht. Bemerkt mag noch werden, dass es sich in unserem Beispiel um einen trigonometrischen Punkt der Stadt Pisek in Böhmen handelt, daher die österreichische Zählweise der Azimute.

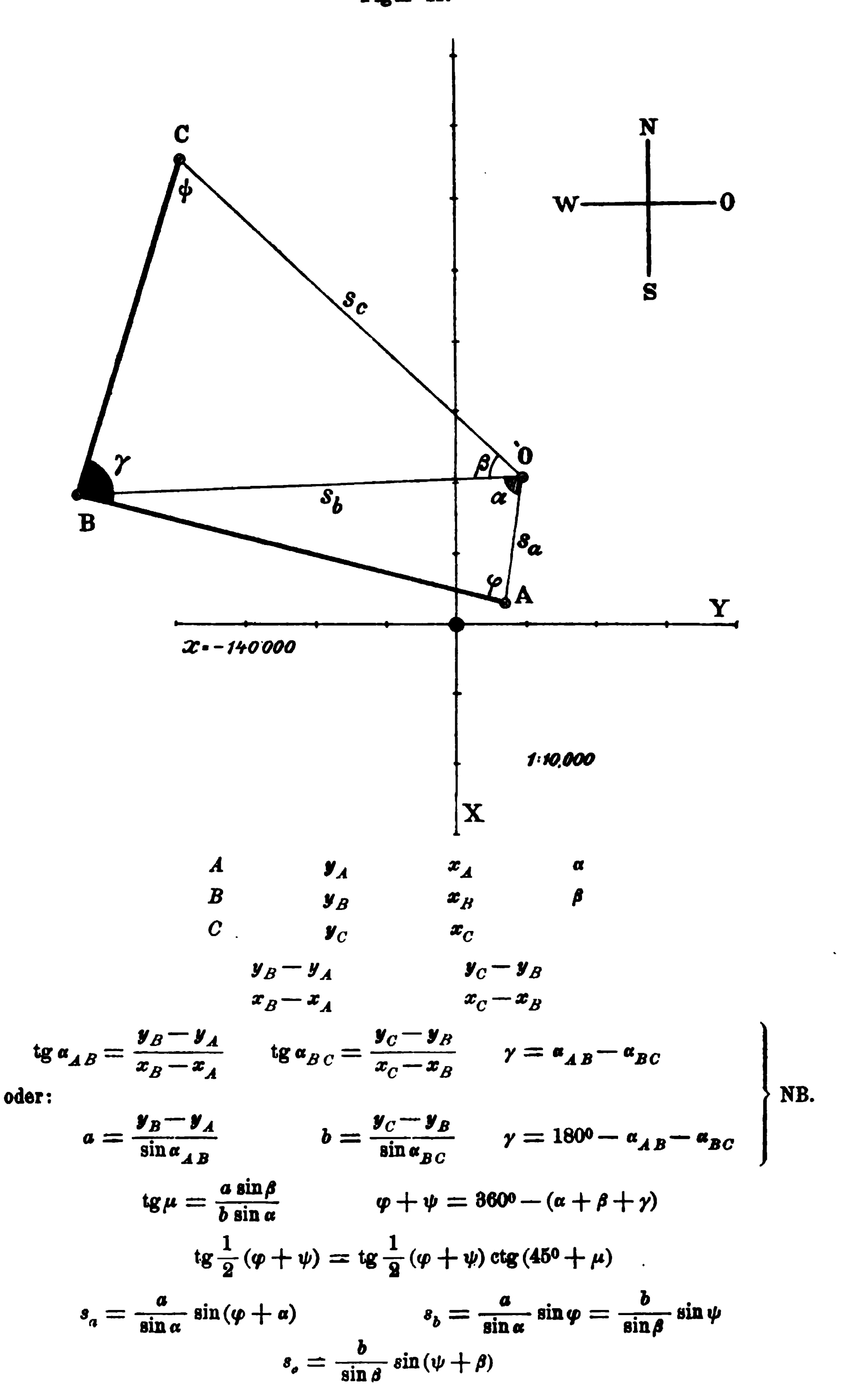
Sind diese Grössen bestimmt, so wird wie in der Frage 50 weiter gerechnet, wodurch man die Grössen:

$$s_a \qquad s_b \qquad s_c$$

erhält. Damit sind Entfernungen und Azimute bekannt und man kann nach Frage 50 die Koordinaten des Punktes 0 dreifach berechnen.

Wir geben im nachfolgenden die Rechnung schematisch mit den notwendigen Formeln voran. Die fundamentale Wichtigkeit dieser Aufgabe möge die Ausführlichkeit entschuldigen, mit welcher wir sie behandeln.

Figur 41.




| | | | |
|---|---|---|---|
| $A$ | $y_A$ | $x_A$ | $\alpha$ |
| $B$ | $y_B$ | $x_B$ | $\beta$ |
| $C$ | $y_C$ | $x_C$ | |

$y_B - y_A$ $\qquad$ $y_C - y_B$

$x_B - x_A$ $\qquad$ $x_C - x_B$

$$\operatorname{tg} \alpha_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \qquad \operatorname{tg} \alpha_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} \qquad \gamma = \alpha_{AB} - \alpha_{BC}$$

oder:

$$a = \frac{y_B - y_A}{\sin \alpha_{AB}} \qquad b = \frac{y_C - y_B}{\sin \alpha_{BC}} \qquad \gamma = 180^0 - \alpha_{AB} - \alpha_{BC}$$

NB.

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{a \sin \beta}{b \sin \alpha} \qquad \varphi + \psi = 360^0 - (\alpha + \beta + \gamma)$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\varphi + \psi) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\varphi + \psi) \operatorname{ctg} (45^0 + \mu)$$

$$s_a = \frac{a}{\sin \alpha} \sin (\varphi + \alpha) \qquad s_b = \frac{a}{\sin \alpha} \sin \varphi = \frac{b}{\sin \beta} \sin \psi$$

$$s_c = \frac{b}{\sin \beta} \sin (\psi + \beta)$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha_{AO} &= \alpha_{AB} + \varphi \qquad \alpha_{CO} = \alpha_{BC} + (180 - \psi)\\ \alpha_{OB} &= \alpha_{OA} + \alpha = \alpha_{CO} + 180^0 - \beta\end{aligned}\right\} \text{NB.}$$

Dann ist:

$$x_O = x_A + s_a \cos \alpha_{AO} \qquad y_O = y_A + s_a \sin \alpha_{AO}$$
$$= x_B + s_b \cos \alpha_{BO} \qquad = y_B + s_b \sin \alpha_{BO}$$
$$= x_C + s_c \cos \alpha_{CO} \qquad = y_C + s_c \sin \alpha_{CO}$$

Dort wo sin NB. steht, muss die Figur entscheiden. Mit Hilfe dieser Formelnzusammenstellung dürfte das nachfolgende Schema für die Rechnung sofort verstanden werden. Die drei Punkte $A$ = Pisek, $B$ = Nepozdrice, $C$ = Cizova, in der Vermessung der königlichen Stadt Pisek in Böhmen.

| | $x$ | $y$ |
|---|---|---|
| $A$ | $-713 \cdot 12$ | $-141\,028 \cdot 77$ |
| $B$ | $+5408 \cdot 34$ | $-141\,864 \cdot 38$ |
| $C$ | $+3929 \cdot 25$ | $-145\,561 \cdot 91$ |

$$\alpha = 76^0\ 9'\ 34''$$
$$\beta = 44^0\ 46'\ 18''$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $y_B - y_A$ | $+6121 \cdot 46$ | $y_C - y_B$ | $-1479 \cdot 09$ |
| $x_B - x_A$ | $-835 \cdot 61$ | $x_C - x_B$ | $-4697 \cdot 53$ |
| $\log y_B - y_A$ | $3 \cdot 786\,855$ | $\log y_C - y_B$ | $3 \cdot 169\,995_n$ |
| $\log \sin \alpha_{AB}$ | $9 \cdot 995\,991$ | $\log \sin \alpha_{BC}$ | $9 \cdot 477\,600_n$ |
| $\log x_B - x_A$ | $2 \cdot 922\,004_n$ | $\log x_C - x_B$ | $3 \cdot 671\,870_n$ |
| $\log \operatorname{tg} \alpha_{AB}$ | $0 \cdot 864\,851_n$ | $\log \operatorname{tg} \alpha_{BC}$ | $9 \cdot 498\,125$ |
| $\log a$ | $3 \cdot 790\,864$ | $\log b$ | $3 \cdot 692\,195$ |
| $\log \sin \alpha$ | $9 \cdot 987\,204$ | $\log \sin \beta$ | $9 \cdot 847\,748$ |

$$\alpha_{AB} = 97^0\ 46'\ 23''$$
$$\alpha_{BC} = 197\ \ 28\ \ 39$$
$$\gamma = 80\ \ 17\ \ 44 \quad = 180^0 + \alpha_{AB} - \alpha_{BC}$$
$$\alpha + \beta = 110\ \ 55\ \ 52$$
$$\alpha + \beta + \gamma = 201\ \ 13\ \ 36$$
$$\varphi + \psi = 158\ \ 46\ \ 24$$

| | |
|---|---|
| $\log \dfrac{a}{\sin \alpha} = 3 \cdot 803\,660$ | $\mu = 42^0\ 18'\ 1''$ |
| $\log \dfrac{b}{\sin \beta} = 3 \cdot 844\,647$ | $\mu + 45^0 = 87\ \ 18\ \ 1$ |
| $\log \operatorname{tg} \mu = 9 \cdot 959\,013$ | $\frac{1}{2}(\varphi + \psi) = 79\ \ 23\ \ 12$ |
| $\log \operatorname{ctg}(\mu + 45^0) = 8 \cdot 673\,518$ | $\frac{1}{2}(\varphi - \psi) = 14\ \ 7\ \ 29$ |
| $\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi + \psi) = 0 \cdot 727\,263$ | $\varphi = 93\ \ 30\ \ 41$ |
| $\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi - \psi) = 9 \cdot 400\,781$ | $\psi = 65\ \ 15\ \ 43$ |

Kontrolle:

$$\varphi + \alpha = 169^0\ 40'\ 15''$$
$$\psi + \beta = 110\ \ 2\ \ 1$$
$$\gamma = 80\ \ 17\ \ 44$$
$$\overline{360^0\ \ 0'\ \ 0''}$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\log\frac{a}{\sin\alpha} = 3{\cdot}803\,660$ | $\log\frac{a}{\sin\alpha} = 3{\cdot}803\,660$ | $\log\frac{b}{\sin\beta} = 3{\cdot}844\,647$ | $\log\frac{b}{\sin\beta} = 4{\cdot}844\,647$ |
| $\log\sin(\varphi+\alpha) = 9{\cdot}253\,592$ | $\log\sin\varphi = 9{\cdot}999\,184$ | $\log\sin\psi = 9{\cdot}958\,196$ | $\log\sin(\psi+\beta) = 9{\cdot}772\,893$ |
| $\log s_a = 3{\cdot}057\,252$ | $\log s_b = 3{\cdot}602\,844$ | $\log s_b = 3{\cdot}802\,843$ | $\log s_c = 3{\cdot}817\,540$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\alpha_{AB} = 97^0\,46'\,23''$ | $\alpha_{AO} = 191^0\,17'\,4''$ | $\alpha_{BC} = 197^0\,38'\,39''$ | $\alpha_{OC} = 132\,12\,56$ |
| $\varphi = 93\;30\;41$ | $\alpha = 76\;9\;34$ | $180^0 - \psi = 114\;44\;17$ | $-\beta = -44\,46\,18$ |
| $\alpha_{AO} = 191\;17\;4$ | $\alpha_{BO} = 267\;26\;38$ | $\alpha_{CO} = 312\;12\;56$ | $\alpha_{OB} = 87\,26\,38$ |

Probe:

$$\alpha_{BO} - \alpha_{OB} = 180^0 \qquad \begin{array}{r} 267^0\,26'\,38'' \\ 87\;\;26'\,38'' \\ \hline 180^0\;\;0'\;\;0'' \end{array}$$

| | |
|---|---|
| $\log s_a = 3{\cdot}057\,252$ | $\log s_a = 3{\cdot}057\,252$ |
| $\log\sin\alpha_{AO} = 9{\cdot}291\,546_n$ | $\log\cos\alpha_{AO} = 9{\cdot}991\,522_n$ |
| $\log(y_O - y_A) = 2{\cdot}348\,798_n$ | $\log(x_O - x_A) = 3{\cdot}048\,774_n$ |

| | |
|---|---|
| $\log b_C = 3{\cdot}817\,540$ | $\log b_C = 3{\cdot}817\,540$ |
| $\log\sin\alpha_{CO} = 9{\cdot}869\,597_n$ | $\log\cos\alpha_{CO} = 9{\cdot}9\,829\,319$ |
| $\log(y_O - y_C) = 3{\cdot}687\,137_n$ | $\log(x_O - x_O) = 3{\cdot}644\,859$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $y_O - y_A = -223{\cdot}25$ | $x_O - x_A = -1118{\cdot}86$ | $y_O - y_C = -4865{\cdot}61$ | $x_O - x_C = +4114{\cdot}27$ |
| $y_A = -713{\cdot}12$ | $x_A = -141028{\cdot}77$ | $y_C = +3929{\cdot}25$ | $x_C = -146561{\cdot}91$ |
| $y_O = -936{\cdot}37$ | $x_O = -142147{\cdot}63$ | $y_O = -936{\cdot}36$ | $x_O = -142147{\cdot}64$ |

Demnach sind die Koordinaten von $O$:

$$y_O = -936{\cdot}37 \text{ m}$$
$$x_O = -142\,147{\cdot}63 \text{ m}$$

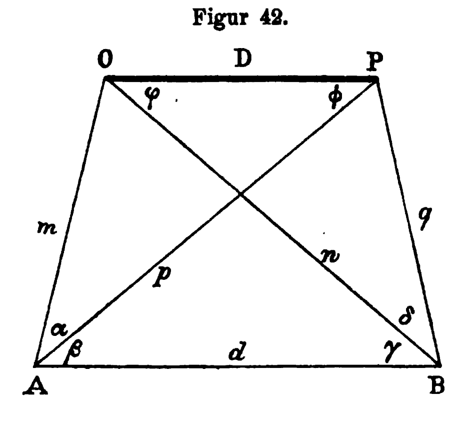
womit die Berechnung vollendet ist.

## 4. Das Hansensche Problem.

**Anmerkung 5.** Das nachstehende Problem wird in der Praxis seltener angewendet, und zwar aus dem Grunde, weil die Berechnung nicht so schematisch ausgeführt werden kann wie bei dem von Pothenot und auch wohl deswegen, weil Visuren an beiden Bestimmungspunkten notwendig sind. Den Namen hat dieses Problem nach dem berühmten Geodäten und Astronomen Hansen.

**Frage 53.** Wie lautet das Hansensche Problem?

Figur 42.




**Antwort.** Es sind aus zwei gegebenen Punkten $O$ und $P$ (vergl. Figur 42) vermittels der Winkel:

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$$

die Koordinaten der Standpunkte $A$ und $B$ zu berechnen.

Sei die Situation wie in der Figur 42 angezeigt. Dann hat man:

$$\alpha_{OP} = \frac{y_P - y_O}{x_p - x_O}$$

Sodann wird:

$$D = OP = \frac{y_p - y_O}{\sin\alpha_{OP}} = \frac{x_p - x_O}{\cos\alpha_{OP}}$$

Ferner liefert die Figur unmittelbar:

$$\text{I} \ldots \varphi + \psi = \beta + \gamma$$

**Erkl. 50.** Wir haben im $\triangle OPB$:

$$\sin\varphi = q\frac{\sin\delta}{D}$$

ferner im $\triangle OPA$:

$$\sin\psi = m\frac{\sin\alpha}{D}$$

so dass also:

$$1) \ldots \frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{q\sin\delta}{m\sin\alpha}$$

wird. Nun ist aber im $\triangle ABP$:

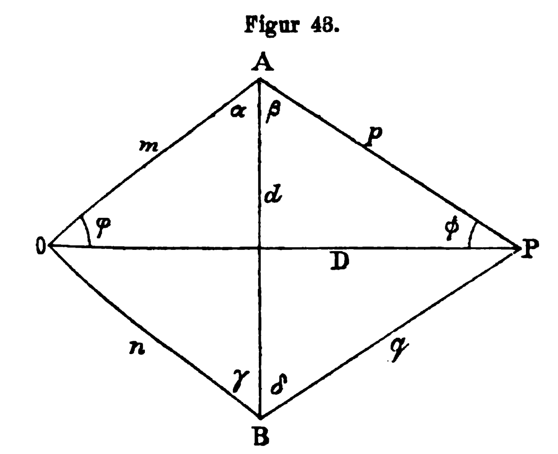
$$2) \ldots q = d\frac{\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma+\delta)}$$

und im $\triangle ABO$:

$$3) \ldots m = d\frac{\sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung 1) so folgt die Gleichung II.

Figur 43.




**Erkl. 51.** Aus dem $\triangle OPA$ folgt:

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{p}{m}$$

und ist im $\triangle OAB$:

$$p = d\frac{\sin\delta}{\sin(\beta+\delta)}$$

und im $\triangle OAB$:

$$m = d\frac{\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}$$

woraus die nebenstehende Gleichung folgt.

und (vergl. Erkl. 50):

$$\text{II} \ldots \frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{\sin\beta\sin\beta\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\gamma\sin\alpha\sin(\gamma+\delta+\beta)}$$

Setzt man also:

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \operatorname{ctg}\mu$$

so wird (vergl. Frage 51):

$$\text{III} \ldots \operatorname{tg}\frac{\varphi-\psi}{2} = \operatorname{tg}\frac{\varphi+\psi}{2}\operatorname{ctg}(45^0-\mu)$$

dabei ist:

$$\operatorname{ctg}\mu = \frac{\sin\beta\sin\beta\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\gamma\sin\gamma\sin(\gamma+\delta+\beta)}$$

Die Situation kann aber auch wie in der Figur 43 ausfallen. Dann haben wir:

$$\text{I} \ldots \varphi+\psi = 180^0-(\alpha+\beta)$$

ferner (vergl. Erkl. 51):

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{\sin(\alpha+\gamma)\sin\delta}{\sin(\beta+\delta)\sin\gamma}$$

Man hat hier also:

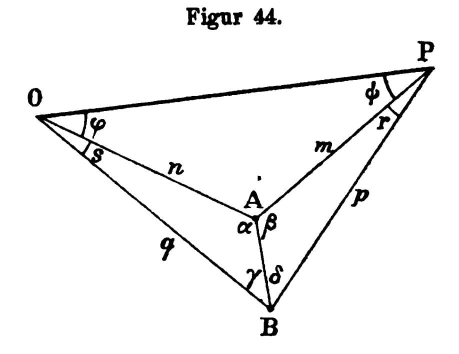
$$\operatorname{ctg}\mu = \frac{\sin\delta\sin(\alpha+\gamma)}{\sin(\beta+\delta)\sin\gamma}$$

zu setzen und erhält dann:

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi-\psi}{2} = \operatorname{tg}\frac{\varphi+\psi}{2}\operatorname{ctg}(\mu+45^0)$$

Dadurch ist aber die ganze Figur gegeben, denn man kennt alle Winkel. Dann können die einzelnen Seiten und ihre Azimute berechnet werden.

Figur 44.




**Bemerkung.** Wir geben nachstehend ein Beispiel zur Figur 44, welches nach den Auseinandersetzungen bei dem Problem von Pothenot ohne weiteres verständlich ist.

(Oesterreichische Koordinaten.)

| | | |
|---|---|---|
| $O$ | $y = -713{\cdot}12$ | $x = -141\,028{\cdot}77$ |
| $P$ | $y = -2306{\cdot}46$ | $x = -141\,112{\cdot}31$ |

$\alpha = 45^0\,23'\,11''$
$\beta = 128\;\;49\;\;1$
$\gamma = 62\;\;8\;\;3$
$\delta = 112\;\;34\;\;19$

$$\log(y_p - y_O) = 3 \cdot 202\,036_n$$
$$\log(x_p - x_O) = 1 \cdot 921\,894_n$$
$$\log \operatorname{tg} \alpha_{PO} = 1 \cdot 280\,142$$
$$\alpha_{OP} = 262^0\,59'\,41''$$

$$\log(y_p - y_O) = 3 \cdot 202\,036_n$$
$$\log \sin \alpha_{OP} = 9 \cdot 999\,403_n$$
$$\log D = 3 \cdot 202\,633$$

$$\log(x_p - x_O) = 1 \cdot 921\,894_n$$
$$\log \cos \alpha_{OP} = 8 \cdot 719\,261_n$$
$$\log D = 3 \cdot 202\,633$$

$$\alpha + \gamma = 174^0\,12'\,12''$$
$$\beta + \delta = 174\;\;42\;\;2$$
$$\delta + \gamma = 241\;\;23\;\;20$$
$$\varphi + \psi = 61\;\;23\;\;20$$

$$\frac{1}{2}(\varphi + \psi) = 30^0\,41'\,59''$$
$$\frac{1}{2}(\varphi + \psi) = 5\;\;8\;\;29$$
$$\varphi = 35\;\;50\;\;9$$
$$\psi = 25\;\;23\;\;11$$

$$\log \sin \beta = 9 \cdot 946\,474$$
$$\log \sin(\alpha + \gamma) = 8 \cdot 904\,691$$
$$S = 8 \cdot 950\,165$$

$$\log \sin \alpha = 9 \cdot 852\,456$$
$$\log \sin(\beta + \delta) = 8 \cdot 965\,035$$
$$S = 8 \cdot 818\,491$$

$$\log \sin(\psi + r) = 9 \cdot 709\,903$$
$$\log \Delta_2 = 3 \cdot 223\,382$$
$$\log \sin(\varphi + s) = 9 \cdot 822\,328$$

$$\operatorname{ctg} \mu = 0 \cdot 132\,674$$
$$\mu = 36^0\,22'\,53''$$
$$\mu + 45^0 = 81\;\;22\;\;53$$
$$\operatorname{ctg}(\mu + 45^0) = 9 \cdot 180\,607$$
$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi + \psi) = 9 \cdot 773\,512$$
$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi - \psi) = 8 \cdot 954\,119$$

$$\log \sin(\delta + \gamma) = 0 \cdot 943\,440$$
$$\log D = 3 \cdot 202\,633$$
$$\log \sin(\alpha + \beta) = 9 \cdot 979\,351$$

$$\log \sin \varphi = 9 \cdot 767\,501$$
$$\log \Delta_1 = 3 \cdot 259\,191$$
$$\log \sin \psi = 9 \cdot 634\,826$$

$$\left.\begin{array}{l} m = \Delta_1 \sin \psi \\ n = \Delta_1 \sin \varphi \end{array}\right\} \Delta_1 = \frac{D}{\sin(\delta + \gamma)}$$
$$\left.\begin{array}{l} p = \Delta_2 \sin(\varphi + s) \\ q = \Delta_2 \sin(\psi + r) \end{array}\right\} \Delta_2 = \frac{D}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$m = 3 \cdot 026\,694$$
$$n = 2 \cdot 894\,019$$
$$p = 3 \cdot 045\,610$$
$$q = 2 \cdot 933\,185$$

Nun werden die Koordinaten gerechnet:

| | *A* | *B* | *A* | *B* |
|---|---|---|---|---|
| | 266° 59' 41" | 292° 32' 52" | 86° 59' 41" | 51° 9' 32" |
| | 25 33 11 | 5 17 38 | − 35 50 9 | − 5 47 18 |
| | 292° 32' 52" | 297° 50' 0" | 51° 9' 32" | 45° 22' 14" |
| log cos | 9·585 713 | 9·669 225 | 9·797 381 | 9·846 657 |
| | 3·026 694 | 3·045 610 | 2·894 019 | 2·933 185 |
| log sin | $9 \cdot 965\,465_n$ | $9 \cdot 946\,604_n$ | 9·891 475 | 9·852 276 |
| $\log \Delta_y$ | $2 \cdot 992\,159_n$ | $2 \cdot 992\,214_n$ | 2·785 494 | 2·785 461 |
| $\log \Delta_x$ | 2·610 407 | 2·714 835 | 2·691 494 | 2·779 842 |
| $\Delta_y$ | − 982·11 | − 982·23 | + 610·23 | + 610·18 |
| $y$ | − 713·12 | − 713·12 | − 2305·46 | − 2305·46 |
| $y$ | − 1695·23 | − 1695·35 | − 1695·23 | − 1695·28 |
| $\Delta_x$ | + 407·76 | + 518·60 | + 491·36 | + 602·34 |
| $x$ | − 141 028·77 | − 141 028·77 | − 141 112·31 | − 141 112·31 |
| $x$ | − 140 621·01 | − 140 510·17 | − 140 620·95 | − 140 509·97 |

Die Koordinaten der beiden gesuchten Punkte sind also im Mittel:

| | | |
|---|---|---|
| $A$ | $-1695 \cdot 23$ | $-140\,620 \cdot 98$ |
| $B$ | $-1695 \cdot 31$ | $-140\,510 \cdot 07$ |

**Bemerkung.** Auch hier kann es eintreten, dass die Formel:

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi - \psi}{2} = \operatorname{tg} \frac{\varphi + \psi}{2} \operatorname{ctg}(\mu + 45^0)$$

unbestimmt wird, d. h. von der Form:

$$0 \cdot \infty$$

dann kann offenbar die Lage der beiden Punkte auf diese Art nicht bestimmt werden. Solche Punkte muss man in der Praxis zu umgehen trachten.

## 5. Ueber die Auffindung der Fehler in Polygonzügen.

**Frage 54.** Wie wird ein Längenfehler in den Koordinaten gefunden?

**Bemerkung.** Wir setzen in den nachstehenden Betrachtungen voraus, dass ein einziger Fehler im Polygon existiert und dass derselbe weit ausserhalb der Grenzen der möglichen Fehler liegt.

**Erkl. 52.** Denn sei $l$ die richtige, $l + \Delta l$ die fehlerhafte Länge und ihr Azimut, sowie:

$A_x$ die Summe aller $\Delta x$

$A_y$ die Summe aller $\Delta y$

diejenige Differenz mit fehlerhaftem $l$ ausgenommen. Damit ist:

$$A_x + (l + \Delta l) \sin \alpha = [\Delta y]$$
$$A_y + (l + \Delta l) \cos \alpha = [\Delta x)$$

Weil aber:

$$A_y + l \sin \alpha = 0$$
$$A_x + l \cos \alpha = 0$$

so muss:

$$\Delta l \sin \alpha = [\Delta y]$$
$$\Delta l \cos \alpha = [\Delta x)$$

also:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{[\Delta y]}{[\Delta y]}$$

**Antwort.** Um einen Längenfehler in den Koordinaten zu entdecken, nehmen wir an, dass die Summe der Koordinatenunterschiede:

$$[\Delta x] \sin [\Delta y]$$

nicht $O$, sondern beträchtlich über $O$ ist. Dann gibt es einen Winkel $\alpha$ für den:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{[\Delta y]}{[\Delta x]}$$

und die fehlerhafte Seite hat ein Azimut:

$$\alpha \text{ oder } 180^0 + \alpha$$

Diese Seite muss nun von neuem gemessen werden (vergl. Erkl. 52).

Der Fehlerbetrag wird sein:

$$x = \frac{[\Delta y]}{\sin \alpha} = \frac{[\Delta x]}{\cos \alpha}$$

Während die Existenz eines Winkelfehlers sofort erkannt wird, wenn man die Winkelsumme bildet, bleibt der Längenfehler bis zur Koordinatenberechnung verborgen.

**Bemerkung.** Da die Existenz der Winkelfehler bei den Koordinaten schon vor ihrer Berechnung hervortreten muss, so behandeln wir dieselbe nicht mehr, indem wir auf Frage 167 des I. und Frage 35 dieses II. Teils verweisen, wo dieses Problem geometrisch und rechnerisch behandelt wird.

## 6. Aufgaben über Fehler in Polygonzügen.

**Aufgabe 30.** Bei der Bildung der Summe der Winkel in einem Polygon bemerkt man, dass ein Fehler von $1^0$ bei irgend einem Winkel gemacht wurde. Es soll dieser Winkel gefunden werden.

**Auflösung.** Wenden wir die Bezeichnungen der Erkl. 53 an, so ist:

$$A_y + l \sin(\alpha + \Delta \alpha) = [\Delta y]$$
$$A_x + l \cos(\alpha + \Delta \alpha) = [\Delta x]$$

und zugleich:

$$A_y + l \sin \alpha = 0$$
$$A_x + l \cos \alpha = 0$$

Werden die letzten Gleichungen von den ersteren subtrahiert, so folgt:

$$l[\sin(\alpha + \Delta\alpha) - \sin\alpha] = [\Delta y]$$
$$l[\cos(\alpha + \Delta\alpha) - \cos\alpha] = [\Delta x]$$

oder vergl. Erkl. 53:

$$2l \sin\frac{\Delta\alpha}{2} \cos\frac{2\alpha + \Delta\alpha}{2} = [\Delta y]$$
$$2l \sin\frac{\Delta\alpha}{2} \sin\frac{2\alpha + \Delta\alpha}{2} = -[\Delta x]$$

also durch Division:

$$\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2}\right) = -\frac{[\Delta x]}{[\Delta y]}$$

Man weiss nun, dass:

$$\Delta\alpha = 1^0$$

also wird:

$$\frac{\Delta\alpha}{2} = 30'$$

Wird aus der vorhergehenden Gleichung der Winkel:

$$\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2}$$

berechnet, so wird das Azimut des fehlerhaften Winkels:

$$\left(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2}\right) - 30'$$

**Erkl. 58.** Man hat:

$$\sin x - \sin y = 2 \sin\frac{1}{2}(x-y)\cos\frac{1}{2}(x+y)$$
$$\cos x - \cos y = 2 \sin\frac{1}{2}(y-x)\sin\frac{1}{2}(x+y)$$

Da nun:

$$x = \alpha + \Delta\alpha$$
$$y = \alpha$$

so folgt:

$$\frac{1}{2}(x+y) = \alpha + \frac{\Delta\alpha}{2}$$
$$\frac{1}{2}(x-y) = \frac{\Delta\alpha}{2}$$

**Bemerkung.** Man beachte, dass die nebenstehende Rechnung nur dann angewendet werden kann, wenn man einen bestimmten Fehler voraussetzt. Sind mehrere Winkel nahezu gleich, was freilich oft vorkommt, so ist diese Methode nicht anwendbar.

---

**Aufgabe 31.** Bei der Bildung der Grössen $[\Delta y]$ sin $[\Delta x]$ ergeben sich grosse Fehler, jedoch so, dass:

$$[\Delta y] + [\Delta x]$$

nahe an $O$ ist. Welches war die Ursache des Fehlers, vorausgesetzt dass kein Rechenfehler vorliegt?

**Antwort.** Man hat offenbar zwei Koordinaten verwechselt.

Denn sei:

$$A_y + \Delta x = [\Delta y]$$
$$A_x + \Delta y = [\Delta x]$$

so wird, da richtig genommen:

$$A_y + \Delta y = 0$$
$$A_x + \Delta x = 0$$

auch:

$$[\Delta y] + [\Delta x] = 0$$

sein müssen. Sind daher $[\Delta y]$ sin $[\Delta x]$ sehr gross und ist $[\Delta y] + [\Delta x]$ gleich nahe an 0, so hat man nachzusehen, ob nicht zwei Koordinaten verwechselt wurden.

**Bemerkung.** Man hat:

$$\Delta x - \Delta y = [\Delta y]$$

also es ist die Differenz der verwechselten Koordinaten gegeben, was ihre Auffindung erleichtern kann.

**Beispiel.**

| Fehlerhaft. | | | | Richtig. | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $+\Delta y$ | $-\Delta y$ | $+\Delta x$ | $-\Delta x$ | $+\Delta y$ | $-\Delta y$ | $+\Delta x$ | $-\Delta x$ |
| | — 148·27 | + 12·35 | | + 12·35 | | | — 148·27 |
| + 4·75 | | | — 272·82 | + 4·75 | | | — 272·82 |
| | — 12·72 | | — 156·07 | | — 12·72 | | — 156·07 |
| | — 20·34 | + 282·20 | | | — 20·34 | + 282·20 | |
| + 15·80 | | + 294·96 | | + 15·80 | | + 294·76 | |
| + 20·55 | — 181·33 | + 589·51 | — 428·89 | + 32·90 | — 33·06 | + 576·96 | — 577·16 |
| $[\Delta y] = -160·78$ | | $[\Delta x] = +160·62$ | | $[\Delta y] = -\ 0·16$ | | $[\Delta x] = -\ 0·20$ | |

---

**Aufgabe 32.** In dem Fall wie vorhin hat man gefunden zwar:

$$[\Delta y]$$

nahe $O$, dafür war aber:

$$[\Delta x]$$

zu gross. Wo liegt der mögliche Fehler?

**Bemerkung.** Diese beiden letztbehandelten Fehler sind insbesondere beim Anfänger häufig anzutreffen, der mit Winkeln über 90° noch nicht genügend sicher zu rechnen weiss.

**Antwort.** Hier kann man annehmen, dass ein $\Delta x$ ein falsches Vorzeichen hat. Sei also $\Delta x$ jenes mit falschem Vorzeichen, so wird:

$$A_x + \Delta x = 0$$

dagegen:

$$A_x - \Delta x = [\Delta x]$$

also:

$$2\Delta x = [\Delta x]$$

Hat man also ein grosses $[\Delta x]$ und bemerkt, dass:

$$\frac{1}{2}[\Delta x]$$

irgend einer Grösse $\Delta x$ gleich ist, so hat man nachzusehen, ob nicht bei derselben Grösse ein Zeichenfehler vorgekommen.

**Beispiel.**

| Fehlerhaft. | | Richtig. | |
|---|---|---|---|
| $+\Delta x$ | $-\Delta x$ | | |
| | — 12·35 | + 12·35 | |
| + 4·75 | | + 4·75 | |
| | — 12·72 | | — 12·72 |
| | — 20·34 | | — 20·34 |
| + 15·80 | | + 15·80 | |
| + 20·55 | — 45·41 | + 32·90 | — 33·06 |
| $[\Delta x] = -24·86$ | | $[\Delta x] = -\ 0·16$ | |
| $\frac{1}{2}[\Delta x] = -12·46$ | | | |

also wahrscheinlich:

— 12·35 statt + 12·35

geschrieben.

**Bemerkung.** Sind wie hier zwei naheliegende Werte vorhanden:

— 12·35 und — 12·72

so muss bei beiden nachgesehen werden, ob man nicht bei der Berechnung das + mit — verwechselt hat.

Ist dieses nicht der Fall, dann kann es geschehen, dass man einen Decimalpunkt nicht richtig gesetzt hat. Hat man z. B. ein $\Delta x$ zehnmal zu gross genommen, dann ist:

$$\Delta x = \frac{[\Delta x]}{9}$$

**Erkl. 54.** Man hat richtig:

$$A_x + \Delta x = 0$$

falsch:

$$A_x + 10 \cdot \Delta x = [\Delta x]$$

also wenn man die erstere Gleichung von der letzteren subtrahiert, so wird:

$$9 \Delta x = [\Delta x]$$

Analog folgt aus:

$$A_x + \frac{1}{10} \Delta x = [\Delta x]$$

$$\Delta x = -\frac{9}{10} [\Delta x]$$

hat man es zehnmal zu klein genommen, so wird:

$$\Delta x = -\frac{10}{9} [\Delta x]$$

vergl. Erkl. 54.

Diese Sätze können oft von Nutzen sein, wenn ein Polygon von vielen Seiten vorliegt und man schnell den Fehler auffinden will.

## Beispiel.

| Fehlerhaft. | | Richtig. | |
|---|---|---|---|
| + 12·35 | | + 12·35 | |
| + 47·50 | | + 4·75 | |
| | — 12·72 | | — 12·72 |
| | — 20·34 | | — 20·34 |
| + 15·80 | | + 15·80 | |
| + 75·65 | — 33·06 | + 32·90 | — 33·06 |
| $[\Delta x] = +42\cdot59$ | | $[\Delta x] = -0\cdot16$ | |
| $\frac{[\Delta x]}{9} = +4\cdot73$ | | | |

Die eben angeführten Fehler sind die wichtigsten, die in der Praxis vorkommen können.

**Bemerkung.** Man hat in neuerer Zeit eine recht praktische Bezeichnungsweise eingeführt. Statt der negativen Zahlen wird ihre dekadische Ergänzung angeschrieben:

also statt — 12·72 schreibt man ╳╳ 87·28
statt — 20·34 schreibt man ╳╳ 79·66

{ ╳ für — 10
{ ╳╳ für — 100

Das obige Beispiel würde dann lauten:

```
 + 12·35
 +  4·75
╳╳ 87·28
╳╳ 79·66
   15·80
 -------
  199·84  — 200 = — 0·16 = [Δx]
```

man erhält also sofort das $[\Delta x]$, indem man die Zahl der Ergänzungen (hier ╳╳ + ╳╳ = 200) von der Summe subtrahiert. Man erspart dadurch die Doppelkolonne. Indessen wird von dieser Schreibweise bis jetzt nur beim Nivellieren Gebrauch gemacht.

---

# 7. Beispiel eines Katastralsystems.

## Die Koordinaten Oesterreichs.

**Anmerkung 6.** Vom historischen Standpunkte ist näheres in den Mitteilungen des k. k. militärgeographischen Instituts in Wien, Jahrg. 1887 und 1888, zu erfahren.

Gesetzliche Bestimmungen sind enthalten in der Instruktion zur Ausführung der trigonometrischen und polygonometrischen Vermessungen behufs Herstellung neuer Pläne für die Zwecke des Grundsteuerkatasters, Wien 1887.

Anfragen sind zu richten und trigonometrische Punkte zu verlangen (2 fl. für 1 Punkt, wenn mindestens 5 begehrt werden, sonst 10 fl. für beliebige Punkte unter 5) an das Kalkulbureau des Grundsteuerkatasters in Wien: Finanzministerium.

## Nullpunkte der k. k. österreichischen Monarchie.

| Länder | Nullpunkt | Geographische | | Ausdehnung der | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Kolonnen | | Schichten | |
| | | Länge | Breite | West | Ost | von | bis |
| 1) Unter-Oesterreich | St. Stephansdom in Wien | 34° 2′ 21″ 60 | 48° 12′ 32″ 75 | XX | VII | 1 | 24 |
| 2) Mähren | | | | XII | XXVI | 1 | 27 |
| 3) Schlesien | | | | XII | XXVI | 1 | 27 |
| 4) Dalmatien | | | | XIX | XXX | 1 | 41 |
| 5) Ober-Oesterreich | Gusterberg bei Kremsmünster | 34° 48′ 9″ 17 | 48° 2′ 20″ 50 | XXI | IX | 3 | 29 |
| 6) Salzburg | | | | XXI | IX | 3 | 29 |
| 7) Böhmen | | | | XX | XXVI | 1 | 38 |
| 8) Steyr | Schäckelsberg bei Graz | 33° 7′ 54″ 49 | 47° 11′ 56″ 36 | XIX | IX | 0 | 29 |
| 9) Kärnten | Krimberg bei Agram | 32° 8′ 11″ 25 | 45° 55′ 44″ 51 | XIX | XIII | 1 | 40 |
| 10) Krain | | | | XIX | XIII | 1 | 40 |
| 11) Istrien | | | | XIX | XIII | 1 | 40 |
| 12) Tyrol und Vorarlberg | Südturm der Pfarrkirche in Innsbruck | 29° 3′ 25″ 90 | 47° 16′ 14″ 10 | XIX | XVI | 1 | 32 |
| 13) Galizien | Löwenberg in Lemberg | 41° 42′ 32″ 50 | 49° 50′ 56″ 50 | XLIX | XXIV | 2 | 48 |
| 14) Bukowina | Westende der Radautschen Basis | 43° 28′ 53″ 36 | 47° 54′ 23″ 18 | IX | VII | 1 | 23 |

Die Koordinatensysteme sind schon so gewählt, dass man auf die Erdkrümmung bei Detailvermessung keine Rücksicht zu nehmen braucht.

Bemerkt mag noch werden, dass:

$+X =$ Süd $\qquad -X =$ Nord

$+Y =$ West $\qquad -Y =$ Ost

also ist die Zählung eine andere als in Deutschland.

Was die Detailverteilung anbelangt, so gilt nachstehendes:

### I. Die ältere (noch im Gebrauch stehende) Verteilung.

Parallel zu den Hauptachsen wurde das Gebiet in Vierecke von 1 □ Meile (7586 m) zerlegt (Kolonnen und Schichten).

Die Kolonnen werden vom Hauptmeridian nach beiden Richtungen mit römischen Ziffern bezeichnet nach dem Schema:

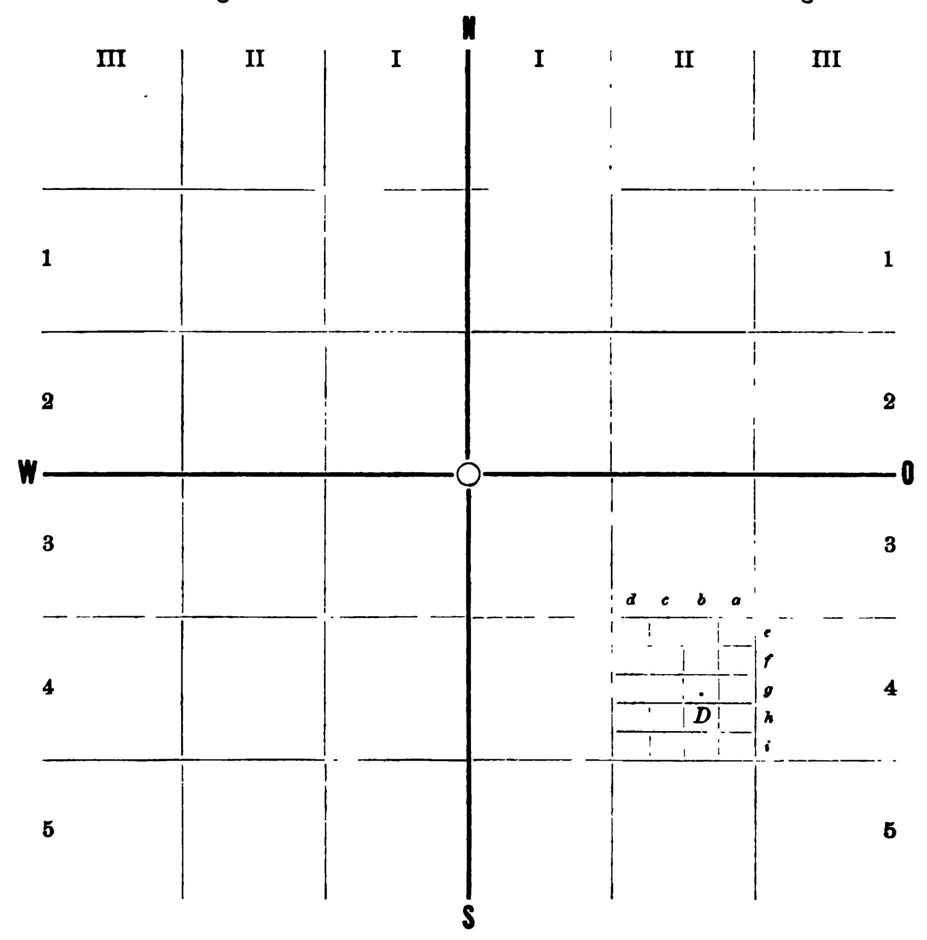
··· II I 0 I II ···

Die Schichten mit arabischen Ziffern, von den nördlichen angefangen. Für die Detailvermessung wurde noch jede Kolonne in vier und jede Schichte in fünf Teile geteilt und bezeichnet:

die Kolonne von Ost gegen West mit *a*, *b*, *c*, *d*

die Schichte von Nord gegen Süd mit *e*, *f*, *g*, *h*, *i*

Das Weitere ergibt sich aus der nachstehenden bildlichen Darstellung:




Darnach schreibt man für die Lage des Punktes $D$:

SO II 4 *bg*

Auf dieser Verteitung beruhen die im Verhältnis 1 : 2880 (1 Wiener Zoll = 40 Wiener Klafter) ausgeführten österreichischen Katastralkarten.

## II. Neue Einteilung.

Aus Anlass der im Jahre 1853 stattgefundenen Beratungen zum Zwecke der Einführung des Metermasses in den verschiedenen Zweigen des öffentlichen Dienstes wurde für die Neuvermessung ganzer Gemeinden das Massverhältnis:

1 : 2500

festgesetzt. In Betreff der Grösse der Aufnahmesektionen für solche Neumessungen, sowie der Bezeichnung dieser Sektionen gelten folgende Bestimmungen:

1) Die durch den Ursprung des Koordinatensystems eines Landes gehenden Koordinatenachsen teilen das betreffende Land in vier Teile, die wie folgt bezeichnet werden:

I. Quadrant SW (Süd-West)
II. „ NW (Nord-West)
III. „ NO (Nord-Ost)
IV. „ SO (Süd-Ost)

2) Zum Meridian werden in Entfernungen von je 8000 m und zum Parallel in Entfernungen von 10 000 m parallele Linien gedacht.

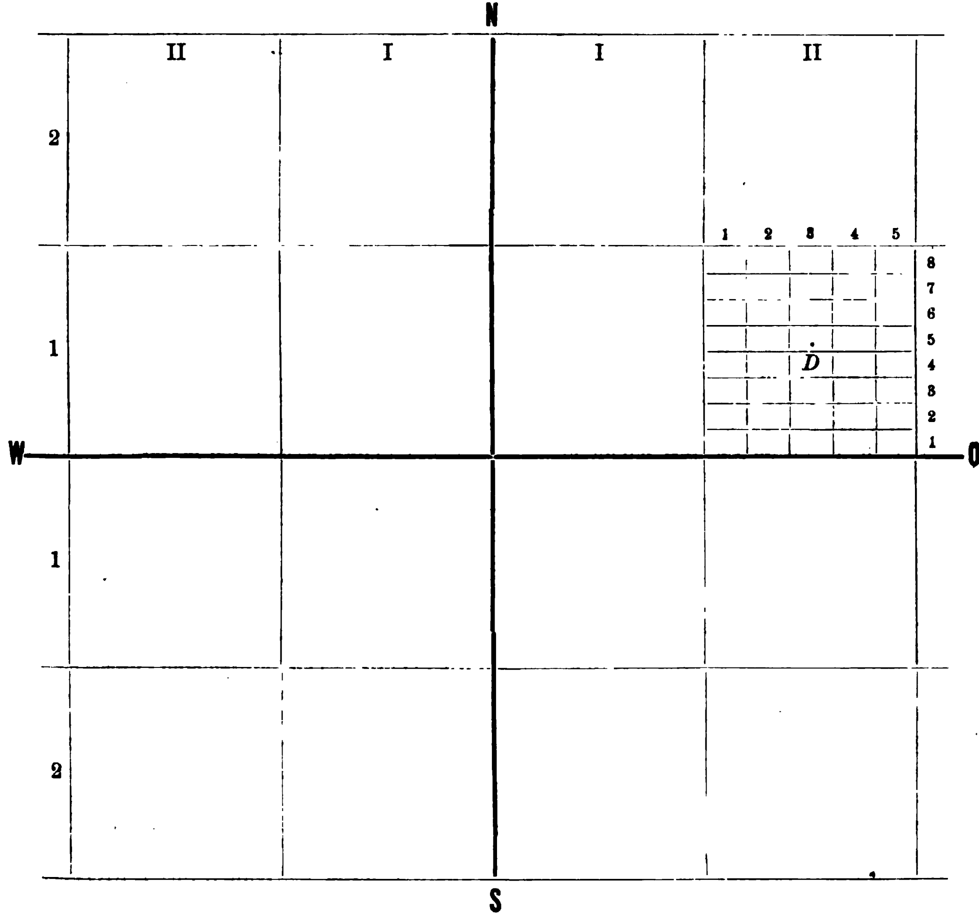
Die Kolonnen werden wie früher nach dem Schema (Hauptmeridian = 0):

$$\cdots \text{III} \quad \text{II} \quad \text{I} \quad 0 \quad \text{I} \quad \text{II} \quad \text{III} \cdots$$

bezeichnet. Die Schichten mit arabischen Ziffern analog von der Ordinatenachse ab. Jedes Blatt wird ferner in Sektionen geteilt und zwar parallel dem Meridian in fünf und senkrecht darauf in acht Unterabteilungen, welche mit arabischen Ziffern in arithmetischer Reihenfolge derart bezeichnet werden, dass die dem Meridian oder der Koordinatenachse zunächstliegenden Abteilungen die Nummer 1 erhalten.

Der gedachten Teilung des Blattes entsprechen 40 Rechtecke von 1600 m Länge und 1250 m Höhe mit einem Flächeninhalt von 200 ha.

Die Dimensionen einer Aufnahmesection betragen also für 1 : 2500 64 cm in Länge und 50 cm in Breite.




Für den Punkt $D$ haben wir demnach folgende Bezeichnung:

$$\text{NO II, 1, Sekt.} \frac{3}{6}$$

Es wird immer die $OW$ Nummer als Zähler und die $SN$ Nummer der Sektion als Nenner angeschrieben.

Für einen Triangulationspunkt, dessen Koordinaten beispielsweise:

$y$ (westlich) + 35 735·50 m

$x$ (südlich) + 54 548·20 m sind,

hat man:

$$y = +35\,735{\cdot}50 = \underbrace{4 \times 8000}_{\text{Kolonne}} + \underbrace{2 \times 1600}_{\text{Abteilung}} + 353{\cdot}50 \text{ m}$$

$$x = +54\,548{\cdot}20 = \underbrace{5 \times 10{\cdot}000}_{\text{Schichte}} + \underbrace{3 \times 1250}_{\text{Abteilung}} + 798{\cdot}20 \text{ m}$$

der Punkt liegt demnach:

$$\text{SW V, 6, Sekt.} \frac{3}{4}$$

und zwar:

+ 535·50 (westlich) von der östlichen } Sektionslinie.
+ 798·20 (südlich) von der nördlichen }

Bemerkt mag noch werden, dass in Oesterreich in allen Fällen noch die Messtischaufnahme nicht nur gestattet, sondern fast allgemein im Gebrauch ist.

### Katastrale Systeme Deutschlands.

Dieselben sind, soweit sie der preussischen Katastralbehörde unterliegen, in der Anweisung (IX) vom 25. Oktober 1881 für die trigonometrischen und polygonometrischen Arbeiten bei Erneuerung der Kataster und Bücher des Grundsteuerkatasters, Berlin 1881, einer amtlichen Publikation, in deren Besitz jeder Geometer sein muss, enthalten. (Anlage A Seite 341). Ausserdem existieren noch andere Koordinatensysteme mit den Nullpunkten: München, Tübingen, Mannheim, Darmstadt, Kassel, Göttingen.

Vom historischen Standpunkt aus findet man das Nötige in dem Werke: Jordan-Steppes, das deutsche Vermessungswesen, Stuttgart 1882.

### Die Koordinatenaufnahme.

Wir geben im Nachstehenden nun einige Winke für die Koordinatenaufnahme. Von der Mitteilung eines Beispiels sehen wir der Kostspieligkeit der Platten wegen ab. Die Anweisung IX bietet ein solches. Auch halten wir die Mitteilung eines ausführlichen Beispiels nicht für angezeigt, nachdem wir bei den einzelnen Problemen bereits numerische Anwendungen gegeben haben.

---

## 8. Von der Ausführung eines Koordinatennetzes.

**Frage 55.** Was hat man bei der Koordinatenaufnahme zu thun?

**Antwort.** Der allgemeine Vorgang bei einer Koordinatenaufnahme ist etwa folgender: Man verschafft sich vor allem von der betreffenden Katastralbehörde (z. B. in Oesterreich vom Kalkulbureau des Grundsteuerkatasters in Wien) die für die Aufnahme nötigen trigonometrischen Punkte. Hierauf werden die zur Polygonalmessung nötigen Punkte dauernd bezeichnet, ihre Entfernungen sowie ihre Winkel genau gemessen und zu Hause sofort Polygone konstruiert, die zur Grundlage der Detailaufnahme dienen sollen. Diese erfolgt mit dem Prisma auf Grund der Ordinatenaufnahme (vergl. I, Frage 55). Sodann werden nach trigonometrischer Bestimmung der geeigneten Polygonpunkte Koordinaten berechnet und auf die Sektionsblätter aufgetragen, auf welche dann das Elaborat rein kopiert wird.

**Bemerkung.** Gut ist, wenn man sich etwaige frühere Lagepläne und eine gute Karte (Generalstabskarte) des aufzunehmenden Gebietes verschafft. Die letztere leistet gute Dienste bei der Aufsuchung der trigonometrischen Punkte, die auf ihr gewöhnlich bezeichnet sind.

**Bemerkung.** Die Polygone werden einzeln eigens für die Detailvermessung in etwa doppeltem Massstab des Elaborats gezeichnet.

**Bemerkung.** Als Sammlung gesetzlicher Vorschriften ist unbedingt die Anschaffung nachstehender Werke zu empfehlen. Dieselben enthalten nur Vorschriften und geben keine Theorie:

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

1312. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Vermessungskunde (Geodäsie). Zweiter Teil. Forts. v. Heft 1311. — Seite 65—80. Mit 13 Figuren.



Vollständig gelöste



# Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie**; des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's**; der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

**Studium** zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

**Dr. Adolph Kleyer,**

Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

# Vermessungskunde

## (Geodäsie).

### Zweiter Teil.

Nach **System Kleyer** bearbeitet von **Dr. W. Láska.**

Fortsetzung von Heft 1311. — Seite 65—80. Mit 13 Figuren.

**Inhalt:**

Von der Ausführung eines Koordinatennetzes. — Ueber die Anwendung der Ausgleichsrechnung auf trigonometrisch-polygonometrische Probleme. — Das Nivellieren.

**Stuttgart 1894.**

Verlag von Julius Maier.

**Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.**

# PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie,** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues,** des **konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form,** mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch **alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze für** den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen **oft** keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln,** Sätze etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten und belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. **Kleyer,** Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

**Stuttgart.** **Die Verlagshandlung.**

1) Anweisung (IX) vom 25. Oktober 1881 für die trigonometrischen und polygonometrischen Arbeiten bei Erneuerung der Karten und Bücher des Grundsteuerkatasters, Berlin 1881.

2) **Bestimmungen über die Anwendung gleichmässiger Signaturen für topographische und geometrische Karten, Pläne und Risse.** Berlin 1888.

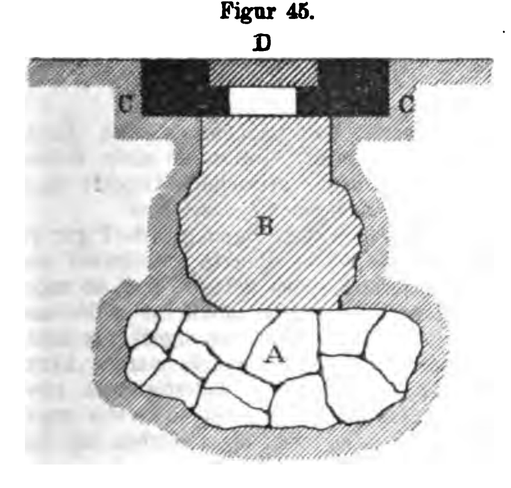
Diese Bestimmungen gelten für alle Staaten der preussischen Katastralverwaltung.

Dieses ist im Grunde genommen der ganze einzuhaltende Vorgang.

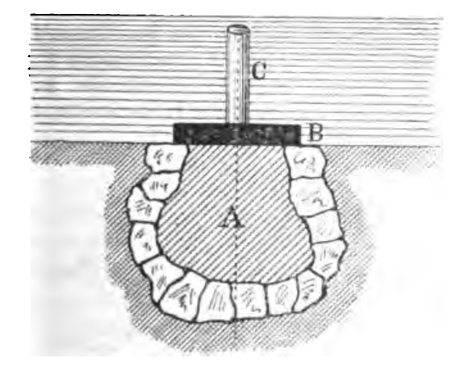
---

**Frage 56.** In welcher Weise werden die Punkte dauernd bezeichnet?

Figur 45.




Figur 46.




**Antwort.** Die dauernde Bezeichnung der Punkte fällt verschieden aus, je nach der Summe, die auf die Messung verwendet wird. Bei der Vermessung der kgl. Stadt Pisek in Böhmen wurde nachstehende freilich sehr kostspielige, dafür aber dauerhafte Bezeichnung gewählt.

a) **Für trigonometrisch bestimmte Punkte und alle Punkte in der Stadt selbst.** In eine etwa 1 m tiefe Grube wurde mittels Mörtel ein Unterbau $A$ aus Steinen gelegt. Auf diesen kam der eigentliche Granitstein $B$, oben mit einem Kreuz (⨯) versehen, zu ruhen. Dieser war oben durch einen Schlussstein $C$ mit abnehmbarem Deckstein $D$ versehen (vergl. Figur 45).

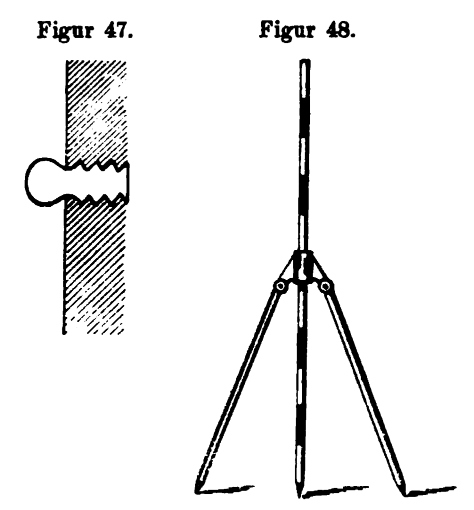
b) Die Feldpunkte wurden etwa $\frac{1}{2}$ m tief in die Erde gesenkt und bestanden aus einem Stein $A$ mit einer Deckplatte $B$. Der Ort war durch eine Drainageröhre $C$ kenntlich gemacht (vergl. Figur 46).

Meistens aber muss man zu viel einfacheren Bezeichnungen greifen und sich mit einfachen in die Erde gesenkten Steinen begnügen. Dann ist aber darauf zu sehen, dass für etwaige Nachmessungen die Steine gehörig gesichert sind.

Diese Bezeichnungsweise gilt für die neu aufzunehmenden Punkte.

Sollen diese Punkte anvisiert werden, so werden über sie Baken mit eigenem Stativ aufgestellt (vergl. Figur 48). Alles dieses setzt voraus, dass die trigonometrischen Punkte nach Pothenot oder Hansen (vergl. Frage 56) bestimmt werden. Diese Bestimmungsart dürfte für die meisten Fälle die bequemste sein, denn es lassen sich beim Vorwärtsabschneiden gewöhnlich die allzu spitzen Winkel nicht umgehen, so dass die auf die Ausgleichung verwendete Arbeit der Minderwertigkeit der Winkelbeobachtungen nicht entspricht.

Figur 47. Figur 48.



**Bemerkung.** Die eben beschriebene Fundierung ist teuer aber dauerhaft und erspart nach Jahren die Kosten einer Neuanlage. Was nützt eine noch so gewissenhafte Vermessung, wenn ihre Fundamentalpunkte mit der Zeit verloren gehen infolge mangelhafter Stabilisierung.

In der Stadt können auch Nivellementsbolzen (vergl. Figur 47) dazu verwendet werden, deren Lage durch Koordinaten bestimmt wird.

Der eigentliche Polygonalpunkt liegt dann irgendwo auf der Verbindungslinie zweier solcher Bolzen.

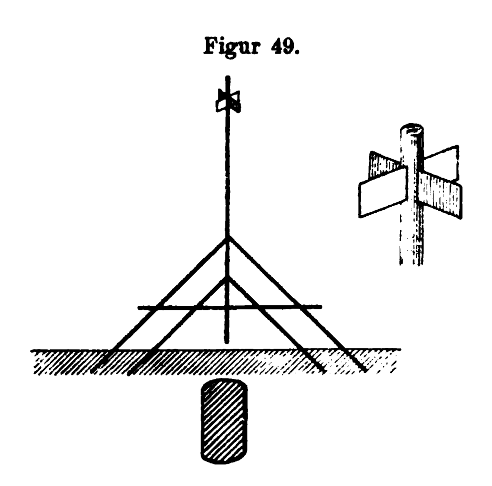
**Frage 57.** Wie werden die trigonometrischen Katastralpunkte bezeichnet?

**Antwort.** Die trigonometrischen Katastralpunkte werden, sofern sie nicht Türme oder anders schon bezeichnete Objekte sind, durch passende Signale bezeichnet.

Das gewöhnlichste Signal gibt die Figur 49 wieder. Da solche Punkte gewöhnlich auf weit entfernten Orten gelegen sind, so muss die Punktbezeichnung möglichst solid und dauerhaft sein, damit das Signal von mutwilliger Hand nicht verrückt werden kann. An der obersten Spitze befestigt man zwei quergelegte Bretter, die rot und weiss angestrichen werden, weil diese Farben aus der Ferne gut erkennbar sind.

Bei Landestriangulierungen ist man aber oft gezwungen, noch massivere und kostspieligere Signale zu bauen, die dann zugleich als Standpunkte für Theodolitmessungen dienen. Ist die Theodolitaufstellung nicht unter der Spitze möglich, wie dies bei den Türmen der Fall ist, dann werden oft exzentrische Standgerüste gebaut. Für die Praxis der Kleinvermessung sucht man aber solche kostspielige Bauten zu umgehen.

Figur 49.



**Bemerkung.** Bei Türmen, die als Katastralpunkte dienen, erkundige man sich, ob sie nicht nach der Zeit, aus welcher die Katastralbestimmung datiert, umgebaut worden sind. Auch benütze man lieber entferntere Katastralpunkte, als sehr naheliegende.

**Frage 58.** Wie viele polygonometrische Punkte hat man zu bestimmen?

**Antwort.** Nach Anweisung IX hat man mindestens soviel Punkte zu nehmen, dass im Durchschnitt je ein Polygonpunkt entfällt auf:

| Wenn die Parzellen in Mittel enthalten | mehr als 50 Ar | zwischen 50 und 5 Ar | weniger als 5 Ar, namentlich in Städten und geschlossenen Dörfern |
|---|---|---|---|
| | für den Massstab | | |
| | 1 : 2000 | 1 : 1000 | 1 : 500 |
| I. im offenen und ebenen Terrain ohne besondere Hindernisse | 7,5 ha | 3,0 ha | 1,0 ha |
| II. für gewöhnlich | 5,0 ha | 2,0 ha | 0,75 ha |
| III. beim schwierigen Terrain | 2,0 ha | 1,0 ha | 0,5 ha |

Nach der österreichischen Vermessungsanweisung (Instruktion) soll die Anzahl der Polygonpunkte zwischen 20 und 50 per Quadratkilometer je nach den Terrainverhältnissen betragen.

**Frage 59.** Wieviel trigonometrische Punkte hat man zu bestimmen?

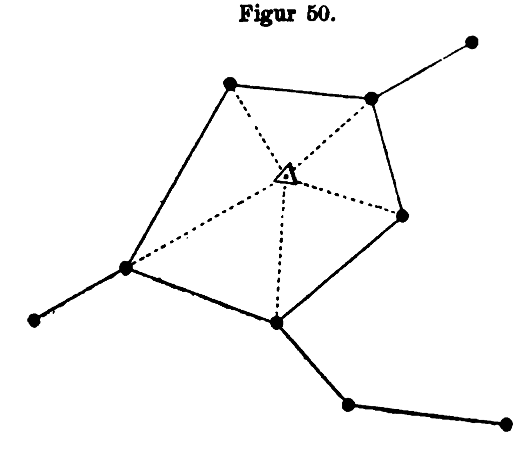
**Antwort.** Ebenso wie die Zahl der polygonometrischen ist auch die Zahl der trigonometrischen Punkte von den Terrainverhältnissen abhängig. Die österreichische Instruktion bestimmt, dass bei einer durchschnittlichen Parzellengrösse:

| | | |
|---|---|---|
| von 60 Ar und darüber | auf je 50 Hektar | ein trigonometrischer Punkt entfallen soll. |
| zwischen 60 und 40 Ar | auf je 40 Hektar | |
| zwischen 40 und 10 Ar | auf je 30 Hektar | |
| unter 10 Ar in Städten etc. | auf je 20—25 Hektar | |

Nach der preussischen Verordnung entfällt im Mittel auf etwa 25 Polygonpunkte ein trigonometrischer Punkt.

**Frage 60.** Worauf ist bei der Auswahl der trigonometrischen Punkte zu achten?

Figur 50.



**Antwort.** Obschon man für gewöhnlich alle jene Punkte, die sich trigonometrisch gut bestimmen lassen, wird mitnehmen müssen, flaches freies Land ausgenommen, so muss man trachten, die trigonometrischen Punkte womöglich gleichmässig über das ganze Netz zu verteilen. Kann man einen Kreuzungspunkt (siehe Figur 50) der Polygonzüge zu einem trigonometrischen machen, so thue man es. Dort insbesondere, wo sich Polygonpunkte zusammendrängen und die Polygonseiten kurz sind, trachte man auch, mehr trigonometrische Punkte zu erhalten.

Oft ist es angezeigt, einen trigonometrischen Punkt ausser dem Polygon zu nehmen. Dann suche man denselben mit möglichst vielen Polygonpunkten zu verbinden. Ueberhaupt kann die rationelle Anlage eines Polygonnetzes nur an praktischen Fällen er-

**Bemerkung.** Oft geschieht es, insbesondere in den Städten, dass man überhaupt sehr wenige bestimmbare trigonometrische Punkte hat. Dann freilich lassen sich die trigonometrischen Punkte nicht gleichmässig über das ganze Netz verteilen. Man muss den Mangel an solchen, durch sorgfältige Messung der Polygone zu ersetzen trachten.

lernt werden und ein gut angelegtes Netz ist ein Kunstwerk, auf welches man mit Recht stolz sein kann.

Die Anweisung IX gibt ein solches grosses Beispiel, an welchem man die Einzelheiten gut studieren kann, was wir ernst empfehlen.

**Frage 61.** Was ist über die Vermessung der Polygone zu bemerken?

**Bemerkung.** Für die Streckenmessung giltige Grenzen sind:

I. beim ebenen Terrain:

$$a = 0{\cdot}01\ \sqrt{4s + 0{,}005\,s^2}$$

II. beim mittleren Terrain:

$$a = 0{,}01\ \sqrt{6s + 0{,}0075\,s^2}$$

III. beim ungünstigen Terrain höchstens:

$$a = 0{,}01\ \sqrt{8s + 0{,}01\,s^2}$$

Dabei ist $a$ die höchstens zulässige Abweichung der beiden unabhängig gemessenen Längen und $s$ die Streckenlänge. In der Anweisung IX sind hiefür Tafeln gerechnet. (Taf. 3, Seite 33).

Also für 465 m beträgt die höchstens zulässige Abweichung der Reihe nach 0,54 m, 0,66 m, 0,77 m.

In Oesterreich ist die Formel:

$$a = 0{,}0006\,s + 0{,}02\ \sqrt{s}$$

wobei noch 20% Abweichung je nach den Terrainverhältnissen gestattet sind.

**Erkl. 55.** Seien nachstehende Winkel gegeben:

| | Gegebene Winkel | | Korrigierte Winkel |
|---|---|---|---|
| | 134° 15′ 32″ | +8 | 134° 15′ 40″ |
| | 73 41 44 | +8 | 73 41 52 |
| | 122 7 13 | +8 | 122 7 21 |
| | 180 14 21 | +8 | 180 14 29 |
| | 29 40 30 | +8 | 29 40 38 |
| Summe | 539° 59′ 20″ | | 540° 0′ 0″ |
| Statt | 540 0 0 | | |
| Fehler | — 40 | | |
| | 40 : 5 = 8 | | |

**Antwort.** Die Seiten der Polygone werden doppelt gemessen, die Winkel nach der Frage 91 Seite 79 des I. Teils.

Man thut gut, zunächst jedes Polygon in dieser Weise für sich zu absolvieren. Dann sind alle Winkel doppelt gemessen. Hierauf wird in jedem Polygon die Winkelsumme gebildet. Diese soll nicht mehr als:

$$1{,}5\ \sqrt{n}\ \text{in Minuten}$$

betragen, wobei $n$ die Zahl der gemessenen Winkel bezeichnet. Diese Grösse gilt für die alte Teilung 360°.

Also für ein 10-Eck z. B. 4′ 7
für ein 20-Eck 6′ 7

In Oesterreich ist diese Grenze durch:

$$75\ \sqrt{n}$$

Sekunden gegeben, also für ein 10-Eck:

3′ 57″

20-Eck:

5′ 35″

Ein so gewonnenes Polygon wird für sich berechnet, weil man so am bequemsten die Fehler in der Vermessung oder Rechnung entdecken kann. Früher aber muss die Abweichung von der wirklichen Summe der Winkel gleichmässig auf die einzelnen Winkel verteilt werden (vergl. Erkl. 55).

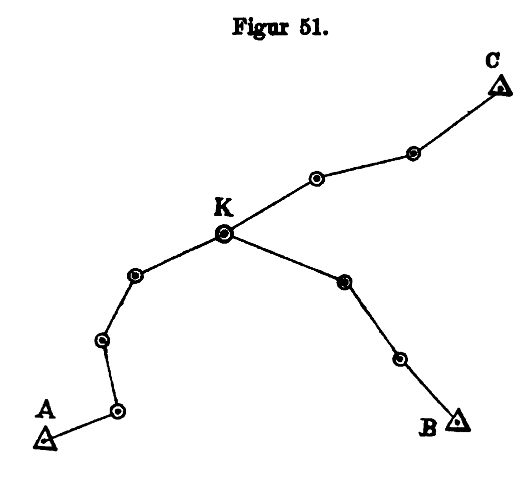
Man kann aber auch von einem trigonometrischen Punkt zum andern die Verbindungen rechnen.

Wir geben nachstehend Beispiele dieser beiden Rechnungsarten.

**Frage 62.** Was versteht man unter einem Knotenpunkt des Polygonzuges?

**Antwort.** Unter dem Knotenpunkt des Polygonzuges wird jener Punkt verstanden, in welchem mehrere Polygonzüge zusammen-

Figur 51.




**Erkl. 56.** Es ist klar, dass je weiter man sich von dem trigonometrischen Punkte befindet, desto ungenauer die Koordinaten werden. Sei also die Gesamtlänge des Polygonzuges von $A$ bis $K$ gleich $a$, von $B$ bis $K$ gleich $b$, von $C$ bis $K$ gleich $c$, so werden die Gewichte der einzelnen Bestimmungen umgekehrt proportional diesen Entfernungen. Also das Gewicht von $y_A x_A$ wird proportional:

$$\frac{1}{a}$$

jenes von $x_B y_B$ proportional zu:

$$\frac{1}{b} \text{ etc.}$$

laufen (vergl. Figur 51, Punkt $K$ ein Knotenpunkt).

Ist der Knotenpunkt zugleich ein trigonometrischer Punkt, so werden seine Koordinaten, so wie dieselben aus der trigonometrischen Bestimmung folgen, ungeändert beibehalten.

Anders verhält sich die Sache, wenn der Knotenpunkt kein trigonometrischer Punkt ist.

Nehmen wir an, es sei der Punkt $K$ (vergleiche Figur 51) der Vereinigungspunkt dreier Polygonzüge, die von den Punkten $A$, $B$, $C$ ausgehend nach der Art der Aufgabe 26 ohne Ausgleichung berechnet wurden. Man erhält dann für $K$ drei verschiedene Koordinatenwerte:

$$x_A \quad y_A$$
$$x_B \quad y_B$$
$$x_C \quad y_C$$

Es fragt sich nun, welches ist der rationelle Wert der Koordinaten von $K$.

Berücksichtigt man die Gewichte (siehe Erkl. 56), so wird nach:

$$x = \frac{x_A \frac{1}{a} + x_B \frac{1}{b} + x_C \frac{1}{c}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

und analog:

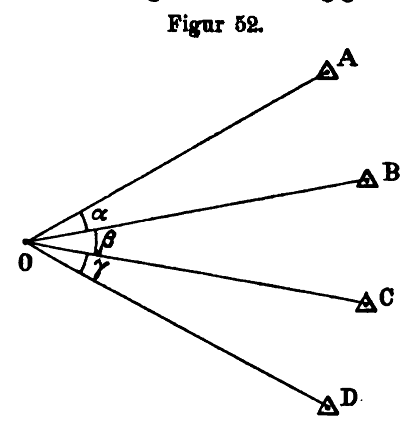
$$y = \frac{y_A \frac{1}{a} + y_B \frac{1}{b} + y_C \frac{1}{c}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}.$$

---

# 9. Ueber die Anwendung der Ausgleichsrechnung auf trigonometrisch-polygonometrische Probleme.

**Frage 63.** Wann wird die Ausgleichsrechnung in Anwendung gebracht?

Figur 52.




**Antwort.** Die Ausgleichsrechnung wird angewendet, sobald überschüssige Beobachtungen vorliegen. Hat man z. B. zur Bestimmung des Punktes $O$ (vergl. Figur 52) die Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ bei gegebenen Punkten $A$, $B$, $C$, $D$ gemessen, so gibt es mehrere Möglichkeiten, den Punkt $O$ mit Hilfe des Pothenotschen Problems zu bestimmen. Es kann nämlich die Bestimmung aus irgend welcher der nachstehenden Kombinationen erfolgen:

$A\ B\ C$
$A\ C\ D$
$B\ C\ D$
$A\ B\ D$

Die Aufgabe der Ausgleichsrechnung besteht nun darin: den Punkt $O$ so zu be-

**Bemerkung.** Die Ausgleichung kann entweder graphisch oder rechnerisch erfolgen. Die rechnerische ist wissenschaftlicher, die graphische bequemer, aber nicht so genau.

stimmen, dass einer jeden dieser Kombinationen möglichst entsprochen wird.

---

**Frage 64.** Wie wird die Ausgleichung bewerkstelligt?

**Antwort.** Nehmen wir der Einfachheit wegen an, wir hätten zur Bestimmung des Punktes $O$ (vergl. Figur 52) die Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ gemessen. Die Punkte $A$, $B$, $C$, $D$ seien gegebene Katastralpunkte. Aus irgend welcher der obigen Kombinationen berechnen wir nach Pothenot die vorläufigen Koordinaten des Punktes $O$. Dann wird:

$$\operatorname{tg}\alpha_{OA} = \frac{y_A - y_O}{x_A - x_O}; \quad \operatorname{tg}\alpha_{OC} = \frac{y_C - y_O}{x_C - x_O}$$

$$\operatorname{tg}\alpha_{OB} = \frac{y_B - y_O}{x_B - x_O}; \quad \operatorname{tg}\alpha_{OD} = \frac{y_D - y_O}{x_D - x_O}$$

Als so gefundene Winkel bilden wir:

$$\alpha' = \alpha_{OA} - \alpha_{OB}$$
$$\beta' = \alpha_{OC} - \alpha_{OB}$$
$$\gamma' = \alpha_{OD} - \alpha_{OC}$$

Sei nun:

$$\alpha - \alpha' = \Delta\alpha$$
$$\beta - \beta' = \Delta\beta$$
$$\gamma - \gamma' = \Delta\gamma$$

so müsste, den Fall der absolut genauen Beobachtung und die absolute Richtigkeit der Koordinaten $x_O\, y_O$ vorausgesetzt, auch:

$$\Delta\alpha = \Delta\beta = \Delta\gamma = 0$$

sein, d. h. die berechneten Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ würden mit den beobachteten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ genau übereinstimmen. Dieses wird wohl nie oder sehr selten der Fall sein.

Dann aber müssen wir die Grössen $x_O$ und und $y_O$ um $\Delta x$ resp. $\Delta y$ vermehren, welche Grössen wir so bestimmen wollen, dass die Gleichung:

$$\Delta\alpha = \Delta\beta = \Delta\gamma = 0$$

möglichst erfüllt werde. Nach den in der Ausgleichsrechnung dargelegten Prinzipien benützen wir dazu die Methode der kleinsten Quadrate.

Aus:

$$\log \operatorname{tg}\alpha_{OA} = \log(y_A - y_O) - \log(x_A - x_O)$$

folgt durch Differentiation:

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_{OA}} \frac{\Delta\alpha_{OA}}{\cos^2\alpha_{OA}} = \frac{\Delta y_{OA}}{y_A - y_O} - \frac{\Delta x_O}{x_A - x_O}$$

(vergl. Erkl. 57),

**Bemerkung.** Wir wollen zu den nebenstehenden Formeln noch weiter bemerken. Es sei:

$$\operatorname{tg}\alpha_{OA} = \frac{y_A - y_O}{x_A - x_O}$$

Werden $y_O$ und $x_O$ um $\Delta y$ resp. $\Delta x$ vermehrt, so ändert sich auch $\alpha_{OA}$, welches in $\alpha_{OA} + \Delta\alpha$ übergehen mag. Wir haben also:

$$\operatorname{tg}(\alpha_{OA} + \Delta\alpha) = \frac{y_A - y_O - \Delta y}{x_A - x_O - \Delta x}$$

oder logarithmisch:

$$\log \operatorname{tg}(\alpha_{OA} + \Delta\alpha) = \log(y_A - y_O - \Delta y) - \log(x_A - y_O - \Delta x)$$

Nun ist aber:

$$\log \operatorname{tg}\alpha_{OA} = \log(y_A - y_O) - \log(x_A - x_O)$$

Wird diese Gleichung von der vorhergehenden subtrahiert, so folgt:

$$\log \frac{\operatorname{tg}(\alpha_{OA} + \Delta\alpha)}{\operatorname{tg}\alpha_{OA}} = \log\left(1 - \frac{\Delta y}{y_A - y_O}\right) - \log\left(1 - \frac{\Delta x}{x_A - x_O}\right)$$

Nun ist aber ganz allgemein ($\xi < 1$):

$$\log(1 - \xi) = -\xi - \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{3}\xi^3 \ldots$$

also:

$$\log \frac{\operatorname{tg}(\alpha_{OA} + \Delta\alpha)}{\operatorname{tg}\alpha_{OA}} = \frac{\Delta y}{y_A - y_O} - \frac{\Delta x}{x_A - x_O}$$

wobei wir die zweiten Potenzen der Grössen $\Delta x$, $\Delta y$ vernachlässigen.

Darauf beruhen aber auch unsere nebenstehenden Entwicklungen. Also nur dann, wenn dieses geschehen kann, sind sie verwendbar.

**Erkl. 57.** Es ist nach Kleyers Lehrbuch der Differentialrechnung:

$$d \log x = \frac{dx}{x}$$

also wenn:

$$x = \operatorname{tg} \varphi$$

gesetzt wird:

$$d \log \operatorname{tg} \varphi = \frac{d(\operatorname{tg} \varphi)}{\operatorname{tg} \varphi}$$

Nun ist aber:

$$d \operatorname{tg} \varphi = \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}$$

also wird:

$$d \log \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}$$

oder da:

$$\operatorname{tg} \varphi \cdot \cos^2 \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cdot \cos \varphi \cdot \cos \varphi$$
$$= \sin \varphi \cos \varphi$$

auch:

$$d \log \operatorname{tg} \varphi = \frac{d\varphi}{\sin \varphi \cos \varphi}$$

**Erkl. 58.** Wir haben die Proportion:

$$\varDelta\alpha : 2r\pi = \varDelta\alpha'' : 360 \cdot 60 \cdot 60''$$

also wenn $r = 1$ gesetzt wird:

$$\varDelta\alpha'' = \varDelta\alpha \cdot \frac{360 \cdot 60 \cdot 60 \cdot}{2r\pi}$$

dabei drückt $\varDelta\alpha''$ die Zahl der zur Bogenlänge $\varDelta\alpha$ gehörigen Bogensekunden aus.

also auch:

$$\varDelta\alpha_{OA} = \varDelta y_O \frac{\sin \alpha_{OA}}{y_A - y_O} \cos \alpha_{OA}$$
$$- \varDelta x_O \frac{\cos \alpha_{OA}}{x_A - x_O} \sin \alpha_{OA}$$

Nun ist weiter:

$$r_{OA} = \frac{y_A - y_O}{\sin \alpha_{OA}} = \frac{x_A - x_O}{\cos \alpha_{OA}}$$

also wird:

$$\varDelta\alpha_{OA} = \frac{\varDelta y_O}{r_{OA}} \cos \alpha_{OA}$$
$$- \frac{\varDelta x_O}{r_{OA}} \sin \alpha_{OA}$$

Ist $\varDelta\alpha_{OA}$ in Bogensekunden ausgedrückt, so kann gesetzt werden:

$$\varDelta\alpha''_{OA} = \varDelta\alpha_{OA} \, [5 \cdot 31\,443]$$

wobei die Zahl in der Klammer ein Logarithmus ist (vergl. Erkl. 58).

Wir haben also:

$$\varDelta\alpha = \varDelta\alpha_{OB} - \varDelta\alpha_{OA} = \varDelta y_O \left\{ \frac{\cos \alpha_{OB}}{r_{OB}} - \frac{\cos \alpha_{OA}}{r_{OA}} \right\} - \varDelta x \left\{ \frac{\sin \alpha_{OB}}{r_{OB}} - \frac{\sin \alpha_{OA}}{r_{OA}} \right\}$$

oder in noch kürzerer Bezeichnungsweise, wenn gesetzt wird:

$$\frac{\cos \alpha_{OB}}{r_{OA}} - \frac{\cos \alpha_{OA}}{r_{OA}} = p_{BA}$$

$$\frac{\sin \alpha_{OB}}{r_{OB}} - \frac{\sin \alpha_{OA}}{r_{OA}} = q_{BA}$$

und analog für $\beta$ und $\gamma$:

$$\varDelta\alpha = p_{BA} \; \varDelta y_O + q_{BA} \; \varDelta x_O$$
$$\varDelta\beta = p_{CB} \; \varDelta y_O + q_{CB} \; \varDelta x_O$$
$$\varDelta\gamma = p_{DC} \; \varDelta y_O + q_{DC} \; \varDelta x_O$$

welche Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate zu lösen sind.

---

**Frage 65.** Wie wird die graphische Ausgleichung bewirkt?

**Antwort.** Man hat mehrere Methoden der graphischen Ausgleichung.

Die einfachste ist, man bringt eine jede Gleichung auf die Form:

$$1 = \frac{\varDelta y_0}{\frac{\varDelta\alpha}{p_{OA}}} + \frac{\varDelta x_0}{\frac{\varDelta\alpha}{q_{OA}}}$$

und konstruiert für ein gegebenes Koordinatensystem die Gerade (vergl. Erkl. 59). Man erhält so mehrere Gerade, die sich in den Punkten:

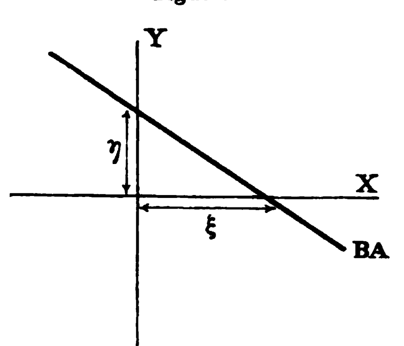
$$A, \; B, \; C \cdots$$

**Erkl. 59.** Sei:

$$(x : \xi) + (y : \eta) = 1$$

die gegebene Gleichung, so wird für $y = 0$ $x = \xi$ und für $x = 0$, $y = \eta$ (vergl. Figur 58).

Figur 53.




schneiden. Der Schwerpunkt dieser Punkte ($P$ in der Figur 54) hat die Koordinaten:

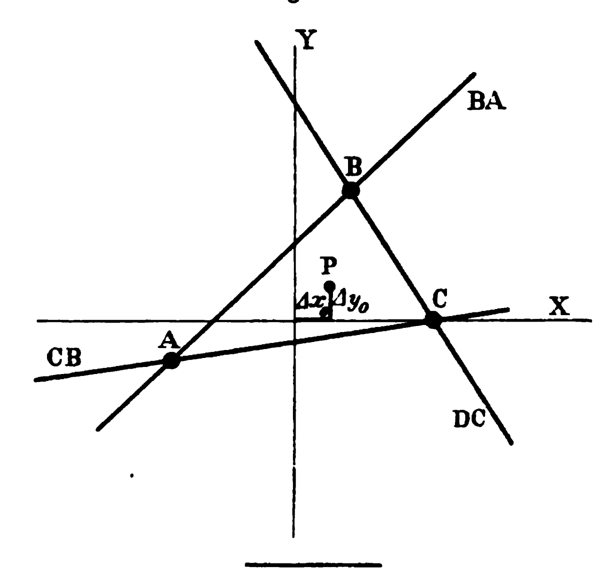
$$\Delta y_0 \text{ und } \Delta x_0$$

Wie der Schwerpunkt zu einer Zahl von Punkten zu suchen ist, brauchen wir nicht weiter auseinanderzusetzen.

Diese Andeutung über graphische Ausgleichung möge genügen.

Kunstvolle graphische Ausgleichungen, die fast ebensoviel Zeit in Anspruch nehmen wie die direkte Berechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, ohne dabei so genau zu sein, sind zu verwerfen.

Figur 54.




---

**Frage 66.** Wie wird für das in der Aufgabe 23 gegebene Problem die Ausgleichung durchgeführt?

**Antwort.** Sei allgemein:

$$y_L - x_L \operatorname{tg} \alpha_{OL} = p_L$$

Dann lauten die Gleichungen:

$$y_O - x_O \operatorname{tg} \alpha_{OB} = p_B$$
$$y_O - x_O \operatorname{tg} \alpha_{OC} = p_C$$
$$y_O - x_O \operatorname{tg} \alpha_{OD} = p_D$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Man bestimme sich $\eta$ und $\xi$ aus:

$$1) \ldots \eta - \xi \operatorname{tg} \alpha_{OB} = p_B$$
$$2) \ldots \eta - \xi \operatorname{tg} \alpha_{OC} = p_C$$

und setze:

$$y_O = \eta + \Delta\eta$$
$$x_O = \xi + \Delta\xi$$

**Erkl. 60.** Subtrahiert man die Gleichung 1) von der Gleichung, so folgt:

$$\xi(\operatorname{tg} \alpha_{OB} - \operatorname{tg} \alpha_{OC}) = p_C - p_B$$
$$= \xi \frac{\sin \alpha_{OB} \cos \alpha_{OC} - \sin \alpha_{OC} \cos \alpha_{OB}}{\cos \alpha_{OB} \cos \alpha_{OC}}$$

so dass:

$$\xi = \frac{(p_C - p_B) \cos \alpha_{OB} \cos \alpha_{OC}}{\sin(\alpha_{OB} - \alpha_{OC})}$$

Dann ist:

$$\eta = p_B + \xi \operatorname{tg} \alpha_{OB}$$

oder zur Kontrolle:

$$\eta = p_C + \xi \operatorname{tg} \alpha_{OC}$$

so wird, wenn wieder allgemein:

$$\eta - \xi \operatorname{tg} \alpha_{O\,L} = q_L$$

gesetzt wird:

$$\Delta\eta - \Delta\xi \cdot \operatorname{tg} \alpha_{O\,B} = p_B - q_B$$
$$\Delta\eta - \Delta\xi \cdot \operatorname{tg} \alpha_{O\,C} = p_C - q_C$$
$$\Delta\eta - \Delta\xi \cdot \operatorname{tg} \alpha_{O\,D} = p_D - q_D$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

welche Gleichungen nach Frage 217 des I. Teiles aufzulösen sind.

---

**Frage 67.** Wie werden nach „Anweisung IX" die Polygonzüge ausgeglichen?

**Bemerkung.** Wir benützen im Nachstehenden die Bezeichnungen der Anweisung IX um den Uebergang von diesen Auseinandersetzungen zu der wirklichen Anwendung nach dieser Anweisung anzubahnen.

**Bemerkung.** Nach der österreichischen Instruktion vom Jahre 1887 ist die Fehlergrenze:

$$f_s = 0{\cdot}006\,[s] + 0{\cdot}02\,\sqrt{[s]}$$

Längenmessungen unter günstigen Verhältnissen haben um 20% weniger, unter ungünstigen 20% mehr zur Grenze.

Man hat nachstehende Tafel für mittlere Verhältnisse:

| $[\Delta s]$ | Oesterreich | Deutschland |
|---|---|---|
| 100 | 0·26 m | 0·26 m |
| 200 | 0·41 | 0·39 |
| 300 | 0·53 | 0·50 |
| 400 | 0·64 | 0·60 |
| 500 | 0·75 | 0·70 |
| 600 | 0·85 | 0·80 |
| 700 | 0·85 | 0·89 |
| 800 | 1·05 | 0·98 |
| 900 | 1·14 | 1·07 |
| 1000 | 1·23 | 1·17 |

**Antwort.** Seien:

$$[\Delta y'] = f_y, \quad [\Delta x'] = f_x$$

die Abweichungen der Summe der Koordinatendifferenzen gegen $O$.

Dann ist:

$$f_s = \sqrt{f_y^2 + f_x^2}$$

der sogenannte lineare Schlussfehler des Polygons. Dieser Fehler soll diejenige Grenze nicht übersteigen, welche für die Gesamtlänge aller Polygonseiten $[s]$ gesetzlich sind (vergl. I. Teil, Seite 60, Frage 80).

Also für Deutschland unter mittleren Verhältnissen:

$$f_s = 0{\cdot}01\,\sqrt{6\,[s] + 0{\cdot}0075\,[s]^2}$$

Da auf die Polygonzüge hauptsächlich die Fehler der Längenmessungen einwirken, so ist für sie das in der Erkl. 181 des I. Teils mitgeteilte Fehlergesetz massgebend. Das heisst, die Koordinaten sind im Verhältnis der gemessenen Seitenlängen vom Ausgangspunkt an gerechnet, zu verbessern.

Demnach ist die Verbesserung für eine Seite von der Länge $s$ in der $y$-Koordinate:

$$v_y = \frac{f_y}{[s]}\,s$$

und für die $x$-Koordinate:

$$v_x = \frac{f_x}{[s]}\,s$$

Die Anwendung dieser Formeln setzt aber voraus, dass man keine Winkelfehler gemacht hat.

---

**Frage 68.** Wie überzeugt man sich, dass die Winkelfehler, die man bei der Messung eines Polygons begangen hat, von keinem wesentlichen Einfluss auf das Resultat sind?

**Antwort.** Um sich zu überzeugen, dass die Winkelfehler ohne Belang sind, betrachte man die Lage der nach der obigen Vorschrift verbesserten und der unverbesserten Strecke.

**Erkl. 61.** Sei:

$$\Delta y' = \Delta y' + \eta$$
$$\Delta x' = \Delta x' + \xi$$

so wird:

$$\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi' = \frac{\Delta y' + \eta}{\Delta x' + \xi} - \frac{\Delta y'}{\Delta x'}$$
$$= \frac{\Delta y'\,\Delta x + \eta\,\Delta x' - \Delta y'\,\Delta x + \xi\,\Delta \eta'}{\Delta x' \cdot (\Delta x' + \xi)}$$

oder mit Vernachlässigung der zweiten Differenzen:

$$\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi' = \frac{\eta\,\Delta x' - \xi\,\Delta y'}{(\Delta x')^2}$$

Da nun $\varphi$ sehr nahe an $\varphi'$ ist, so kann man setzen:

$$\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi' = d \cdot \operatorname{tg}\varphi = \frac{\varphi - \varphi'}{\cos^2\varphi}$$

denn nach den Lehren der Differentialrechnung (vergl. Kleyer, Lehrbuch der Differentialrechnung) ist:

$$d\operatorname{tg}\varphi = \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}$$

Die obige Formel lässt sich, da:

$$\cos^2\varphi = \frac{\Delta x^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

ist, auch schreiben wie folgt:

$$\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi' = \left(1 : \frac{\Delta x^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)(\varphi - \varphi')$$

Demnach wird (wenn man noch $x = x'$ setzt):

$$\varphi - \varphi' = \frac{\eta\,\Delta x' - \xi\,\Delta y'}{\Delta x'^2} \cdot \frac{\Delta x'^2}{\Delta x'^2 + \Delta y'^2}$$

auch:

$$\varphi - \varphi' = \frac{\eta\,\Delta x' - \xi\,\Delta y'}{\Delta x'^2 + \Delta y'^2}$$

**Wären diese beiden Strecken parallel, dann ist klar, dass die Fehler der Winkelmessung gering sind. Der Einfluss der Winkelfehler wird sich also darin zeigen, dass die beiden Strecken nicht parallel sind.**

**Sei also:**

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{\Delta y'}{\Delta x'}$$

**so wird:**

$$\varphi - \varphi'$$

**das Mass der Winkelfehler.**

**$\Delta y$, $\Delta x$ sind die ausgeglichenen, $\Delta y'$, $\Delta x'$ die unausgeglichenen Koordinatendifferenzen.**

**Setzt man:**

$$\Delta y = \Delta y' + \eta$$
$$\Delta x = \Delta x' + \xi$$

**so ergibt sich (vergl. Erkl. 61):**

$$\varphi - \varphi' = \frac{\eta\,\Delta x' - \xi\,\Delta y'}{\Delta x'^2 + \Delta y'^2}$$

**Will man den Winkelfehler direkt in Minuten haben, so hat man zu schreiben:**

$$\varphi - \varphi' = 3438 \cdot \frac{\eta\,\Delta x' - \xi\,\Delta y'}{\Delta x'^2 + \Delta y^2}$$

**und wenn derselbe in Sekunden verlangt wird, so ist:**

$$\varphi - \varphi' = 206\,265\,\frac{\eta\,\Delta x' - \xi\,\Delta y'}{\Delta x'^2 + \Delta y'^2}$$

**Dieses ist der Ausdruck für die Verbesserung, wenn nur Winkelfehler angenommen werden.**

**Bezeichnen wir für die Folge diesen Fehler mit:**

$$e$$

---

**Frage 69.** Wie lautet der Ausdruck für den Längenfehler?

**Antwort.** **Um einen analogen Ausdruck für den Längenfehler zu erhalten, setzen wir:**

$$(s + \delta s)^2 = (\Delta x' + \xi)^2 + (\Delta y' + \eta)^2$$

**so dass also:**

$$\frac{\delta s}{s} = \frac{\xi\,\Delta x' + \eta\,\Delta y'}{\Delta x'^2 + \Delta y'^2}$$

**Dieser Ausdruck gilt aber nur dann, wenn nur Längenfehler vorkommen.**

**Wir wollen diesen Fehler mit:**

$$\varepsilon$$

**bezeichnen.**

**Erkl. 62.** Durch Quadrieren folgt:

$$s^2 + 2s\delta s + \delta s^2$$
$$= \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + 2\xi\,\Delta x' + 2\eta\,\Delta y' + \xi^2 + \eta^2$$

werden die Grössen $\delta s^2$, $\xi^2$, $\eta^2$ vernachlässigt und beachtet man, dass:

$$s^2 = \Delta x'^2 + \Delta'^2$$

so folgt der nebenstehende Ausdruck.

---

**Frage 70.** Wie lautet der Fehlerausdruck, wenn beide Fehler, d. h. Längen- und Winkelfehler zugleich vorkommen?

**Antwort.** **Allgemein ist:**

$$x = s\cos\alpha$$
$$y = s\sin\alpha$$

**Erkl. 68.** Man hat:

$$\cos(\alpha + \delta\alpha) = \cos\alpha \sin\delta\alpha - \sin\alpha \cos\delta\alpha$$

setzt man nun:

$$\sin\delta\alpha = \delta\alpha$$
$$\cos\delta\alpha = 1$$

so folgt:

$$\cos(\alpha + \delta\alpha) = \cos\alpha \cdot \delta\alpha - \sin\alpha$$

analog ergibt sich:

$$\sin(\alpha + \delta\alpha) = \sin\alpha + \cos\alpha \cdot \delta\alpha$$

also:

$$y' + \delta y = (s + \delta s)(\sin\alpha + \delta\alpha \cos\alpha)$$
$$= \sin\alpha + s\cos\alpha \cdot \delta\alpha + \frac{\delta s}{s} \cdot s \sin\alpha$$
$$+ \delta s \delta\alpha \cos\alpha$$

woraus wegen:

$$y' = s\sin\alpha$$

auch:

$$\delta y = s\cos\alpha \cdot \delta\alpha + \frac{\delta s}{s} \cdot s\sin\alpha$$

folgt, denn $\delta s \cdot \delta\alpha \cos\alpha$ ist eine kleine Grösse, die wir vernachlässigen. Setzt man noch hiezu $x'$ und $y'$ ein, so folgt:

$$\delta y = x'\delta\alpha + \frac{\delta s}{s} y'$$

also wenn:

$$s \text{ in } s + \delta s$$
$$\alpha \text{ in } \alpha + \delta\alpha$$

übergeht:

$$x' + \delta x = (s + \delta s)\cos(\alpha + \delta\alpha)$$
$$y' + \delta y = (s + \delta s)\sin(\alpha + \delta\alpha)$$

oder:

$$\delta y = x'\delta\alpha + \frac{\delta s}{s} y'$$
$$\delta x = -y'\delta\alpha + \frac{\delta s}{s} x$$

also da:

$$\delta\alpha = e$$
$$\frac{\delta s}{s} = \varepsilon$$

auch:

$$\delta y = x' \cdot e + \varepsilon \cdot y'$$
$$\delta x = -y' \cdot e + \varepsilon \cdot x'$$

Nun kennen wir $\delta y$ und $\delta x$; wir setzen also:

$$f_y = [\varDelta x]e + [\varDelta y]\varepsilon$$
$$f_x = [\varDelta x]\varepsilon - [\varDelta y]e$$

woraus:

$$\varepsilon = \frac{f_y[\varDelta y] + f_x[\varDelta x]}{[\varDelta y]^2 + [\varDelta x]^2}$$
$$e = \frac{f_y[\varDelta x] - f_x[\varDelta y]}{[\varDelta y]^2 + [\varDelta x]^2}$$

folgt.

Die Anweisung IX bestimmt nun, dass wenn:

$$e < 0{,}0003$$

nachstehende Koordinatenverbesserungen angewendet werden:

$$v_y = \frac{f_y}{[s]} s, \quad v_x = \frac{f_x}{[s]} s$$

**Bemerkung.** Für den Fall, dass $\varphi > 0{,}0003$, hat man allgemein zu setzen:

$$e(\varDelta x_1 + 2\varDelta x_2 + \varDelta x_3 + 2\varDelta x_4 + \cdots) = eX$$
$$-\varepsilon(\varDelta y_1 + 2\varDelta y_2 + \varDelta y_3 + 2\varDelta y_4 + \cdots) = -eY$$

so dass man erhält:

$$\varepsilon = \frac{f_y Y + f_x X}{X[\varDelta x] + Y[\varDelta y]}$$
$$e = \frac{f_y[\varDelta x] - \xi_x[\varDelta y]}{X[\varDelta x] + Y[\varDelta y]}$$

und weiter:

$$v_y = \varepsilon \cdot \varDelta y + e_z \cdot \varDelta x$$
$$v_x = \varepsilon \cdot \varDelta x - e_z \cdot \varDelta y$$

Der Zeiger $z$ ist abweichend 1, 2, 1, 2 zu setzen, jedoch so, dass für die erste und letzte Strecke $e_z$ nicht gleich 2 wird.

Dieses ist die Vorschrift der Anweisung IX.

Die österreichische Instruktion vom Jahr 1887 bestimmt im ähnlichen Falle dass man zu setzen hat:

$$v_y = zs\frac{f_y}{[zs]}, \quad v_x = zs\frac{f_x}{[zs]}$$

dabei ist $s$ die Länge der betreffenden Polygonseite und:

$$z_r = r(n-r)$$

wobei $n$ die Anzahl der Brechungswinkel und $z_r$ der $z$-Faktor für die $r$-Seite des Zuges ist. Diese Regel gilt aber nur für Polygonzüge bis zu sieben Brechungswinkeln. Für Züge mit mehr als sieben Brechungswinkeln ist:

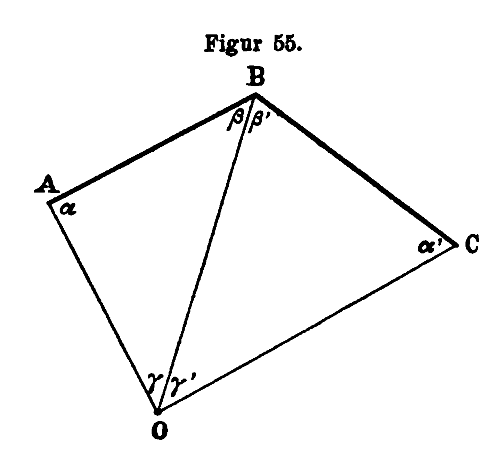
für die erste und letzte Seite des Zuges $z = 3$
für die zweite und vorletzte Seite des Zuges $z = 5$
für alle übrigen Seiten des Zuges $z = 6$.

Besondere Beispiele führen wir nicht an, da man ja deren eine ganze Menge in den Vermessungsanweisungen hat.

---

**Frage 71.** Wie wird die Ausgleichung zusammenhängender Figuren bewirkt?

Figur 55.




**Erkl. 64.** Nach Frage 39, Seite 33 haben wir bei 4 Punkten:

$$2 \cdot 4 - 3 = 5$$

notwendige Grössen. Hier sind aber 9, nämlich 1) die Seiten:

$$AB \text{ und } BC$$

sowie der Winkel:

$$ABC$$

durch die Koordinaten der Katastralpunkte gegeben und 2) die Winkel:

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \alpha',\ \beta',\ \gamma'$$

gemessen worden. Demnach sind noch:

$$9 - 5 = 4$$

Bedingungsgleichungen zu erfüllen. Darunter muss mindestens eine Seitengleichung sein.

**Bemerkung.** Wir führen dieses Beispiel ganz aus, um für alle Fälle die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate zugänglich zu machen.

**Antwort.** Um die Art und Weise der Ausgleichung bei zusammengesetzten Figuren zu erklären, nehmen wir ein einfaches Beispiel: Zur Bestimmung des Punktes $O$ (vergl. Fig. 55) wurden von drei gegebenen Katastralpunkten $A$, $B$, $C$ alle Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ gemessen und Widersprüche gefunden.

Erstens:

$$\text{I} \ldots \alpha + \beta + \gamma = 180^0 + v$$

$$\text{II} \ldots \alpha' + \beta' + \gamma' = 180^0 - v'$$

Ausserdem wurde der Winkel $ABC$ aus den Punkten $A$, $B$, $C$ berechnet (vergleiche Aufgabe auf Seite 51) und gleich $\varphi$ gefunden. Man fand so:

$$\text{III} \ldots \beta + \beta' = \varphi + v''$$

Dadurch sind die Winkelgleichungen erschöpft (vergl. Frage 41).

Dazu kommt noch die Seitengleichung:

$$OB = \frac{AB}{\sin\gamma}\sin\alpha = \frac{BC}{\sin\gamma'}\sin\alpha'$$

also sollte sein:

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{\sin\alpha \sin\gamma'}{\sin\alpha' \sin\gamma} = 1 \ldots$$

es war aber dieser Ausdruck gleich:

$$1 + w$$

gefunden. Man hat also:

$$\text{IV} \ldots \frac{AB}{BC} \cdot \frac{\sin\alpha \sin\gamma'}{\sin\alpha' \sin\gamma} = 1 + w$$

Bezeichnen wir die Verbesserungen der einzelnen Winkel durch ein vorgesetztes $\Delta$, so lauten die Bedingungsgleichungen:

$$\text{V} \ldots \begin{cases} \Delta\alpha + \Delta\beta + \Delta\gamma = v \\ \Delta\alpha' + \Delta\beta' + \Delta\gamma' = v' \\ \Delta\beta + \Delta\beta' = v'' \\ \dfrac{AB}{BC} \cdot \dfrac{\sin(\alpha + \Delta\alpha)\sin(\gamma' + \Delta\gamma')}{\sin(\alpha' + \Delta\alpha')\sin(\gamma + \Delta\gamma)} = 1 \end{cases}$$

Diese Formel ist aber für die Berechnung nicht geeignet.

Wir schreiben:

$$\log AB - \log BC + \log\sin(\alpha + \varDelta\alpha) + \log\sin(\gamma' + \varDelta\gamma') - \log\sin(\alpha' + \varDelta\alpha') - \log\sin(\gamma + \varDelta\gamma) = 0$$

$$\log AB - \log BC + \log\sin\alpha + \log\sin\gamma' - \log\sin\alpha' - \log\sin\gamma = \log(1 + w)$$

Subtrahiert man beide Gleichungen von einander, so folgt:

$$\log\frac{\sin(\alpha + \varDelta\alpha)}{\sin\alpha} + \log\frac{\sin(\gamma' + \varDelta\gamma')}{\sin\gamma'} - \log\frac{\sin(\alpha' + \varDelta\alpha')}{\sin\alpha'} - \log\frac{\sin(\gamma + \varDelta\gamma)}{\sin\gamma} = \log\frac{1}{1 + w}$$

**Erkl. 65.** Es ist:

$$\frac{\sin(\alpha + \varDelta\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha\cos\varDelta\alpha + \cos\alpha\sin\varDelta\alpha}{\sin\alpha} = \cos\varDelta\alpha + \sin\varDelta\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha$$

Setzt man, da $\varDelta\alpha$ ein kleiner Winkel ist:

$$\cos\varDelta\alpha = 1$$
$$\sin\varDelta\alpha = \varDelta\alpha$$

so folgt nebenstehende Formel.

**Erkl. 66.** Es ist allgemein:

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

der Beweis dieser Formel gehört in die algebraische Analysis.

**Bemerkung.** Setzt man $\varDelta\alpha = 1''$, so wird:

$$\log\sin(\alpha + 1'') - \log\sin\alpha$$

gleich der Differenz für $1''$ in den logarithmischen Tafeln.

Um also:

$$\varrho\operatorname{ctg}\alpha$$

zu erhalten, hat man nun die logarithmische Differenz für 1 Sekunde in der Nähe des Winkels $\alpha$ zu nehmen.

**Bemerkung.** Unter dem Namen Korrelaten versteht man in der Ausgleichsrechnung dasselbe, was man sonst Lagrange-Multiplikatoren nennt. Es sind dieses unbestimmte Koëffizienten, mit welchen man die Bedingungsgleichungen multipliziert, um sie zu der Minimumgleichung hinzuzuaddieren. Sie werden dadurch bestimmt, dass man die einzelnen Partialdifferentialquotienten gleich Null setzt.

Nun ist aber (vergl. Erkl. 65):

$$\frac{\sin(\alpha + \varDelta\alpha)}{\sin\alpha} = 1 + \varDelta\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha$$

und (vergl. Erkl. 66):

$$\log(1 + \varDelta\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha) = \varDelta\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha$$

also wird:

$$\varDelta\alpha\operatorname{ctg}\alpha + \varDelta\gamma'\operatorname{ctg}\gamma' - \varDelta\alpha'\operatorname{ctg}\alpha' - \varDelta\gamma\operatorname{ctg}\gamma = -w$$

Weil man aber $\varDelta\alpha$ in Bogensekunden ansetzt, so ist:

$$(\varDelta\alpha)'' = (\varDelta\alpha)\,206\,265$$

also wenn:

$$206\,265 \text{ mit } \varrho$$

bezeichnet wird:

$$\varDelta\alpha\cdot\varrho\operatorname{ctg}\alpha + \varDelta\gamma'\cdot\varrho\operatorname{ctg}\gamma' - \varDelta\alpha'\cdot\varrho\operatorname{ctg}\alpha' - \varDelta\gamma\cdot\varrho\operatorname{ctg}\gamma = -w$$

Wir schreiben kurz:

$$\varrho\operatorname{ctg}\alpha = n_\alpha$$
$$\varrho\operatorname{ctg}\alpha' = n_\alpha'$$

und analog bei den übrigen.

Dann ist:

$$\text{A})\ldots\begin{cases} n_\alpha\varDelta\alpha + n_\gamma'\varDelta\gamma' - n_\alpha'\varDelta\alpha' - n_\gamma\varDelta\gamma = -w \\ \varDelta\alpha + \varDelta\beta + \varDelta\gamma = v \\ \varDelta\alpha' + \varDelta\beta' + \varDelta\gamma' = v' \\ \varDelta\beta + \varDelta\beta' = v'' \end{cases}$$

Ausserdem soll nach dem Ausgleichsprinzip:

$$\varDelta\alpha^2 + \varDelta\beta^2 + \varDelta\gamma^2 + \varDelta\alpha'^2 + \varDelta\beta'^2 + \varDelta\gamma'^2 = \text{Minimum}$$

sein, nachdem man aber die obigen vier Gleichungen mit einbezogen hat.

Zu diesem Zwecke multiplizieren wir die Bestimmungsgleichungen mit den Korrelaten:

$$k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4$$

Man hat also die Gleichung:

$$W = (n_\alpha\varDelta\alpha + n_\gamma'\varDelta\gamma' - n_\alpha'\varDelta\alpha' - n_\gamma\varDelta\gamma + w)k_1 + (\varDelta\alpha + \varDelta\beta + \varDelta\gamma - v)k_2 + (\varDelta\alpha' + \varDelta\beta' + \varDelta\gamma' - v')k_3 + (\varDelta\beta - \varDelta\beta' - v'')k_4 + \varDelta\alpha^2 + \varDelta\beta^2 + \varDelta\gamma^2 + \varDelta\alpha'^2 + \varDelta\beta'^2 + \varDelta\gamma'^2 = \text{Minimum.}$$

Nach den Regeln der Differentialrechnung muss für diesen Fall:

$$\frac{\partial w}{\partial\varDelta\alpha} = 0,\quad \frac{\partial w}{\partial\varDelta\beta} = 0,\quad \frac{\partial w}{\partial\varDelta\gamma} = 0,\quad \frac{\partial w}{\partial\varDelta\alpha'} = 0,\quad \frac{\partial w}{\partial\varDelta\beta'} = 0,\quad \frac{\partial w}{\partial\varDelta\gamma'} = 0$$

Durch diese sechs Gleichungen lassen sich die Grössen:

$$\Delta\alpha,\quad \Delta\beta,\quad \Delta\gamma$$
$$\Delta\alpha',\quad \Delta\beta',\quad \Delta\gamma'$$

durch die Korrelaten:

$$k_1,\quad k_2,\quad k_3,\quad k_4$$

ausdrücken. Wir erhalten:

$$\text{B)} \ldots \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial \Delta\alpha} &= k_1 n_\alpha + k_2 + 2\Delta\alpha = 0\\
\frac{\partial w}{\partial \Delta\beta} &= + k_2 + k_4 + 2\Delta\beta = 0\\
\frac{\partial w}{\partial \Delta\gamma} &= - n_\gamma k_1 + k_2 + 2\Delta\gamma = 0\\
\frac{\partial w}{\partial \Delta\alpha'} &= - n_\alpha' k_1 + k_2 + 2\Delta\alpha' = 0\\
\frac{\partial w}{\partial \Delta\beta'} &= + k_3 + k_4 + 2\Delta\beta' = 0\\
\frac{\partial w}{\partial \Delta\gamma'} &= + n_\gamma' k_1 + k_2 + 2\Delta\gamma' = 0
\end{aligned}\right.$$

Setzt man die darausfolgenden Werte für:

$$\Delta\alpha,\quad \Delta\beta,\quad \Delta\gamma$$
$$\Delta\alpha',\quad \Delta\beta',\quad \Delta\gamma'$$

in die Gleichungen A) ein, so ergeben sich hieraus vier Gleichungen zur Bestimmung von:

$$k_1,\quad k_2,\quad k_3,\quad k_4$$

und zwar wird:

$$\text{C)} \ldots \left\{\begin{aligned}
&-\frac{1}{2} n_\alpha (k_1 n_\alpha + k_2) + \frac{1}{2} n_\gamma' (n_\gamma' k_1 + k_3) + \frac{1}{2} n_\alpha' (- n_\alpha' k_1 + k_3)\\
&\qquad\qquad + \frac{1}{2} n_\gamma (- n_\gamma k_1 + k_2) = - w\\
&\frac{1}{2}(k_1 n_\alpha + k_2) + \frac{1}{2}(k_2 + k_4) + \frac{1}{2}(- n_\gamma k_1 + k_2) = - v\\
&\frac{1}{2}(- k_1 n_\alpha' + k_3) + \frac{1}{2}(k_3 + k_4) + \frac{1}{2}(+ n_\gamma' k_1 + k_3) = - v'\\
&\frac{1}{2}(k_2 + k_4) + \frac{1}{2}(k_3 + k_4) = - v''
\end{aligned}\right.$$

Daraus bestimmen sich diese Grössen. Die Gleichungen B) liefern dann die Werte für:

$$\Delta\alpha,\quad \Delta\beta,\quad \Delta\gamma$$
$$\Delta\alpha',\quad \Delta\beta',\quad \Delta\gamma'$$

Man erhält nämlich, indem man zuerst die letzten Gleichungen C) ordnet und sämtlich mit 2 multipliziert:

$$\begin{aligned}
k_1 (- n_\alpha^2 - n_\gamma'^2 - n_\alpha'^2 - n_\gamma^2) + k_2 (- n_\alpha + n_\gamma) + k_3 (- n_\gamma' + n_\alpha') &= - 2w\\
k_1 (n_\alpha - n_\gamma) + 3k_2 + k_4 &= - 2v\\
k_1 (- n_\alpha' + n_\gamma') + 3k_3 + k_4 &= - 2v'\\
k_2 + 2k_4 + k_3 &= - 2v''
\end{aligned}$$

Um diese Gleichungen bequem lösen zu können, addieren wir die zwei mittleren, indem wir zugleich setzen:

$$\begin{aligned}
n_\alpha - n_\gamma &= M\\
- n_\alpha' + n_\gamma' &= N\\
- n_\alpha^2 - n_\gamma'^2 - n_\alpha'^2 - n_\gamma^2 &= P
\end{aligned}$$

so folgt:

$$k_1(M+N)+3(k_2+2k_4+k_3)-4k_4=-2(v+v')$$

oder mit Rücksicht auf die letzte:

$$\text{I} \ldots k_1(M+N)-4k_4=-2(v+v'+3v'')$$

Hierauf multiplizieren wir die erste der Gleichungen mit 3 und ersetzen $k_2$ und $k_3$ aus den mittleren Gleichungen:

$$\text{II} \ldots \begin{cases} 3k_2=-2v-k_4-k_1M \\ 3k_3=-2v'-k_4-k_1N \end{cases}$$

so folgt:

$$Pk_1+M(-2v-k_4-k_1M) \\ -N(-2v'-k_4-k_1N)=-6w$$

oder geordnet:

$$\text{III} \ldots k_1(P+M^2+N^2)-k_4(M-N) \\ =-6w+2vM-2v'N$$

Die Gleichungen I und II sind aber Gleichungen mit nur zwei Unbekannten:

$$k_1,\ k_4$$

die sich leicht lösen lassen. Sind $k_1$ und $k_4$ bestimmt, so folgen $k_2$ und $k_3$ aus den Gleichungen II und die einzelnen Verbesserungen:

$$\Delta\alpha,\ \Delta\beta,\ \Delta\gamma \text{ u. s. w.}$$

aus den Gleichungen B) wodurch das Problem gelöst ist.

**Bemerkung.** Vorstehende Ausgleichung wird man aber in der Praxis wohl selten anwenden können. Der Praktiker verfügt nicht über die Zeit. Man wird sich wohl aushelfen dadurch, dass man die Seitengleichung nicht berücksichtigt, also jene Grössen, die wir mit $n$ bezeichnet haben, gleich Null setzt. Dann hat man nur 3 Korrelaten:

$$3k_2+k_4=-2v$$
$$3k_3+k_4=-2v'$$
$$k_2+2k_4+k_3=-2v''$$

Multipliziert man die letzte mit $-3$ und addiert alle, so folgt:

$$-4k_4=-2v-2v'+6v''$$

dadurch ist $k_4$ bestimmt. Die ferneren Grössen $k_2$ und $k_3$ folgen leicht aus den ersten zwei Gleichungen. Die Seitengleichung wird dann zur Kontrolle benützt.

# III. Das Nivellieren.

**Frage 72.** Was versteht man unter Nivellieren?

Figur 56.

**Antwort.** Unter Nivellieren wird die Ausmittelung des horizontalen Abstandes von einer ideellen Oberfläche verstanden. Bei der in der Praxis vorkommenden Anwendung ist diese Oberfläche immer eine Horizontalebene, die durch irgend eine Vorrichtung kenntlich gemacht wird.

Das Prinzip dieses Vorganges ist unmittelbar an der Figur 56 klar. $A$ und $B$ sind zwei Massstäbe (hier Nivellierlatten genannt), mit welchen die Abstände der Punkte $m$ und $n$ von der durch die Vorrichtung (Nivellierinstrument) bestimmten Horizontalen $HH'$ gemessen werden.

**Bemerkung.** Man beachte, dass man beim Nivellieren zweier Instrumente bedarf: eines, welches die Horizontale versinnlicht und sodann eines Massstabes zur Messung vertikaler Entfernungen von der erwähnten Horizontalebene.

**Frage 73.** Welche Arten von Nivellieren gibt es?

**Antwort.** Man unterscheidet gewöhnlich das Nivellieren von der Mitte und das Nivellieren von der Seite.

**Bemerkung.** Man spricht auch vom Vorwärts- und Vor- und Rückwärts-Nivellieren. Das Nivellieren aus dem Ende (Vorwärtsnivellieren) ist schon veraltet, man nivelliert jetzt immer aus der Mitte. Beide Arten nennt man auch das geometrische Nivellieren.

Beim Nivellieren von der Mitte steht das Instrument zwischen den beiden Latten, beim Nivellieren von der Seite (aus den Enden) bedarf man nur einer Nivellierlatte.

---

**Frage 74.** Wie wird aus den Enden nivelliert?

**Bemerkung.** Man kommt bei diesem Nivellieren mit einem Gehilfen und einer Latte aus.

**Antwort.** Man stellt das Instrument über den einen Punkt und die Latte über den anderen, richtet die Visur horizontal und liest den Lattenstand $L$ ab. Hierauf wird die Visurhöhe $J$ des Instruments abgemessen und so die Differenz der beiden Punkte:

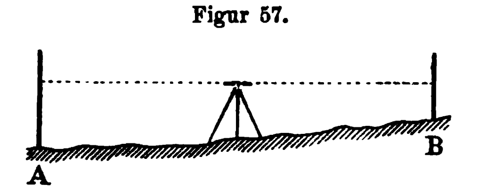
$$L - J$$

bestimmt.

---

**Frage 75.** Wie wird aus der Mitte nivelliert?

Figur 57.




**Antwort.** Um aus der Mitte zu nivellieren stellt man an den zwei Punkten, deren Höhenunterschied man bestimmen will, zwei Latten auf und das Nivellierinstrument in die Mitte (vergl. Figur 57). Dasselbe braucht nicht geradezu mit $A$ und $B$ in einer Geraden zu liegen, aber besser ist es, wenn dieses der Fall ist. Die Höhendifferenz ist dann gleich der Differenz der Lattenablesungen.

---

**Frage 76.** Welche Vorteile bietet das Nivellieren aus der Mitte?

**Bemerkung.** Nach Frage 85 ist es vorteilhaft das Instrument möglichst genau in die Mitte der beiden Latten, oder doch von beiden gleichweit entfernt zu stellen. Ist dieses der Fall, so kann man auch mit einem nicht rektifizierten Instrument die Höhendifferenz genau bestimmen. Man kann auch diesen Umstand zur Prüfung des Instruments benützen (vergl. Frage 85).

**Antwort.** Das Nivellieren aus der Mitte bietet mehrere Vorteile:

1) Man kann die Länge der Stationen ($AB$) grösser nehmen, dadurch werden weniger Instrumentenaufstellungen nötig.

2) Werden die Fehler des Instruments, insbesondere die etwaige Nichtparallelität der Libelle und der Visur zum Teil gehoben (vergl. Frage 85).

3) Endlich wird auch der freilich für die gewöhnlich angewandten Distanzen völlig verschwindende Fehler wegen der Erdkrümmung zum Verschwinden gebracht.

---

**Frage 77.** Was versteht man unter dem trigonometrischen Nivellieren?

**Bemerkung.** Das trigonometrische Nivellieren (wohl zu unterscheiden vom trigonometrischen Höhenmessen) wird sehr selten angewendet und wohl nur an mittelsteilen Abhängen.

**Antwort.** Unter trigonometrischem Nivellieren versteht man die Bestimmung des Höhenunterschiedes zweier Punkte auf Grund der Tangentenformel für rechtwinklige Dreiecke.

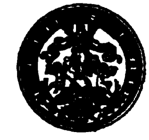
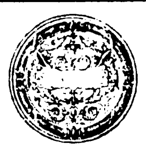
Sei (vergl. Figur 58) $h$ die Instrumentenhöhe, $D$ die horizontale Entfernung der beiden Punkte, und nehmen wir an, dass das Nivellier-

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

1324. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Vermessungskunde (Geodäsie). Zweiter Teil. Forts. v. Heft 1312. — Seite 81—96. Mit 37 Figuren.

Vollständig gelöste

# Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten
erläutert durch
**viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,**
aus allen Zweigen
der **Rechenkunst,** der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — **aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie;** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's;** der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
**zum einzig richtigen und erfolgreichen**
**Studium,** zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

**Dr. Adolph Kleyer,**
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

# Vermessungskunde

## (Geodäsie).

**Zweiter Teil.**

Nach **System Kleyer** bearbeitet von **Dr. W. Láska.**

Fortsetzung von Heft 1312. — Seite 81—96. Mit 37 Figuren.

**Inhalt:**



**Stuttgart 1894.**
Verlag von Julius Maier.

**Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.**

# PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten etc.**, so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch **alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten Aufgaben beigegeben**, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen, die gehabten Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen** in **allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen geben.**

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit **Angabe der Namen** verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. Kleyer, Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

instrument um den Winkel $\varphi$ gegen die Horizontale geneigt ist, so dass wir eine Ablesung $a$ an der Latte $d$ erhalten, dann ist die Höhendifferenz:

$$H - h = a + D \operatorname{tg} \varphi$$

oder da $\varphi$ ein kleiner Winkel ist:

$$H - h = a + D \cdot \frac{\varphi''}{206\,265}$$

Besitzt das Instrument eine Elevationsschraube, so kann man:

$$\frac{\varphi''}{206\,265}$$

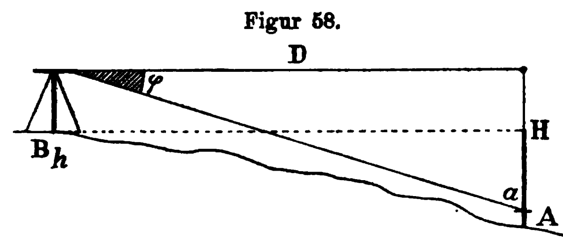
proportional den Umdrehungen derselben setzen, man hat dann:

$$H - h = a + k \cdot D$$

wobei $k$ eine Konstante ist, die man durch einige Versuche bestimmt.

Diese Methode ist aber, wie gesagt, veraltet und wird nur in Oesterreich hie und da kultiviert. Die Form des Instruments gibt die Figur 59.

Figur 58.



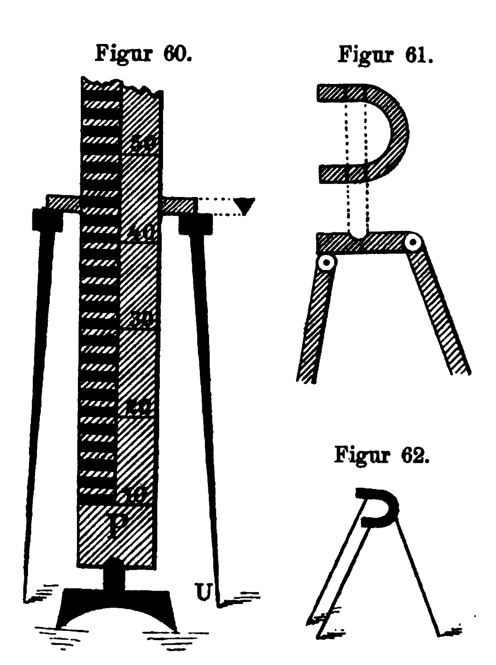

Figur 59.

**Bemerkung.** Wie man sieht verursacht diese Art des Nivellierens unnütze Rechnung, die in keinem Verhältnis zu der zu erreichenden Genauigkeit steht. Denn wenn an einem Instrument die Schraube zur Messung gebraucht wird, so bedarf diese eingehender Untersuchung und einer fortwährenden Kontrolle.

---

**Frage 78.** Was versteht man unter Präzisionsnivellement?

Figur 60. Figur 61. Figur 62.




**Antwort.** Unter Präzisionsnivellement wird ein mit möglichster Sorgfalt ausgeführtes Nivellement verstanden.

Für das Verfahren ist folgendes zu beachten:

1) Man nivelliert aus der Mitte.

2) Die Zielweiten beschränken sich auf 50.

3) Man benützt einen Schirm, um das Instrument vor der Einwirkung direkter Sonnenstrahlen zu schützen.

4) Man nivelliert nur bei gutem Wetter, nicht bei Wind, an hellen warmen Tagen, nicht zur Mittagszeit.

5) Das Instrument wird täglich auf seine Richtigkeit geprüft.

6) Jede nivellierte Strecke wird sofort auch zurücknivelliert.

7) Wenn sich eine Differenz zwischen beiden Nivellements ergibt, die eine vorgeschriebene Grenze überschreitet, muss sofort noch einmal nivelliert werden.

8) Jedes Nivellement muss einen polygonalen Abschluss erhalten.

9) Die Ablesung der Latte soll bei einspielender Libelle vorgenommen werden.

**Bemerkung.** Es empfiehlt sich, für die Latten eigene Stative (vergl. Figur 62) zu haben. Die Latte wird auf eine gusseiserne Unterlage (*U*) gestellt. Die Latte sollte beiderseits beziffert sein und zwar in umgekehrter Ordnung und soll sich um den Stützpunkt umlegen lassen. Das Verfahren ist dann folgendes: Man liest zuerst die Latte *A* ab, dann *B*. Sodann wird *B* umgelegt und abgelesen, hierauf wieder *A*. Sind die Latten beiderseits entgegengesetzt beziffert, so bekommt man zwei Ablesungen, die zusammen die Lattenlänge geben und man hat so eine Kontrolle. Die Vergrösserung des Fernrohrs soll nicht über 40 gehen, sonst macht sich die Unruhe der Luft fühlbar. Als Grenze der Empfindlichkeit der Libelle sind 5″ für 2 mm Teilstrich anzunehmen.

10) Die Latten (die sich wegen Luftfeuchtigkeit bis zu 0,03 % verändern) müssen täglich verglichen werden.

11) Es sollen die Latten an einem Stativ nicht in freier Hand gehalten werden und mit einer Dosenlibelle zur Vertikalstellung versehen sein.

Auf diese Art werden gegenwärtig alle europäischen Länder mit Nivellementpolygonen überzogen. Es möge noch hier angeführt werden, dass man bei solch ausgedehnten Nivellements nicht nur Rücksicht auf die Erdkrümmung, sondern auch auf die etwaige Massenanziehung und Lotablenkung unterirdischer Massen Rücksicht nehmen muss.

**Bemerkung.** Als Grenze, welche die Differenz zwischen zwei unabhängigen Nivellements einer 2 km-Strecke ist, ist festgesetzt worden: Bei 40 Stationen 12 mm bei mehr als 40 Stationen 15 mm.

Für gewöhnliche Messungen der Landmesser gelten folgende Bestimmungen:

| | |
|---|---|
| bis 20 m | 4 mm |
| von 20 „ 45 „ | 6 „ |
| „ 45 „ 100 „ | 9 „ |
| „ 100 „ 250 „ | 25 „ |

allgemein:

$$9\sqrt{n}\ \text{mm}$$

wenn die Strecke *n* Hundert Meter lang ist. Diese Grenzen sind so weit, dass sie auch von einem sehr oberflächlichen Nivellement leicht einzuhalten sind.

---

**Frage 79.** Was ist eine Nivellierlatte?

**Antwort.** Eine Nivellierlatte ist eine prismatische vierkantige, mit einer Centimeterteilung versehene Latte aus trockenem Holz, die am oberen und unteren Ende der besseren Erhaltung wegen mit Stahleinsätzen versehen ist.

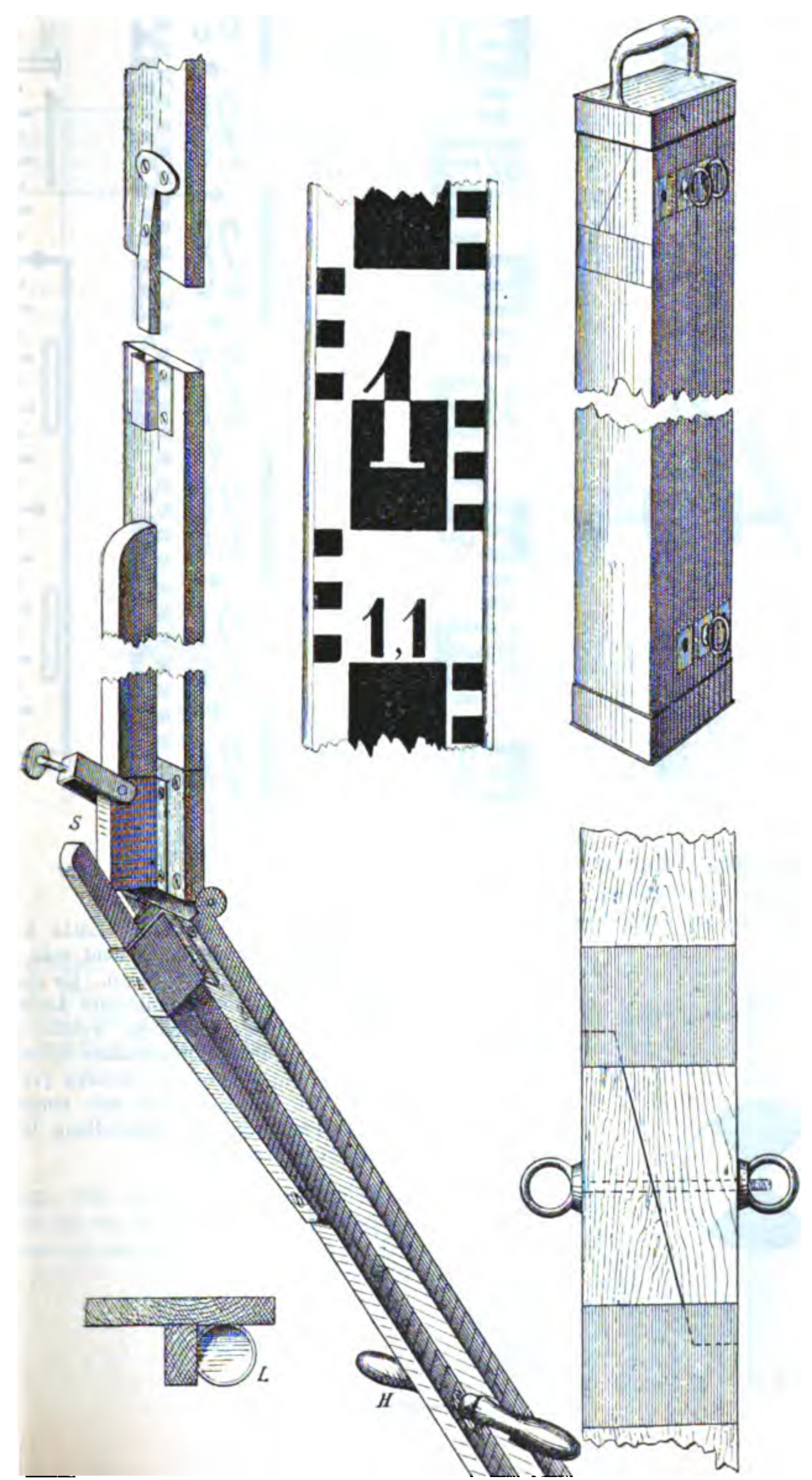
Die Teilung wird in der verschiedensten Art und Weise dargestellt. Als unterste gezeichnete Einheit dient das Centimeter, die Millimeter werden jedoch auch und zwar durch Schätzung abgelesen (vergl. Figur 64).

Da die Nivellierlatte zur Messung vertikaler Abstände dient, so besitzen feinere Latten noch eine Dosenlibelle, die zur Vertikalstellung dient.

In den Figuren 64 bis 67 bringen wir einige Latten der Firma L. Tesdorpf in Stuttgart zur Darstellung, sowie einige Profile, welche so gewählt sind, dass eine etwaige Verbiegung möglichst ausgeschlossen ist.

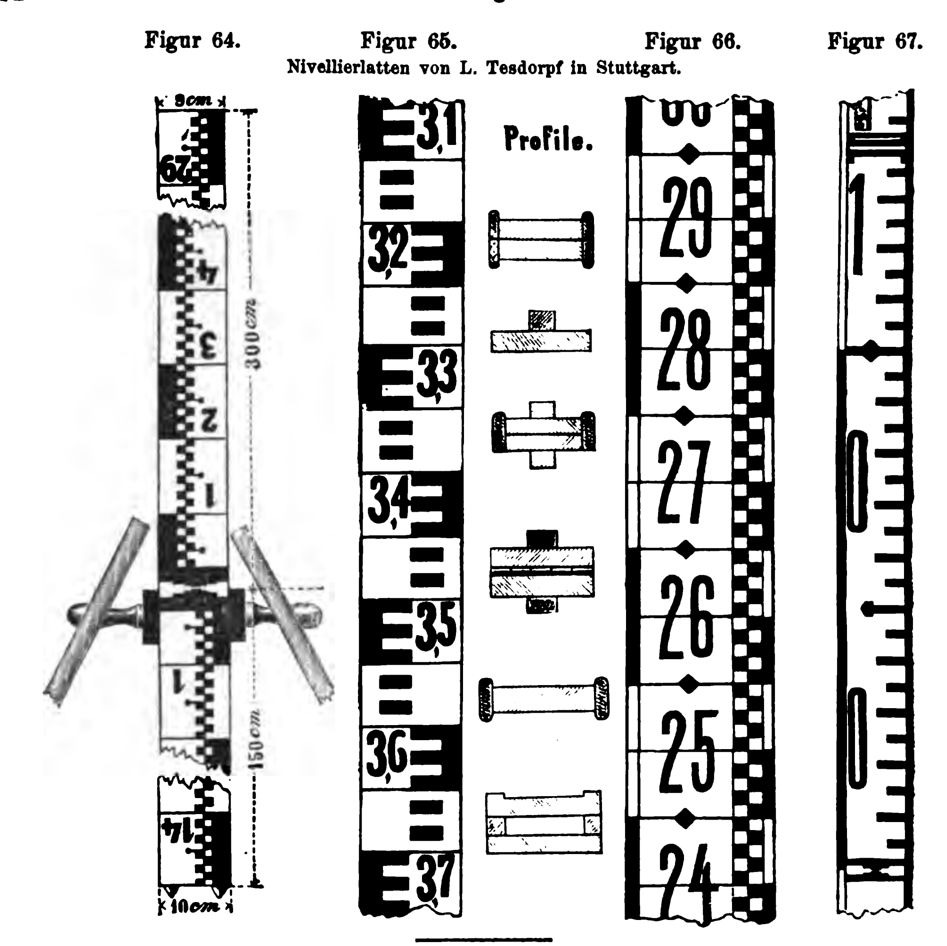
**Bemerkung.** Da die Latten wegen ihrer Länge wenig zum Eisenbahntransport geeignet sind und leicht beschädigt werden, so hat man zusammenlegbare Latten konstruiert, von welchen wir jene von Breithaupt & Sohn in Kassel in der Figur 63 zur Abbildung bringen. Dieselben sind kräftig gebaut und gestatten eine rasche und vollkommene Streckung. Eine Dosenlibelle *L* dient zur Vertikalstellung.

Figur 63.
Nivellierlatten von Breithaupt & Sohn in Kassel.



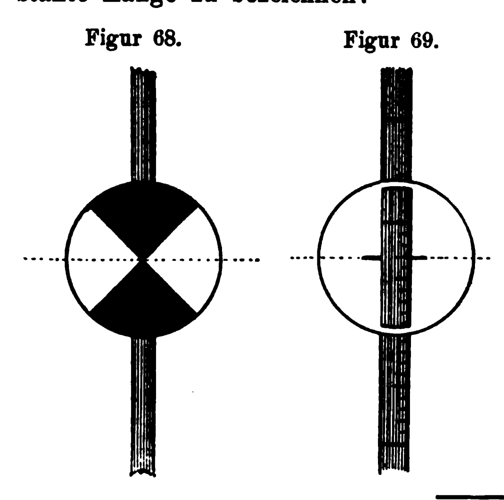
Figur 64. Figur 65. Figur 66. Figur 67.

Nivellierlatten von L. Tesdorpf in Stuttgart.




**Frage 80.** Welche Vorrichtungen benützt man, um auf der Latte eine konstante Länge zu bezeichnen?

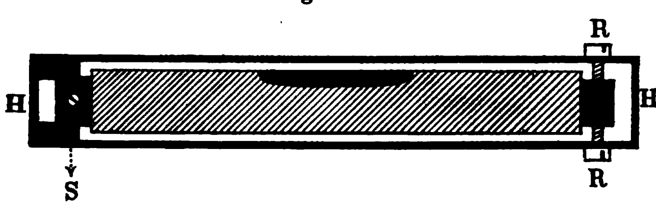
Figur 68. Figur 69.



**Antwort.** Um auf der Latte konstante Längen zu bezeichnen, bedient man sich der sogenannten Zielscheiben. Es sind dieses längs der Latte verschiebbare kreisförmige oder rechteckige Scheiben, welche als Zielpunkt entweder die gemeinsame Spitze zweier schwarz angestrichener Sektoren (vergleiche Figur 68) besitzen oder mit einem Index (vergl. Figur 69) zur Einstellung beliebiger Höhe versehen sind.

**Frage 81.** Welche Einrichtung zeigen die Libellen?

Figur 70.



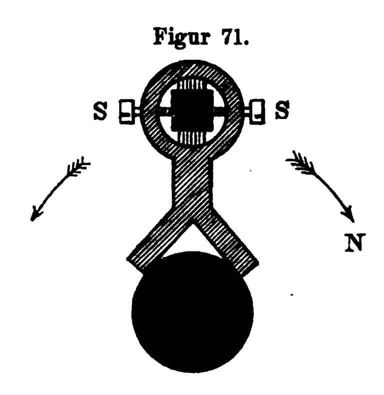

**Bemerkung.** Wir haben schon auf der Seite 38 des I. Teils einiges über die Libelle mitgeteilt. Das nebenan Gesagte soll die dortigen Ausführungen ergänzen.

**Antwort.** Die Libellen der neueren Instrumente sind vor allem gegen jähen Temperaturwechsel und gegen Beschädigung durch eine äussere Hülle geschützt (*HH* in der Figur 70), welche zugleich eine Stütze für die Rektifizierschrauben (*RR*) abgibt. Vermittels dieser Schrauben kann die Libelle ein wenig gehoben oder gesenkt werden, je nach Bedarf. Aehnlich sind auch zwei seitliche Schräubchen *S* angebracht, um auch seitlich die Libelle verschieben zu können.

---

**Frage 82.** Zu welchem Zwecke sind die seitlichen Korrektionsschrauben *S* angebracht?

Figur 71.



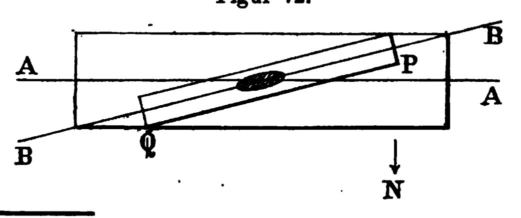

**Bemerkung.** Neben den Aufsatzlibellen findet man auch, obschon nur an grösseren Instrumenten, Hängelibellen. Für diese gilt dasselbe, was über die Aufsatzlibellen gesagt wurde.

**Antwort.** Diese Korrektionsschrauben, die man bei Setzlibellen (vergl. Figur 71) vorfindet, dienen zur Korrektion für den Fall, dass die Röhrenachse *AA* (vergleiche Figur 72) mit der Libellenachse *BB* nicht parallel ist.

Findet dieses nicht statt, so ändert die Blase bei einer Seitwärtsbewegung auf dem cylindrischen Lager ihren Stand. Bewegt man z. B. die Libelle etwa in der Pfeilrichtung *N*, so kommt das Ende *P* höher zu liegen als *Q* und die Blase wandert gegen *P*. Es muss demnach *Q* in entgegengesetzter Richtung etwas verschoben werden, was eben mittels der Schrauben *SS* geschieht.

Die Korrektion wird soweit fortgesetzt, bis bei den Seitenbewegungen die Blase stehen bleibt.

Figur 72.

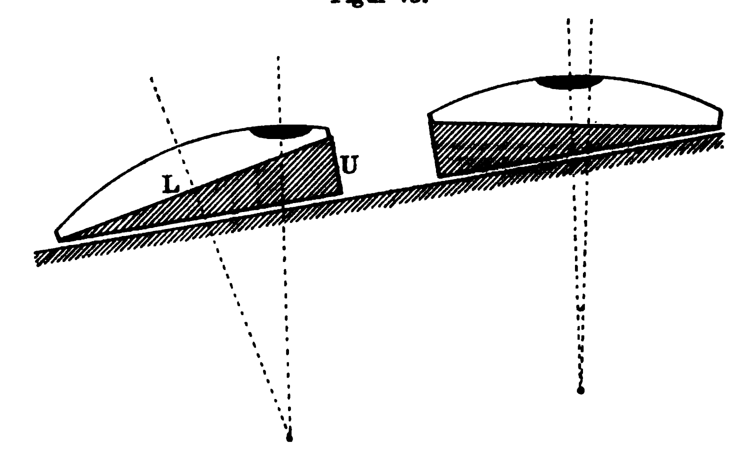



---

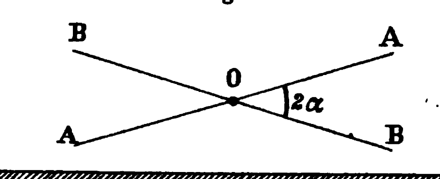
**Frage 83.** Wozu dienen die Rektifizierschrauben, die oben und unten am Libellenrohr befestigt sind? (*RR* in der Figur 70).

**Antwort.** Es ist klar, dass wenn die Unterlage *U* nicht der Libellenachse *L* parallel ist, dadurch auf einer schiefen Ebene je nach der jeweiligen Orientierung ein anderer Blasenstand eintritt (vergl. Figur 73). Auch zeigt die Figur 73, dass die Blase

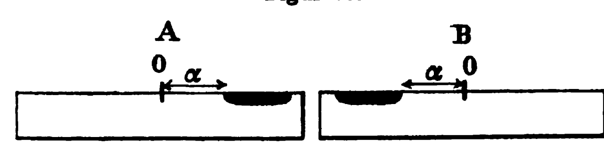
Figur 73.




Figur 74.




Figur 75.




nach dem höheren Ende zustrebt. Es muss daher dementsprechend an den Schrauben $RR$ gedreht werden.

Denken wir uns nun die Ebene, auf welcher die Unterlage der Libelle liegt, ganz horizontal (vergl. Figur 74). Sodann wird bei der einen Lage $A$, $AA$ die Richtung der Libellenachse. Legen wir die Libelle um, so wird $BB$ die Richtung der Libellenachse. Also wird:

$$\sphericalangle BOA = 2\alpha$$

d. h. gleich dem doppelten Winkel sein, um welchen die Achse der Libelle von der Achse der Unterlage abweicht.

Darum wird nur die Hälfte des durch die Umlegung der Libelle entstandenen Ausschlags der Libelle an den Schrauben $RR$ korrigiert (vergl. Figur 75).

**Bemerkung.** Um sich daher von der Richtigkeit einer Libelle zu überzeugen, lege man sie um. Bleibt der Blasenstand unverändert, so ist sie in Ordnung.

**Bemerkung.** Eine Libelle muss fortwährend, bei genaueren Arbeiten jeden Tag auf ihre Richtigkeit geprüft werden. Es ist geradezu unglaublich, wie veränderlich die Libellen sind.

---

**Frage 84.** Woraus besteht ein Nivellierinstrument?

**Antwort.** Ein Nivellierinstrument besteht aus drei Hauptteilen:

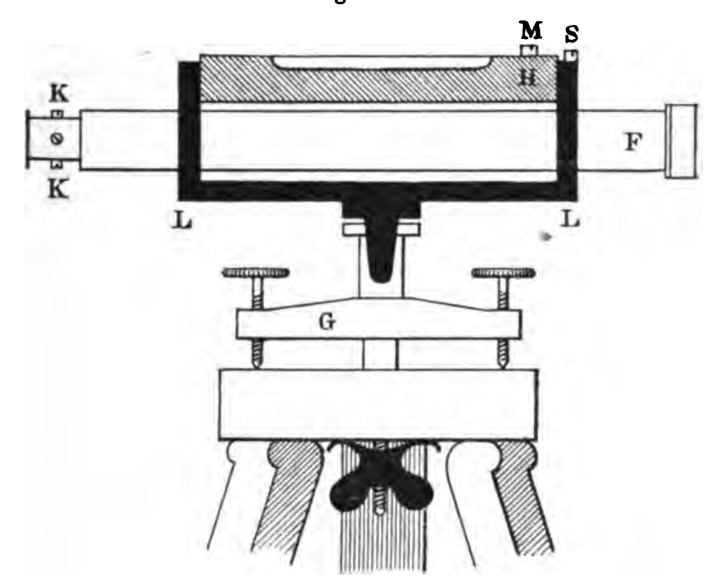
1) aus dem Dreifussgestell $G$, dessen innerer Körper als Lager für die vertikale Drehachse des Instruments dient (vergleiche Figur 76);

2) aus dem gabelförmigen Lager $LL$ für das Fernrohr und

3) aus dem Fernrohr $F$ mit der Libelle $H$.

**Bemerkung.** Das Fernrohr besitzt ein Fadenkreuz und besondere Schrauben $KK$ zu seiner Rektifikation. Der eine Faden muss horizontal stehen.

Figur 76.



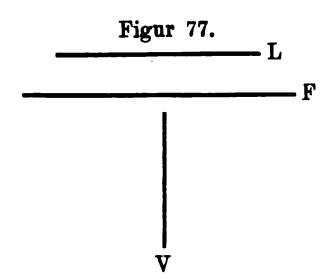

Je nach der Verbindungsweise des Fernrohrs und der Libelle untereinander und mit dem Lager gibt es mehrere Arten von Nivellierinstrumenten. Bei der gewöhnlichen Form sind sowohl das Fernrohr als auch die Libelle fest mit dem Lager verbunden. Dann besitzt die Libelle eine Korrektionsschraube $S$, durch welche die gegenseitige Stellung der Fernrohr- und Libellenachse etwas geändert werden kann. Wir wollen ein so konstruiertes Nivellierinstrument das **einfache** nennen.

**Bemerkung.** Die Horizontalstellung des Nivellierinstruments wird genau in derselben Art bewirkt wie beim Theodolit (vergl. Frage 97 des I. Teils).

---

**Frage 85.** Welchen Bedingungen hat ein einfaches Nivellierinstrument zu genügen?

Figur 77.




**Erkl. 67.** Unter der Visur oder Zielachse des Fernrohrs wird die Verbindungslinie verstanden, welche den Mittelpunkt des Fadenkreuzes mit dem optischen Mittelpunkt des Objekts verbindet. Der optische Mittelpunkt ist aber bekanntlich dadurch ausgezeichnet, dass ein

**Antwort.** Sei $L$ die Libellenachse, $F$ die Visurachse des Fernrohrs und endlich $V$ die Vertikalachse des ganzen Instruments (vergl. Figur 77), so muss:

$$L \parallel F$$

und

$$L \perp V$$

also auch:

$$F \perp V$$

sein, d. h. die Visur- und Libellenachsen sollen einander parallel laufen und beide sollen senkrecht zur vertikalen Drehachse des Instruments sein (vergl. Erklärung 67).

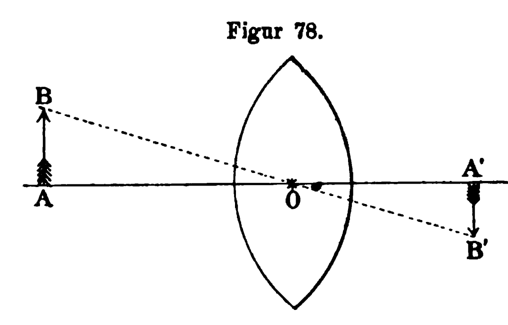
Man hat also folgende Korrektionen auszuführen:

Vor allem hat man sich zu überzeugen von der **Richtigkeit der Libelle selbst.**

Zu diesem Zwecke wird die Libelle senkrecht zur Verbindungslinie zweier Stell-

jeder durch ihn gehende Strahl ungebrochen durch die Linse hindurchgeht. In der Figur 78 ist $O$ der optische Mittelpunkt.

Figur 78.




**Bemerkung.** Es ist wichtig, dass das Instrument sehr nahe um 180° gedreht werde, insbesondere wenn die Unterlage nicht genau horizontal ist. Ferner soll beachtet werden, dass diese Korrektion die Libelle selbst betrifft, es darf also nicht etwa die Korrektion an der Schraube $S$ vorgenommen werden.

**Bemerkung.** Es ist klar, dass man hiedurch zugleich das Instrument selbst horizontal stellt.

**Bemerkung.** Wird aus der Mitte nivelliert, so dass der Abstand der beiden Nivellierlatten vom Nivellierzentrum gleich gross ist, dann wird der Zielachsenfehler unschädlich, denn dann werden beide Lattenablesungen um dieselbe Grösse zu gross oder zu klein, ihre Differenz bleibt daher dieselbe.

schrauben gestellt und die Blase vermittels der dritten Stellschraube zum Einspielen gebracht. Hierauf wird das Nivellierinstrument genau um 180° gedreht und nun nachgesehen, ob die Libelle wieder einspielt. Ist dieses der Fall, dann ist die Libelle in der Ordnung. Wenn nicht, so wird der Ausschlag zur Hälfte an den vertikal stehenden Schrauben $M$ (vergl. Figur 76) am Achsenende berichtigt.

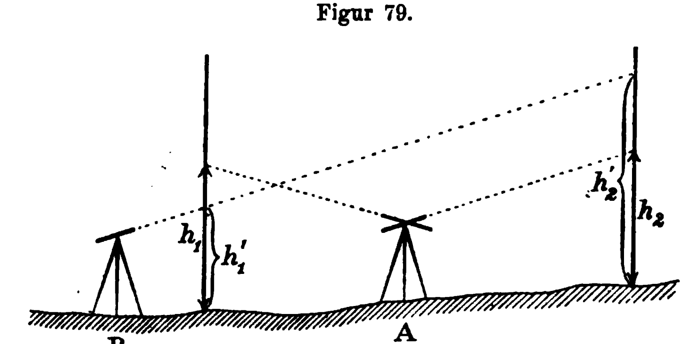
Nun wird die Libellenachse genau vertikal auf die Umdrehungsachse gestellt und zwar auf folgende Art:

Man stellt die Libelle genau so wie früher, wobei vorausgesetzt ist, dass sie schon berichtigt ist. Sodann dreht man das Fernrohr mit der Libelle um 90°. Die Libelle muss einspielen. Ist dieses nicht der Fall, so wird vermittels der beiden Stellschrauben die Libelle zum Einspielen gebracht und wieder in ihre frühere Stellung zurückgedreht.

Kurz man versucht zuerst eine Horizontalstellung wie sie beim Theodolit gelehrt wurde (vergleiche Frage 97).

Gelingt die Horizontalstellung nicht, so stellt man (nachdem man das Instrument so horizontal als möglich gestellt hat) wieder die Libelle wie am Anfang der Horizontalstellung und bringt sie zum Einspielen. Hierauf wird das Fernrohr um 180° gedreht und die Hälfte des Ausschlages an der Korrektionsschraube $S$ (vergl. Figur 76) und die andere Hälfte an der Stellschraube des Instruments berichtigt.

Figur 79.




Endlich muss noch die Visurachse parallel der Libellenachse gemacht werden.

Um dieses zu bewirken, stellt man (vergl. Fig. 79) zwei Latten in einer Entfernung von nahezu 100 m auf und das Nivellierinstrument in die Mitte. Hierauf werden, nachdem man das Fernrohr horizontiert hat, die Latten abgelesen und man erhält eine Differenz:

$$h_1 - h_2$$

Stellt man sich nun möglichst nahe an eine Latte und macht jetzt die Ablesungen, so ergibt sich:

$$h_1' - h_2'$$

War die Zielachse parallel zur Libellenachse, dann mus:

$$h_1 - h_2 = h_1' - h_2'$$

Beispiel. Man hat folgende Ablesungen gemacht:

| Stand $A$ | Stand $B$ |
|---|---|
| $h_1 = 1{\cdot}345$ m, | $h_1' = 1{\cdot}500$ m |
| $h_2 = 1{\cdot}127$ m, | $h_2' = 1{\cdot}300$ m |

Dann ist der richtige Höhenunterschied:

$$h_1 - h_2 = 0{\cdot}218 \text{ m}$$

während:

$$h_1' - h_2' = 0{\cdot}200 \text{ m}$$

gab. Man hat also:

$$h_2' = 1{\cdot}500 - 0{\cdot}218$$

oder:

$$h_2' = 1{\cdot}282$$

Das Fadenkreuz wird also so zu bewegen sein, dass von $B$ aus $h_2' = 1{\cdot}282$ als Ablesung an der Latte erscheint.

sein. Ist dieses nicht der Fall, dann muss vermittels der Schrauben $K$ in der Figur 76 das Fadenkreuz soweit vertikal verstellt werden, bis:

$$h_2' = h_1' - (h_1 - h_2)$$

---

**Frage 86.** Welche ist die optische Leistungsfähigkeit der Nivellierinstrumente?

**Antwort.** Zur Beurteilung der optischen Leistungsfähigkeit der Nivellierinstrumente benützt man die Sehweiten, bei welchen die einzelnen Centimeter an der Nivellierlatte abzulesen sind. Man hat:

| Objektiv-Oeffnung | | Vergrösserung | Sehweite |
|---|---|---|---|
| Objektiv-Oeffnung | 25 mm | 20 | 100 m |
| „ | 30 „ | 30 | 200 „ |
| „ | 35 „ | 30 | 600 „ |
| „ | 40 „ | 35 | 700 „ |
| „ | 50 „ | 40 | 1000 „ |

Es sei aber gleich von vornherein bemerkt, dass Sehweiten über 100 m nur im Notfalle gewählt werden. Auch soll die Vergrösserung des Fernrohrs nicht über eine 30fache hinausgehen, weil dann die optische Verschiedenheit der zwischen dem Instrument und dem Ziele liegenden Schichten gar zu stark hervortritt (wallende Bewegung der Bilder).

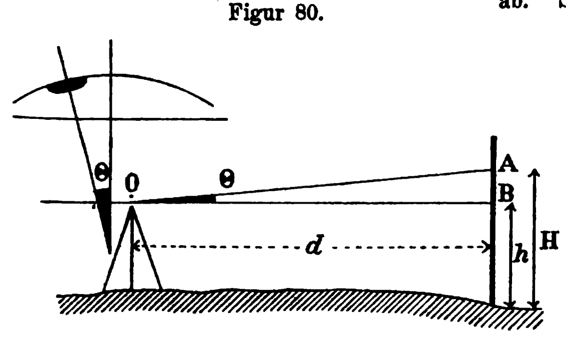
**Bemerkung.** Es kann geschehen, insbesondere beim Uebersetzen der Flüsse, dass Visuren bis 300 m vorkommen, für diesen Fall ist es gut, ein 30 bis 40fach vergrösserndes Reserveokular zu haben.

---

**Frage 87.** Wie wird der Libellenstand berücksichtigt?

**Antwort.** Um die Berücksichtigung des Libellenstandes klarzulegen, nehmen wir an, wir hätten eine Lattenablesung $h$ gemacht und hätten bemerkt, dass die Libelle nicht genau einspielt. Dann lesen wir beide Enden ab. Sei $E_L$ das der Latte zugewendete Ende, $E_R$ das entgegengesetzte, so ist der Winkel $\Theta$, um welchen die Visur von der Horizontalen abweicht, gleich:

Figur 80.




$$\Theta = \frac{1}{2}(E_L + E_R)\cdot i$$

wo $i$ die Empfindlichkeit der Libelle für einen Teil der Libellenteilung bezeichnet.

Sei also $d$ die Distanz der Latte, so wird sich die abgelesene Höhe $h$ von der wahren um die Grösse:

$$d\cdot \text{tg}\,\Theta$$

oder da $d$ ein kleiner Winkel ist um:

$$d\cdot\Theta\cdot\sin 1''$$

**Erkl. 68.** Man hat im rechtwinkligen Dreieck (vergl. Figur 80):

$$AB = H - h$$

und

$$AB = OA \operatorname{tg} \Theta = d \operatorname{tg} \Theta$$

für kleine Winkel gilt aber die Relation:

$$\operatorname{tg} \Theta = \Theta'' \sin 1''$$

also ist:

$$H - h = d \sin 1'' \cdot \Theta''$$

Die Empfindlichkeit muss natürlich in Bogensekunden ausgedrückt sein.

**Erkl. 69.**

$$\frac{1}{2}(E_L + E_R) = \frac{1}{2}(4{\cdot}8 + 14{\cdot}6)$$

$$= \frac{1}{2} \times 19{\cdot}4 = 9{\cdot}7$$

$$9{\cdot}7 \times 20'' = 194''0$$

**Erkl. 70.** Es ist:

$$H - h = \frac{50}{206265} \cdot 194 \text{ m} = \frac{9700}{206265} = 0{\cdot}047 \text{ m}$$

**Bemerkung.** Es ist gut, wenn man bei genauerem Nivellement durch einen Gehilfen den Blasenstand während der Ablesung notieren lässt. Sonst muss dieses vor oder nach der Ablesung geschehen.

unterscheiden, also haben wir:

$$H - h = \pm \frac{d \sin 1''}{2} (E_L + E_R) \cdot i$$

$+$ wenn die Blase von der Latte weg, $-$ wenn sie sich zu der Latte hin bewegt hat.

**Beispiel:** Die Empfindlichkeit einer Libelle war 20″. also:

$$i = 20''$$

Libellenstand:

| Latten-Ende | Zweites Ende |
|---|---|
| $4{\cdot}8 = E_L$ | $14{\cdot}6 = E_R$ |

also Stand (vergl. Erkl. 69):

$$194''0$$

von der Latte weg. Die Entfernung der Latte betrug 50 m, also:

$$d = 50 \text{ m}$$

Ferner ist:

$$\sin 1'' = \frac{1}{206265}$$

also wird (vergl. Erkl. 70):

$$H - h = 47 \text{ mm}$$

Dieses ist aber schon eine ziemlich bedeutende Abweichung.

Will man scharf nivellieren, so entwirft man sich für geeignete Distanzen und Blasenstände eigene Tabellen, die natürlich nur für eine bestimmte Empfindlichkeit gelten.

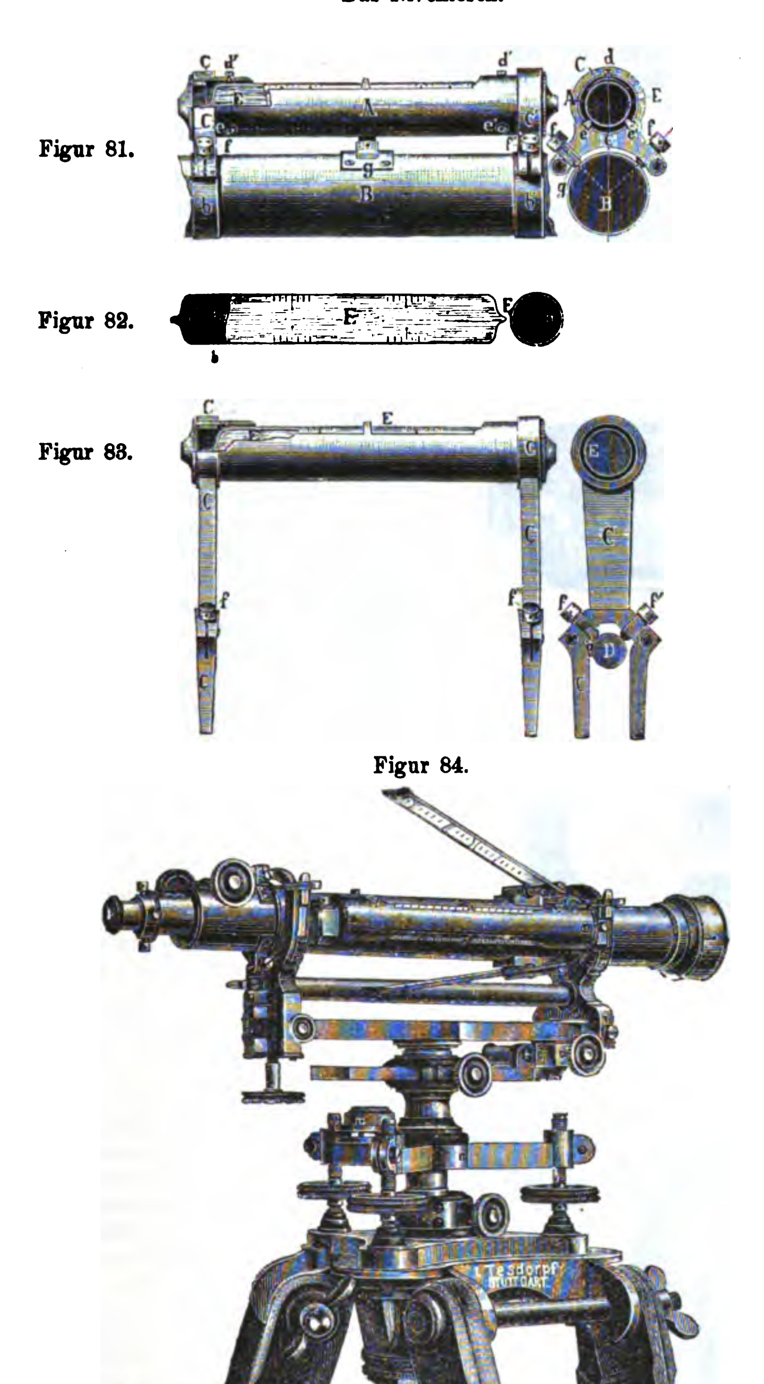
---

## Frage 88. Was ist eine Reversionslibelle?

**Antwort.** Unter einer Reversionslibelle versteht man eine Libelle, die nach zwei entgegengesetzten Seiten hin genau gleich geschliffen und mit genau gleicher Teilung versehen ist. Die Hülse, in welcher sie sich befindet, besitzt sowohl oben als auch unten einen Ausschnitt (vergl. Figur 82).

Die Figuren 81 bis 83 (sämtlich den Katalogen von L. Tesdorpf in Stuttgart entnommen) stellen Aufsatzlibellen dar, die auf vier mit Achatsteinen versehenen Korrektionsschrauben ruhen. Durch diese Einrichtung ist die Stabilität der Libellen bedeutend erhöht. Die Schrauben sind paarweise rechtwinklig zu einander gelagert und ruhen unmittelbar auf den Lagerringen $b$ des Fernrohrs resp. der Fernrohrachse $B$.

**Bemerkung.** Neuere Libellen besitzen noch eine sogenannte Kammer (vergl. Figur 82) $A$, welche zum Teil mit der Flüssigkeit gefüllt ist und durch eine feine Oeffnung $a$ mit dem übrigen Raume der Libelle in Verbindung steht. Mit ihrer Hilfe kann man die Blasse bei variabeln Temperaturen stets auf gleiche Länge regulieren, d. h. verkürzen oder verlängern. Hält man das Ende der Kammer nach oben und schüttelt ein wenig, so geht ein Teil der Flüssigkeit aus der Kammer in die Libelle über und die Blase wird kleiner. Hält man das Ende nach unten, so kann durch Schütteln die Blasenlänge vergrössert werden.



Figur 81.

Figur 82.

Figur 83.

Figur 84.

**Bemerkung.** In der vorstehenden Figur 84 bringen wir die Abbildung eines Nivellierinstruments von L. Tesdorpf in Stuttgart, welches mit einer seitlich angebrachten Reversionslibelle versehen ist. Um die Ablesung derselben vom Okular aus machen zu können, sind noch zwei geneigte Spiegel angebracht, die nach Belieben verstellt werden können.

**Frage 89.** Welche ist die Konstruktion des Taschen-Nivellierinstruments?

**Antwort.** Das Taschen-Nivellierinstrument nach Wagner zeichnet sich durch eine Eigentümlichkeit aus, die sehr beachtenswert ist. Es zeigt nämlich zugleich mit der anvisierten Skala (Latte) das Bild der Blase.

Man ist somit in die Lage versetzt, im Moment der Libelleneinspielung die Visur oder Ablesung an der Latte bewirken zu können. Das ist aber ein grosser Vorteil, weil man auf diese Weise während der Ablesung den Libellenstand kontrollieren kann.

Was nun das obige Taschen-Nivellierinstrument betrifft, so ist bei demselben seitwärts in der Wandung des Fernrohrs eine Reversionslibelle $L$ (Figur 85) parallel zur optischen Achse befestigt, und ihr direkt gegenüber ist ein Planspiegel $S$ in geeigneter Lage angebracht. Unmittelbar neben der äusseren Okularlinse ist sodann eine zweite plankonvexe Glaslinse $l$ (in der Folge „Libellenlinse" genannt) von der Brennweite $lS + SL$ eingesetzt und an erstere etwas angeschliffen. Zwischen Libelle und Spiegel und zwischen Spiegel und Libellenlinse sind die Fernrohrwandlungen und der Okularauszug soweit durchbrochen, dass durch die Libellenlinse die Libelle auf eine ihre Blase beiderseits um mehrere Teilstriche überragende Länge sichtbar wird.

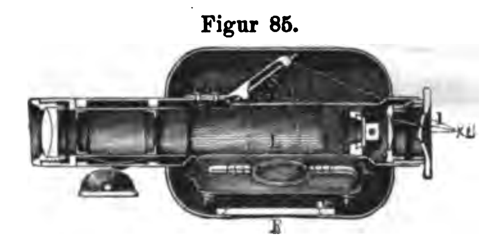
Bringt man das Auge in den Schnittpunkt $C$ der Achse der Libellenlinse mit der optischen Achse des Fernrohrs, so sieht man einesteils ganz unbehindert die im Fernrohrgesichtsfelde erscheinenden Objekte (Fadenkreuz, Nivellierlatte etc.) und andernteils gleichzeitig daneben die Libelle in vergrössertem Massstabe; etwa wie dies in Figur 86 dargestellt ist.

Um das Eindringen von Staub in das aufgeschlitzte Fernrohr zu verhüten, die Libelle und den Spiegel vor Beschädigung zu schützen, ist das Ganze von einem zweiteiligen Gehäuse umgeben. Das zur Sichtbarmachung der Libelle erforderliche Licht fällt durch zwei in dem Gehäuse ausgeschnittene und mit Milchglas wieder verschlossene Ausschnitte ein. (Fensterchen $F$, Figur 85 und 87.) Es ist Milchglas gewählt, weil Versuche dargethan haben, dass dieses der Libelle die dem Auge angenehmste Beleuchtung gibt.

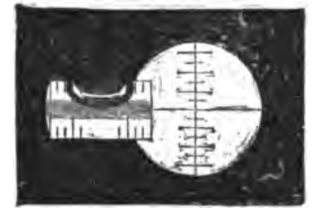
Das Fernrohr des in Figur 85 und 87 dargestellten Taschen-Nivellierinstruments hat ein achromatisches Objektiv von 3 Pariser Zoll Brennweite und ein Mikrometer-Okular von $^1/_3$ Pariser Zoll Aequivalentbrennweite,

**Bemerkung.** Die nachstehenden Figuren 85, 86 und 87 stellen die Wagnerschen Taschen-Nivellierinstrumente in der Ausführung von L. Tesdorpf in Stuttgart dar.

Figur 85.

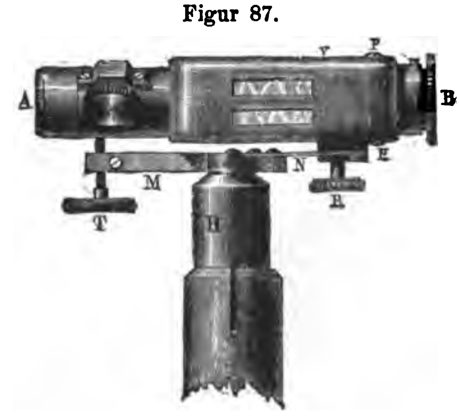


Figur 86.



Gesichtsfeld mit Libelle und Glasmikrometer $^1/_2$ %.

Figur 87.




Patent-Taschen-Nivellierinstrument $^5/_{12}$ der natürlichen Grösse. Auf Stab.

mithin 9 fache Vergrösserung. Es werden aber gegenwärtig Instrumente mit Fernröhren von 60 facher Vergrösserung gefertigt (vergl. Figur 90).

**Frage 90.** Wie wird das Taschen-Nivellierinstrument berichtigt?

**Bemerkung.** Auch ohne jede Berichtigung lässt sich — wegen der Eigenschaften der Reversionslibellen — mit dem beschriebenen Taschen-Nivellierinstrument eine genaue Horizontale herstellen, indem man von einem Standpunkte aus in beiden Instrumentlagen je eine, also zusammen zwei Visuren an der Nivellierlatte bei einspielender Libelle abliest und aus den beiden Ablesungen das arithmetische Mittel nimmt.

Bekanntlich liegt alsdann die ermittelte Lattenablesung mit der optischen Achse des Fernrohrs in einer Horizontalen. Die zweite Lage des Instruments ergibt sich, wenn die Schraube *R* gelöst, das Instrument um 180° um seine optische Achse gedreht und die Schraube *R* in das Gewinde *v* wieder eingeschraubt wird.

**Antwort.** Das Taschen-Nivellierinstrument ist berichtigt, wenn die durch den Horizontalfaden gehende Visierlinie parallel zur Libelle liegt. Diese Berichtigung geschieht, indem man zunächst eine horizontale Linie mittelst zweier Ablesungen in den beiden Instrumentlagen ermittelt und alsdann den Horizontalfaden des Fadenkreuzes bei einspielender Libelle mit Hilfe der Berichtigungszugschrauben *pp* auf die Horizontallinie einstellt (vergl. Bemerkung).

**Frage 91.** Wie wird das Taschen-Nivellierinstrument benützt?

**Erkl. 71.** Bei ruhiger Hand und einiger Uebung kann bequem eine Genauigkeit von $^1/_{500}$ bis $^1/_{1000}$ der Länge erzielt werden, was für approximative Visuren genügt. Bei Verwendung eines leichten Stativs (siehe Figur 87) und 12 facher Fernrohrvergrösserung ist die zu erzielende Genauigkeit für die einzelne Visur mindestens zu $^1/_{20000}$ der Länge anzunehmen.

Figur 88.



**Antwort.** Der Gebrauch des Taschen-Nivellierinstruments kann in folgenden Arten stattfinden:

1) **Aus freier Hand**, indem man das Instrument mit einer Hand oder beiden Händen vor das Auge hält, die fehlerhafte Neigung langsam verbessert und in dem Momente der annähernden Libelleneinspielung die Visur oder Ablesung bewirkt (vergleiche Erkl. 71).

2) **Auf dem Stockstativ.** Das Instrument wird mittelst der Hülse *H* auf das obere Ende eines einfachen Stocks gestellt, und dieser annähernd senkrecht mit seinem unteren Ende auf den Standpunktsboden aufgestellt oder eingesteckt. Ein zweiter Stock wird in der ungefähren Visurrichtung schräg gegen den Vertikalstock gestellt und dient als Strebe, wie in Figur 88 ersichtlich ist. Indem man nun mit der einen Hand das obere Ende der Strebe und den Vertikalstock umfasst, lässt sich durch Auf- oder Niederschieben der Strebe am Vertikalstock und Festhalten im richtigen Momente die generelle Einstellung und alsdann mit der anderen Hand unter Benutzung der Mikrometerschraube *T* die genaue Einstellung der Libelle bewirken.

Figur 89.



3) Mit dem dreifüssigen Stativ. Zum Taschen-Nivellierinstrument werden dreifüssige Stative aus poliertem Buchenholz nach englischem Modell (siehe Figur 89), Länge ca. 140 cm oder zusammenschiebbare, polierte Nussbaumholzstative (zusammengeschoben nur 56 cm lang) ähnlich den photographischen Reisestativen gefertigt. Dieselben enden in einem 0,5 bis 0,6 m langen mit Kugelgelenk versehenen Schaft, auf welchen das Instrument wie bei dem Stockstativ aufgesteckt wird. Die grobe Einstellung der Instrument-Visierrichtung und der Libelle wird nun mit Hilfe des Kugelgelenks und die feine Einstellung der Libelle wieder mit der Mikrometerschraube besorgt.

Figur 90.




Patent-Nivellierinstrument Nr. 197 mit 60facher Vergrösserung.

Figur 91.




Patent-Nivellierinstrument. 24fache Fernrohrvergrösserung.

**Bemerkung.** Wir können diese von L. Tesdorpf in Stuttgart gefertigten Instrumente auf Grund eigener Erfahrung nicht genug anempfehlen.

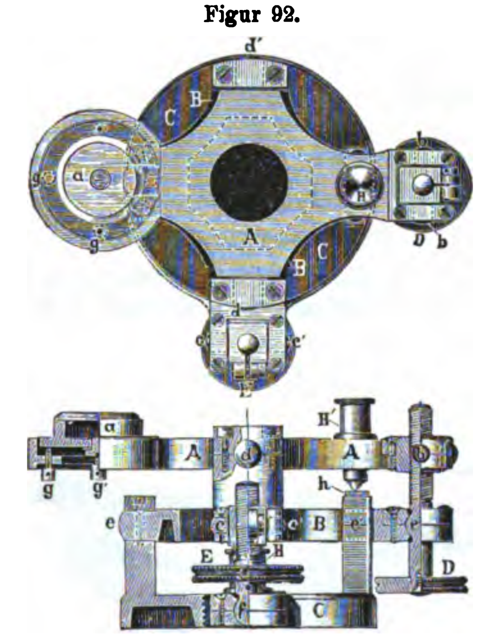
**Frage 92.** Wird das Spiegelungsprinzip (direkte Beobachtung der Libellenachse durch das Okular) auch bei grösseren Instrumenten angewendet?

**Erkl. 72.** Es kann wohl geschehen, dass während der Visur sich der Blasenstand ändert. Diese Veränderung muss wegen der Korrektion der abgelesenen Höhe unbedingt berücksichtigt werden.

**Antwort.** Das Spiegelungsprinzip ist beim Präzisionsnivellement unbedingt zu empfehlen. Es hat sich gezeigt, dass die Ablesung bei einspielender Blase unter allen Umständen vertrauenswürdiger ist (vergl. Erkl. 72). Wir geben in den Figuren 90 und 91 solche feine Nivellierinstrumente aus der Werkstätte der Firma Tesdorpf in Stuttgart.

Das Instrument der Figur 91 zeigt noch eine andere Eigentümlichkeit, nämlich eine Horizontalstellung mit nur zwei Stellschrauben nach Cardanischem Prinzip.

Figur 92.



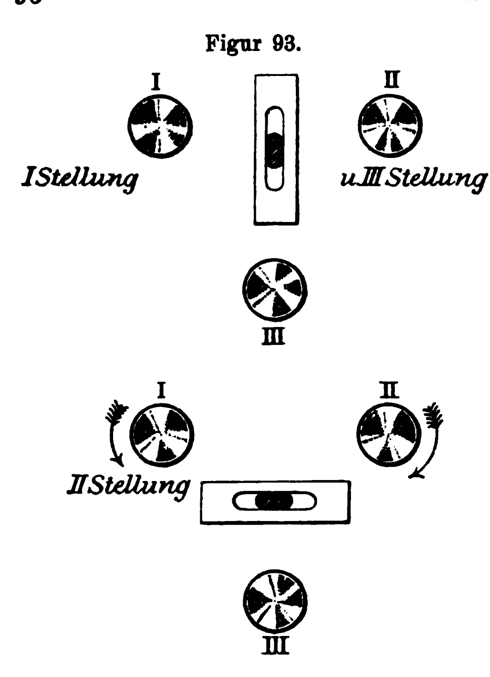

Verbesserte Patent-Horizontal-Einstellung, Konstruktion I für Theodolite und Nivellierinstrumente.

---

**Frage 93.** Auf welchem Prinzip beruht die Tesdorpfsche Horizontalstellung?

**Antwort.** Wir haben im I. Teil, Frage 97 gezeigt, wie man bei der Horizontalstellung eines Theodolits vorgehen soll. Das Instrument muss nach dieser Anleitung in zwei zu einander senkrechten Richtungen gehoben resp. gesenkt werden. Ein solches Vorgehen charakterisiert nun die Testorpfsche Horizontalstellung. Der Schraube III der Figur 92 entspricht die Schraube $E$ der Figur 92 und beide Schrauben I und II werden durch eine einzige $D$ ersetzt. Durch die Anbringung eines Kugelgelenks ($f$ in der Figur 92) kann das Instrument vermittelst der beiden Schrau-

Figur 93.



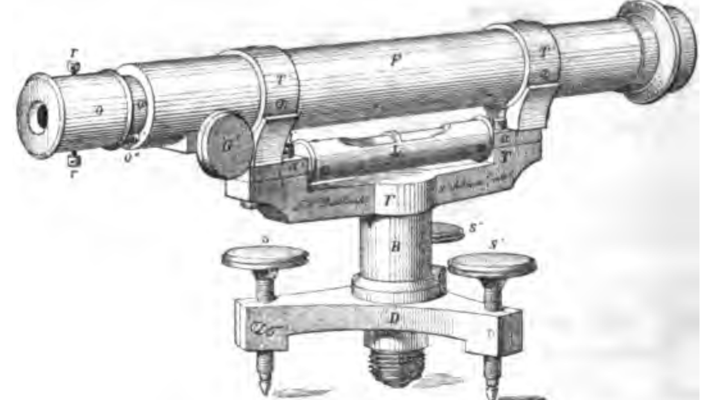




ben $D$ und $E$ zu zwei zu einander senkrechten Richtungen gehobene, ventuell gesenkt werden. Die Horizontalstellung wird nun so bewirkt, dass man das Fernrohr einmal über die Schraube $E$ stellt und durch diese die Libelle zum Einspielen bringt, sodann das Fernrohr über die Schraube $D$ stellt und wieder durch diese Schraube einrichtet. Dabei muss man freilich in das Fernrohr sehen.

**Bemerkung.** Wir geben in nachstehendem Abbildungen und kurze Beschreibungen der vier wichtigsten Formen der Nivellierinstrumente, wie sie von F. W. Breithaupt & Sohn in Kassel gebaut werden.

Figur 94.



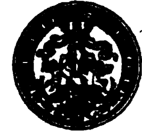
Nivellierinstrument von F. W. Breithaupt & Sohn in Kassel.

Figur 94. Fernrohr und Libelle am Träger $T$ fest verbunden; das Instrument ist einfach und sehr solid gebaut. Zur Berichtigung des Fadenkreuzes dienen die Schrauben $r$, $r'$, zur Berichtigung der Libelle die Schrauben $l$. Das Instrument hat den Vorzug, dass es einmal berichtigt, den Veränderungen wenig unterworfen ist. Nivelliert man aus der Mitte, so kann man auch ohne jede Berichtigung desselben richtige Resultate erhalten. Ein solches Instrument genügt vollkommen für die gewöhnlichen Arbeiten des Feldmessers und Kulturtechnikers. Die Art und Weise, ein solches Instrument zu berichtigen, haben wir in Frage 85 kennen gelernt.

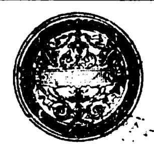
Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

**1325. Heft.** Preis des Heftes 25 Pf. **Vermessungskunde** (Geodäsie). Zweiter Teil. Forts. v. Heft 1324. — Seite 97—112. Mit 18 Figuren.





# Vollständig gelöste



# Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
**Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten**
erläutert durch
**viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,**
aus allen Zweigen
der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — **aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie**; des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's**; der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
**zum einzig richtigen und erfolgreichen**
**Studium**, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

**Dr. Adolph Kleyer,**
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

# Vermessungskunde

## (Geodäsie).

### Zweiter Teil.

Nach **System Kleyer** bearbeitet von **Dr. W. Láska.**

Fortsetzung von Heft 1324. — Seite 97—112. Mit 18 Figuren.

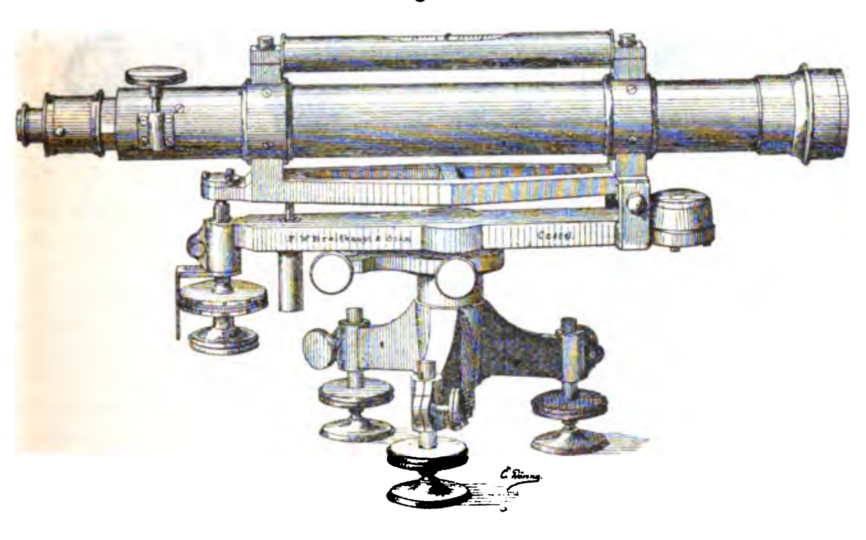
**Inhalt:**



**Stuttgart 1894.**
Verlag von Julius Maier.

Figur 95. Fernrohr und Libelle ebenfalls fest mit dem Träger verbunden, ausserdem ist am Instrument eine Dosenlibelle zur raschen ungefähren Aufstellung und eine Elevationsschraube (Tangentialschraube, Kippschraube) angebracht.

Figur 95.



Nivellierinstrument von F. W. Breithaupt & Sohn in Kassel.

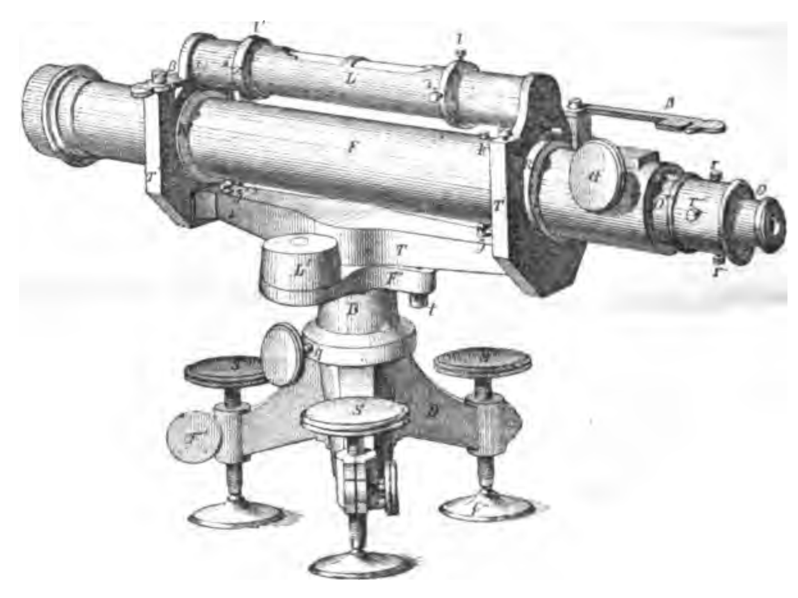
Das Instrument ist also auch zum trigonometrischen Nivellieren geeignet (vergleiche Frage 77).

Nivellierinstrumente mit Tangentialschraube (Gefällschraube) bieten den Vorteil, dass man damit auch die Höhen solcher Punkte bestimmen kann, die weit über oder unter der horizontalen Visur liegen. Trifft die horizontale Visur in den Boden, auf dem die Nivellierlatte steht, so macht man soviel ganze Umdrehungen mit der Tangentialschraube, bis man die Nivellierlatte ablesen kann, notiert diese Ablesung, und macht noch eine Umdrehung mit der Tangentenschraube; das hierbei durchlaufene Stück der Lattenteilung multipliziert mit der Anzahl der vorher gemachten Umdrehungen gibt den Abstand des ersten Ablesungspunktes an der Latte von der horizontalen Visur.

Die Elevationsschraube wird auch zur Libellenberichtigung benützt. Man stellt das Instrument mittels der Dosenlibelle und der drei Stellschrauben horizontal und bringt das Fernrohr in eine solche Lage, dass die Elevationsschraube über eine Stellschraube zu stehen kommt. Hierauf wird die Libelle zum Einspielen mittels der Elevationsschraube gebracht. Ist dieses geschehen, so dreht man das ganze Instrument um 180°. Die eine Hälfte des dann sich zeigenden Ausschlags wird an der Tangentialschraube und die andere Hälfte an der früher erwähnten Stellschraube korrigiert.

Figur 96. Fernrohr frei umlegbar und eine abnehmbare Aufsatzlibelle. Die Libelle wird, wie in der Frage 83 angegeben, geprüft; zu ihrer Berichtigung dienen die Schrauben $l$ und $l'$. Zur Verstellung des Fernrohrträgers $T$ gegen die Achse $B$ dient die Schraube $t$. Eine Dosenlibelle $L'$ dient zur ungefähren Aufstellung.

Figur 96.



Nivellierinstrument von F. W. Breithaupt & Sohn in Kassel.

## a) Die Nivellementaufnahme.

**Frage 94.** Was versteht man unter einem Nivellement-Profil?

**Antwort.** Unter einem Nivellement-Profil versteht man die bildliche Darstellung eines nivellierten Zuges.

**Frage 95.** Welche Arten von Profilen unterscheidet man?

**Antwort.** Man unterscheidet ein Längenprofil und ein Querprofil. Das Längenprofil stellt die Ergebnisse des Nivellierens in der Längenrichtung und das Querprofil die Ergebnisse des Nivellierens in der Quere eines Zuges dar. Während das Längenprofil unbeschränkt lang sein kann, hat das Querprofil gewöhnlich nur eine mässige Ausdehnung (z. B. bei den Eisenbahnlinien 20—40 m).

**Frage 96.** Wie wird ein Längenprofil aufgenommen?

**Bemerkung.** Die Hauptpunkte müssen, wenn es sich um Eisenbahnvorarbeit handelt, möglichst dauerhaft bezeichnet werden. Sie sollen wo möglich den Boden nicht überragen. Ist ein Anschluss an unveränderliche Punkte (Gebäude, Wegkreuze etc.) möglich, so soll er gemacht werden.

**Antwort.** Um ein Längenprofil aufzunehmen, muss zuerst die aufzunehmende Linie gekennzeichnet werden. Dieses geschieht durch Verpflockung. Es werden zunächst in Abständen von 50—100 m numerierte Holzpflöcke und zwar in möglichst gleicher Entfernung in den Boden getrieben. Diese heissen die Hauptpunkte. An Stellen, wo sich starke Vertikaländerungen vorfinden, werden sodann noch einige Zwischenpunkte festgelegt. Mit der Festlegung verbindet man in der Regel die Abmessung, d. h. es wird

**Bemerkung.** Ist der Anschluss an eine Höhenmarke der Landesaufnahme möglich, so sind die Höhen absolut zu rechnen, d. h. über Normal-Null der Landesaufnahme. Unter Normal-Null (mit *NN* zu zeichnen), versteht man einen Horizont, der 37 m unter dem Mittelstrich der Normalhöhenmarke der Berliner Sternwarte liegt. Dieser Horizont entspricht genähert dem Nullpunkte des Amsterdamer Pegels.

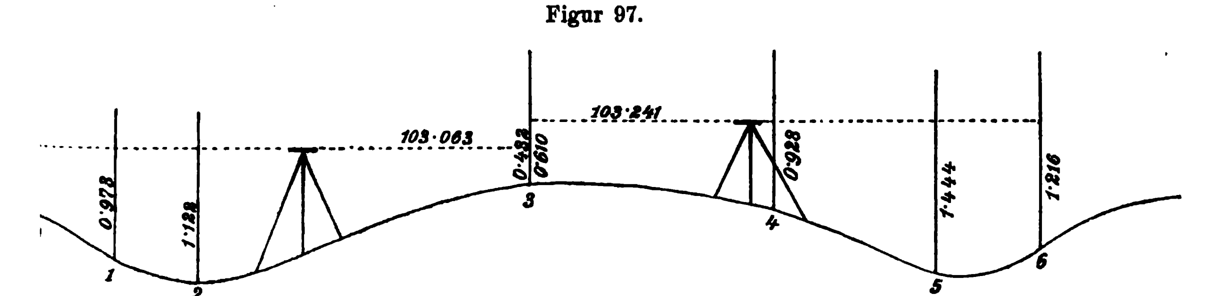
sogleich mit Messband (oder nötigenfalls durch Staffelmessung) die Entfernung der einzelnen Haupt- und Nebenpunkte gemessen.

Hierauf werden die Coten (Höhen) der einzelnen festgelegten Punkte durch Nivellement bestimmt. Zum Schlusse werden die Höhen berechnet und bildlich dargestellt.

Für die bildliche Darstellung hat man zu merken, dass die Entfernungen der einzelnen Punkte ohne Rücksicht auf die Krümmung hintereinander als Abscissen und ihre Coten gewöhnlich in bestimmtem Verhältnis vergrössert als Ordinaten aufgetragen werden.

Ein Beispiel möge die Anordnung klar machen:

Figur 97.




Die Punkte 0, 3, 6 mögen Hauptpunkte sein, die Punkte 1, 2, 4, 5 Nebenpunkte.

| Punkt | Ablesung | Höhe | Horizont der Visur | Entfernung |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0·742 | 102·321 *) | 103·063 | — |
| 1 | 0·973 | 102·090 | | 10·26 |
| 2 | 1·122 | 101·941 | | 12·34 |
| 3 | 0·432 | 102·631 | + 0·178 **) | 80·72 |
| 3 | 0·610 | 102·631 | 103·241 | — |
| 4 | 0·928 | 102·213 | | 42·72 |
| 5 | 1·444 | 101·797 | | 36·27 |
| 6 | 1·216 | 102·025 | | 18·74 |

**Bemerkung.** Horizont der Visur:
0 bis 3 = 0,742 + 102·321 = 103·063

Höhe 1 =
103·063 — 0·973 = 102·090

Höhe 2 =
103·063 — 1·122 = 101·941

*) Es werde angenommen, dass der Punkt 0 ein Höhenpunkt des Landesnivellement ist, mit der Höhenangabe 102·321 über Normal-Null.

**) Man hat:
0·610 — 0·432 = + 0·178
103·063 + 0·178 = 103·241

---

**Frage 97.** Welches sind die gesetzlichen Bestimmungen bezüglich der Längenprofile?

**Antwort.** Nach der Verordnung vom 2. März 1871, § 22 sollen die Abscissen im

Massstab 1:5000 und die Ordinaten 1:200 aufgetragen werden. Bei den Eisenbahnvorarbeiten benützt man 1 : 10·000 und 1:500.

Bezüglich der technischen Ausführung müssen wir auf die offiziellen „Bestimmungen über die Anwendung gleichmässiger Signaturen“, Berlin 1888, § 21 und Tafel 8 verweisen.

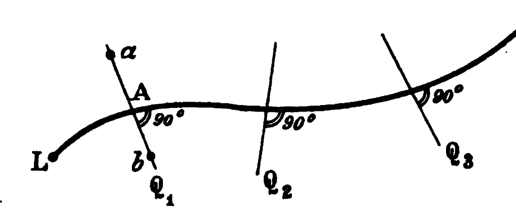
**Bemerkung.** Man erhält also immer ein verzerrtes Bild. Dasselbe stellt aber die Höhenunterschiede markant dar.

**Frage 98.** Wie wird ein Querprofil hergestellt?

**Antwort.** Um ein Querprofil herzustellen, muss zunächst seine Lage im Längenprofil bestimmt werden.

Sei (vergleiche Figur 98) $L$ der Ausgangspunkt eines Längenprofils, so wird das Querprofil $Q_1$ bestimmt sein, wenn man die Entfernung $LA$ gemessen längs des Längenprofils kennt.

Figur 98.




Ferner soll das Querprofil senkrecht auf dem Längenprofil stehen.

Man stellt sich zu diesem Zweck mit dem Winkelspiegel in $A$ auf und lässt zwei (oder mehrere je nach Bedarf) Punkte $a$, $b$ zu beiden Seiten senkrecht auf das Längenprofil einvisieren und festlegen. Sonst wird das Querprofil genau so wie das Längenprofil behandelt, nur dient immer der Schnittpunkt mit dem Längenprofil als Ausgangspunkt.

Bei Querprofilen pflegt man sowohl bei den Abscissen als auch bei den Ordinaten denselben Massstab beizubehalten, da Querprofile nur dort angelegt werden, wo die Bodenverschiedenheit eine zu grosse ist.

**Bemerkung.** Sollte zufälligerweise ein Querprofil nötig sein mit einem andern Winkel als 90°, so muss dieser Winkel mit Hilfe eines Theodolits bestimmt werden.

## b) Aufgaben über das Nivellieren.

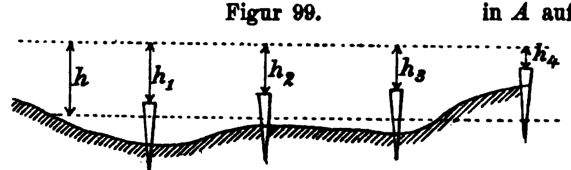
**Aufgabe 33.** Von einem Punkte aus ist in einer gegebenen Richtung eine horizontale Gerade abzustecken.

**Auflösung.** Sei $A$ der gegebene Punkt (vergl. Figur 100) und $AB$ die gegebene Richtung.

Man stellt sich mit dem Nivellierinstrument in $A$ auf und visiert auf $B$. In dieser Richtung werden geeignete Punkte durch Nivellierpflöcke bezeichnet:

$$(A_1 A_2 A_2 A_3 \cdots)$$

Figur 99.



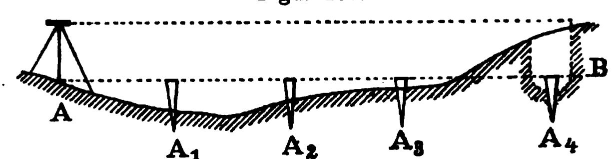

Hierauf werden die Höhen der Pflöcke (vergleiche Figur 99):

$$h_1, \; h_2, \; h_3, \; h_4$$

an der Latte abgelesen und die Differenzen:

$$h - h_1, \quad h - h_2, \quad h - h_3, \quad h - h_4$$

Figur 100.




**Bemerkung.** War ein Pflock zu tief eingeschlagen, dann empfiehlt es sich, neben demselben einen zweiten einzuschlagen, bis zur richtigen Differenz.

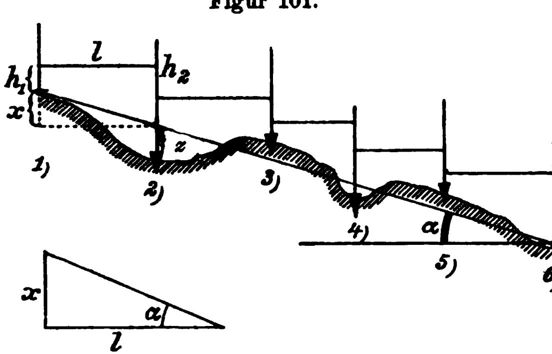
**Bemerkung.** Das Wort „Höhe" wird hier im Sinne von der Visur abwärts angewendet.

gebildet, wobei $h$ die Höhe der verlangten Strecke bezeichnet. Diese Grössen werden an die Pflöcke geschrieben und der Gehilfe schlägt hierauf die einzelnen Pflöcke tiefer, bis der Pflock die gewünschte Höhe $h$ hat. Ist dieses geschehen, so werden sämtliche Punkte durch Anvisieren überprüft.

---

**Aufgabe 34.** Von einem Punkte aus soll in einer gegebenen Richtung eine Gerade von bestimmter Neigung abgesteckt werden.

Figur 101.




**Bemerkung.** Statt des Winkels $\alpha$ pflegt man das Gefälle auch in Prozenten anzugeben. Dann ist:

$$x : l - 100 : n$$

also:

$$x = 100 \frac{l}{n}$$

**Auflösung.** Sei $h_1$ die abgelesene Höhe des ersten Standpunktes, sowie $h_2$ jene des zweiten und $\alpha$ der Neigungswinkel (das Gefälle), so besteht die Beziehung:

$$h_1 + x = h_2 - z$$

wobei (vergl. Figur 101):

$$x = l \operatorname{tg} \alpha$$

daraus ergibt sich:

$$z = h_2 - h_1 - l \operatorname{tg} \alpha$$

$z$ ist dabei der richtige Stand des Pflockes 2). Ist diese Grösse ($z$) positiv, so muss der Pflöckestand erhöht, ist sie negativ, so muss derselbe vertieft werden.

Genau so wird der in der Praxis am meisten vorkommende Fall: „zwei ungleich hohe Punkte durch eine Gerade zu verbinden" behandelt.

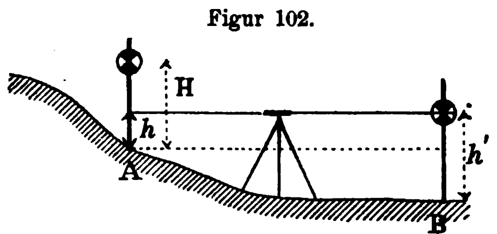
---

**Aufgabe 35.** Ein Punkt ist auf dem Felde durch eine Cote $q$ (Höhenzahl) gegeben. Man soll mit seiner Hilfe eine Horizontalkurve von bestimmter Cote $Q$ abstecken.

**Auflösung.** Man stelle über den gegebenen Punkt $A$ eine Nivellierlatte und in einiger Entfernung davon das Nivellierinstrument, und lese den Stand $h$ der Latte ab (vergleiche Figur 102). Dann wird die Cote des abgelesenen Punktes gleich:

$$q + h$$

Figur 102.




**Bemerkung.** Handelt es sich um genauere Messung, dann müssen die so einzeln festgelegten Punkte durch Nivellement kontrolliert werden.

Nun bezeichne man auf der Latte mit der Zielscheibe die Grösse:

$$q + h - Q = H$$

Ist dieses geschehen, so werden in der Umgebung Punkte ($B$) gesucht, für welche die Zielscheibe in die Visur kommt. Für diese ist dann:

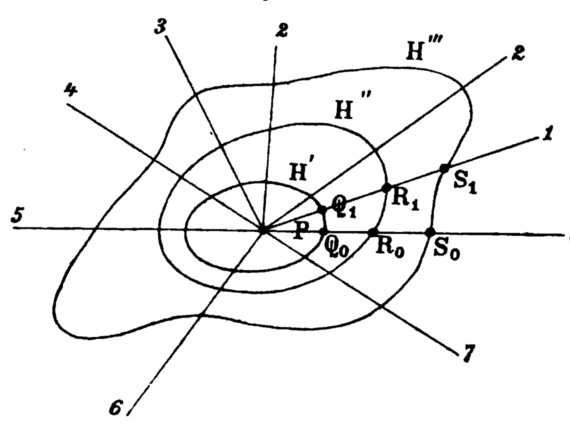
$$h' - H = \text{Konstantenzahl.}$$

Die Gesamtheit solcher Punkte bildet dann eine sogenannte Horizontalkurve.

---

**Aufgabe 36.** Es soll ein Hügel aufgenommen und durch Horizontalkurven dargestellt werden.

Figur 103.




**Auflösung.** Man steckt vom Scheitel des Hügels zunächst Profile ab. Dieselben sollen so gewählt werden, dass sie sowohl die stärksten als auch die schwächsten Neigungen der Hügelfläche treffen (vergleiche Fig. 103). Sodann werden mit einem Theodolit die Winkel der einzelnen Richtungen:

$0P1$, $1P2$, $2P3$ u. s. w.

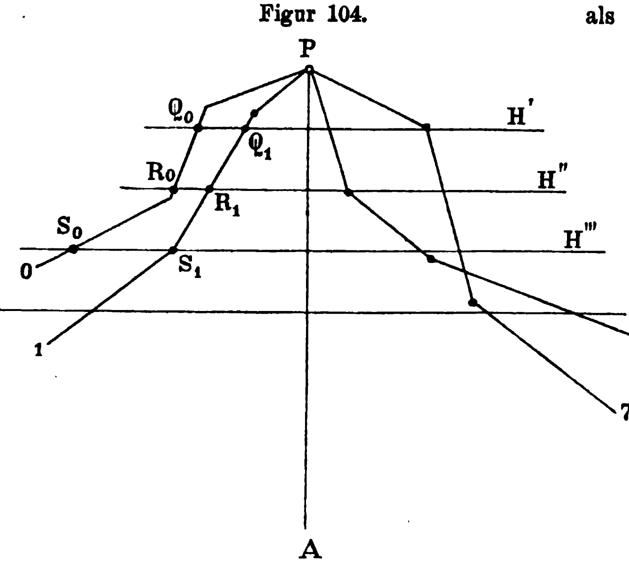
gemessen.

Hierauf wird jedes Profil in bekannter Weise nivelliert. Um die Horizontalkurven zu konstruieren, wähle man $PA$ als Achse und zeichne zu einer oder zu beiden Seiten derselben die Profile $P0$, $P1, \cdots P6$, $P7$, indem man die Horizontalentfernungen der nivellierten Punkte als Abscissen und ihre 5- oder 10fachen Höhencoten als Ordinaten aufträgt. Werden dann senkrecht zu $PA$ in gleichen Abständen Gerade gezogen, so schneiden sie die Profile in den Punkten der Horizontalkurven $H'H''H'''$, d. h. in:

$$Q_0 R_0 S_0 \cdots Q_1 R_1 S_1$$

(vergleiche Figur 104).

Figur 104.




**Bemerkung.** Die Abstände $PH'$, $H'H''$, $H''H'''$, können je nach dem Terrain und Bedürfnis zu 0,5 bis 5 und mehr Meter gewählt werden.

# IV. Die Höhenmesskunst.

## 1. Einleitung.

**Frage 99.** Was versteht man unter Höhenmesskunst?

**Bemerkung.** Streng genommen gehört auch das Nivellement zur Höhenmesskunst. Doch wollen wir hier nur jene Höhenbestimmungen behandeln, bei welchen das Nivellement nicht angezeigt ist.

**Antwort.** Unter Höhenmesskunst werden alle jene Vermessungsarbeiten verstanden, welche die Ermittelung der vertikalen Abstände gegebener Punkte von einer beliebig gewählten Basisfläche zum Gegenstande haben.

**Bemerkung.** Die genaue Definition der Basisfläche der Höhenmessungen kann erst in der höheren Geodäsie gegeben werden. Hier mögen nachstehende Bemerkungen genügen. Infolge der Gravitation wirken alle Gegenstände aufeinander anziehend und ein jeder Punkt der Erdoberfläche wird von einer bestimmten Kraft affiziert. Die Richtung dieser Kraft ist durch die durch diesen Punkt gehende Vertikale bestimmt. Die Intensität nimmt im allgemeinen mit der Höhe ab. Denkt man sich nun jene Punkte, wo diese Kraft eine bestimmte konstante Grösse besitzt, durch eine Fläche verbunden, so erhält man eine sogenannte Niveaufläche. Sei (vergleiche Figur 105) $g$ die Kraft und $C$ die Konstante, so ist die Niveaufläche durch:

$$g = C$$

charakterisiert. Nimmt man eine andere Konstante, etwa $C'$, so wird man auch eine Fläche finden, für welche aber die Kraftintensität $g'$ sein wird. Ihre Gleichung ist sodann:

$$g' = C'$$

Analog könnte man auch andere Flächen:

$$g'' = C''$$

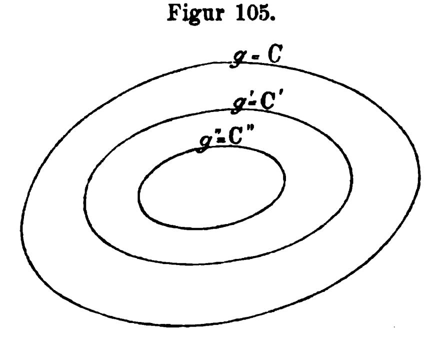
u. s. w. bilden. Da:

$$C \gtrless C' \gtrless C''$$

und alle diese Grössen verschieden sind, so kann nie:

$$g = g' = g''$$

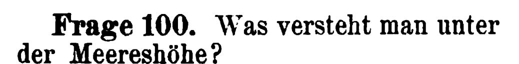
Figur 105.




sein, d. h. die Niveauflächen können sich nicht schneiden. Darum sind die Niveauflächen besonders geeignet, eine Basis für die Vetikalmessungen abzugeben.

Die Vertikalrichtung steht auf den Niveauflächen senkrecht. Für die Vermessungspraxis genügt es, einzelne Niveauflächen als parallele zu behandeln, obschon sie es nicht sind.

---



**Frage 100.** Was versteht man unter der Meereshöhe?

**Bemerkung.** Man hat z. B. in Preussen den Nullpunkt des Amsterdamer Pegels zum Ausgangspunkt gewählt. Allein an diesen Punkt können die Messungen sehr schwer und nicht bequem genug angeschlossen werden. Darum hat man auf der Berliner Sternwarte in den Nordpfeiler einen Syenitblock eingemauert, welcher eine Millimeterteilung auf Glas trägt, deren

**Antwort.** Unter der Meereshöhe wird der vertikale Abstand eines Punktes von derjenigen Niveaufläche verstanden, von welcher die Oberfläche der Weltmeere am wenigsten abweicht. Da es aber sehr schwer wäre, diese Oberfläche irgendwie festzulegen, so pflegt man gewöhnlich irgend einen festen Punkt zur Bestimmung einer Niveaufläche zu wählen, welchen man **Normalhöhepunkt** nennt. Als Basisfläche für Vertikalmessungen

Mittelstrich — der Normalhöhepunkt — genau 37 Meter über Normalnull, d. h. über dem Nullpunkt des Amsterdamer Pegels steht.

**Bemerkung.** Die trigonometrische Abteilung der Landesaufnahme hat in dauerhafter Weise genügend viele Punkte festgelegt, deren amtliches Verzeichnis: Auszug aus dem Nivellement der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme durch den Buchhandel bezogen werden kann.

In Oesterreich bezieht man die Höhen auf das mittlere Niveau des Adriatischen Meeres.

gilt dann jene Niveaufläche, welche durch diesen Punkt hindurchgeht.

Wir wollen in der Folge die Höhe über Normal-Null einfach die absolute Höhe nennen.

Die Normal-Null ist also eine durch Uebereinkunft geschaffene Nullmarke.

## 2. Die trigonometrische Höhenmessung.

**Frage 101.** Welches sind die wichtigsten Fehlerquellen, welche die Höhenmessung beeinflussen?

Figur 106.

**Bemerkung.** Gelangt ein Lichtstrahl (vergl. Figur 106) $OD$ an die Grenze $AB$ zweier verschieden dichten Luftschichten, so wird er gebrochen. Sei $i$ der Einfallswinkel und $F$ der Brechungswinkel, dann besteht nach den Lehren der Optik die Beziehung:

$$\frac{\sin i}{\sin F} = \mu$$

wo $\mu$ der Brechungsquotient ist. Die verschiedene Dichte der Luft ist vorzugsweise durch die jeweilige Lufttemperatur bedingt.

**Antwort.** Unter den wichtigsten Fehlerquellen, welche die Höhenmessung beeinflussen, muss zunächst die Refraktion genannt werden.

Der Lichtstrahl bewegt sich infolge der Verschiedenheit der Luftschichten nicht geradlinig in der Luft, sondern beschreibt im allgemeinen eine sehr verwickelte Kurve, von welcher man sich nur in der horizontalen Richtung ein genähertes Bild verschaffen kann.

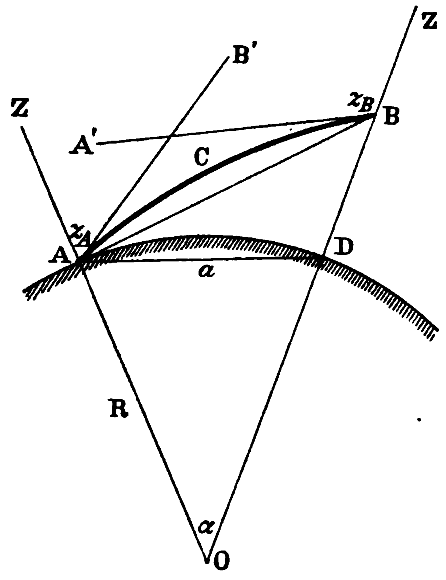
Es ist unmöglich, eine allgemeine Refraktionsformel aufzustellen, man begnügt sich mit den mittleren aus den Beobachtungen abgeleiteten Korrektionswerten.

Man hat gefunden, dass die Refraktion der Ab- oder Zunahme der Temperatur proportional läuft.

**Frage 102.** Wie wird die Refraktion durch Versuche bestimmt?

**Antwort.** Nehmen wir an, wir hätten von zwei Punkten $A$ und $B$ die gegenseitigen Zenithdistanzen:

Figur 107.




$$z_A = \sphericalangle ZAB'$$
$$z_B = \sphericalangle ZBA'$$

gemessen. Es erscheint uns nämlich von $A$ aus gesehen der Punkt $B$ in der Richtung $AB'$ und von $B$ aus der Punkt $A$ in der Richtung $BA'$, eben weil der Lichtstrahl sich von $A$ nach $B$ nicht auf geradem Wege $AB$, sondern auf der krummen Linie $ACB$ bewegt.

Die Korrektion wegen Refraktion ist also im Punkte $A$ gleich:

$$\Delta z_A = \sphericalangle B'AB$$

und analog im Punkte $B$ gleich:

$$\Delta z_B = \sphericalangle ABA'$$

Sodann haben wir im Dreieck $ABC$:

$$\alpha + (180^0 - z_A - \Delta z_A) + (180^0 - z_B - \Delta z_B) = 180^0$$

also:

$$\Delta z_A + \Delta z_B = (180^0 + \alpha) - (z_A + z_B)$$

Macht man die Annahme, dass:

$$\Delta z_A = \Delta z_B$$

so folgt:

$$\Delta z = \frac{1}{2}[(180^0 + \alpha) - (z_A + z_B)]$$

Nach den von Gauss ausgeführten Versuchen ist $\Delta z$ proportional dem Winkel $\alpha$ und zwar:

$$\text{I} \ldots \Delta z = 0{,}13\,\alpha$$

Nach Jordan hat man genauer:

$$\Delta z = 0{,}16\,\alpha$$

Die Grösse 0,13 resp. 0,16 führt den Namen des Refraktionskoëffizienten. Derselbe ist keineswegs eine konstante Grösse.

**Bemerkung.** Der erste, der die terrestrische Refraktion in Betracht zog, war Tobias Mayer (1751) welcher den Refraktionskoëffizienten aus den französischen Messungen zu $^1/_8$ berechnete.

Man kann die Formel für $\Delta z$ noch anders schreiben. Es ist im Dreieck $AOD$ (vergleiche Figur 107):

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2R}$$

wenn:

$$a = AD$$
$$R = OA = OD$$

gesetzt wird. $R$ ist der Erdradius. Also da $\alpha$ ein kleiner Winkel ist:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha \sin 1''}{2}$$

woraus:

$$\alpha = \frac{a}{R \sin 1''}$$

folgt, so dass wir haben:

$$\Delta z = \frac{0{,}16}{\sin 1'' \cdot R} \cdot a$$

wobei etwa zu setzen ist:

$$r = 6 \cdot 365\,000$$
$$\frac{1}{\sin 1''} = 206\,265$$

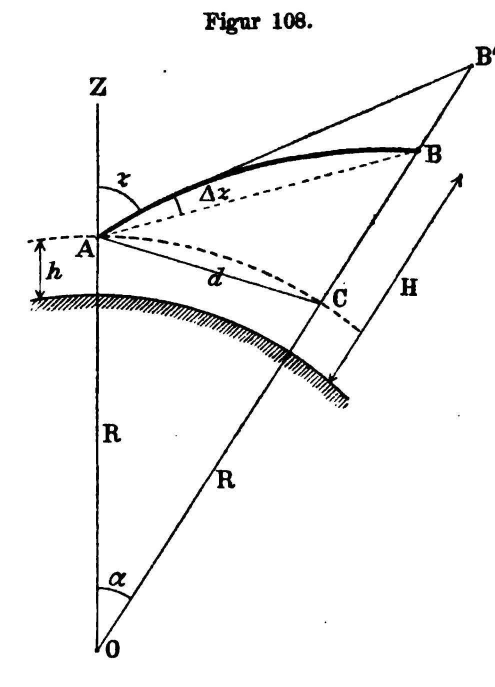
$a$ ist dabei in Metern auszudrücken.

---

**Frage 103.** Wie lautet das Hauptproblem der Höhenmesskunde?

**Antwort.** Es sei (vergl. Fig. 108) $A$ ein Standort, dessen absolute Höhe $h$ sein möge. Von diesem wurde gegen $B$ die Zenithdistanz

Figur 108.




$ZAB' = z$ gemessen. Die Entfernung $AC = d$ ist bekannt. Es werde gesucht die absolute Höhe $H$ des Punktes $B$.

Da man infolge der Refraktion nicht $B$ an seinem richtigen Orte, sondern in $B'$ sieht, so ist nicht die gemessene Zenithdistanz $z$ die wahre. Dieselbe muss vielmehr um eine Grösse $\Delta z$ korrigiert werden.

Man hat im $\triangle AOB$, wo $O$ den Erdmittelpunkt bezeichnet, wenn noch der Erdradius gleich $R$ gesetzt wird, nach dem Sinussatze:

$$\text{I} \ldots \frac{(R+h)}{(R+H)} = \frac{\sin(z+\Delta z-\alpha)}{\sin(z+\Delta z)}$$

also, wenn $h$ und $H$ gegen $R$ als klein angenommen werden (vergl. Erkl. 73):

$$1+\frac{h}{R}-\frac{H}{R} = \frac{\sin(z+\Delta z-\alpha)}{\sin(z+\Delta z)}$$

beachtet man ferner, dass $\Delta z$ und $\alpha$ im allgemeinen kleine Winkel sind, so kann man setzen (vergl. Erkl. 74):

$$\frac{\sin(z+\Delta z-\alpha)}{\sin(z+\Delta z)} = 1-\sin\alpha\operatorname{ctg}(z+\Delta z)$$
$$= 1-\frac{d}{R}\operatorname{ctg}(z+\Delta z)-\frac{d^2}{2R}$$

Damit wird:

$$\text{II} \ldots H = h+d\operatorname{ctg}(z+\Delta z)+\frac{d^2}{2R}$$

Dieses ist die Grundformel der Höhenmessung. Während die Formel I unter Voraussetzung der Kugelgestalt der Erde eine ganz strenge ist, ist die Formel II nur eine Näherungsformel, die aber für die Praxis vollkommen genügt.

Berücksichtigt man nur die ersten Potenzen von $\Delta z$, so kann man auch:

$$\operatorname{ctg}(z+\Delta z) = \operatorname{ctg} z+\frac{\Delta z\sin 1''}{\sin^2 z}$$

setzen, so dass:

$$H = h+d\operatorname{ctg} z+\frac{d\cdot\Delta z\sin 1''}{\sin^2 z}$$

wird. Indessen ist die Formel II für die Rechnung bequemer (vergl. Erkl. 74).

Wird nun:

$$\Delta z = \frac{0{,}16}{R\sin 1''}\cdot d$$

gesetzt und da $z$ immer nahe an $90^0$ ist, wenigstens bei den in der Praxis vorkommenden Fällen, so ist:

$$H-h = d\operatorname{ctg} z+\frac{0{,}16}{R}d^2$$

**Erkl. 73.** Man hat:

$$\frac{R+h}{R+H} = \frac{1+\frac{h}{R}}{1+\frac{H}{R}}$$
$$= \left(1+\frac{h}{R}\right)\left(1-\frac{H}{R}+\frac{H^2}{R^2}-\cdots\right)$$
$$= 1+\frac{h}{R}-\frac{H}{R}+\cdots$$

**Erkl. 74.** Es ist:

$$\frac{\sin(z+\Delta z-\alpha)}{\sin(z+\Delta z)}$$
$$= \frac{\sin(z+\Delta z)\cos\alpha-\cos(z+\Delta z)\sin\alpha}{\sin(z+\Delta z)}$$
$$= \cos\alpha-\operatorname{ctg}(z+\Delta z)\cdot\sin\alpha$$

Da $\alpha$ ein kleiner Winkel ist, so kann noch:

$$\cos\alpha = 1-\frac{\alpha^2}{2}$$

gesetzt werden, ferner:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{d}{2R},$$

denn für sehr kleine Winkel ist:

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}$$

Daraus folgt:

$$\sin\alpha = \frac{d}{R}$$

und

$$\cos\alpha = 1 - \frac{1}{2}\frac{d^2}{R^2}$$

Dieses ist die gewöhnlich gebrauchte Formel. Wird hier nach Jordan:

$$\log R = 6{\cdot}80\,380$$

gesetzt, so ergibt sich nachstehende Tafel, die $H - h$ in Metern ergibt.

**Erkl. 75.** Es ist:

$$\operatorname{ctg}(z + \Delta z) - \operatorname{ctg} z = \frac{\sin\Delta z}{\sin z \sin(z + \Delta z)}$$

wird näherungsweise:

$$\sin\Delta z = \Delta z \sin 1''$$

$$\sin(z + \Delta z) = \sin z$$

gesetzt, so folgt die nebenstehende Formel.

| Zenithdistanz $z$ | Entfernung $d$ in Kilometern 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 20 | 30 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 90° | 0 | 1 | 2 | 4 | 7 | 26 | 59 | 106 |
| 89° 50′ | 6 | 13 | 20 | 28 | 36 | 85 | 147 | 223 |
| 40′ | 12 | 24 | 37 | 51 | 65 | 143 | 285 | 338 |
| 30′ | 18 | 36 | 55 | 74 | 94 | 201 | 321 | 454 |
| 20′ | 24 | 48 | 72 | 97 | 123 | 259 | 408 | 570 |
| 10′ | 29 | 59 | 90 | 121 | 152 | 318 | 496 | 687 |
| 0′ | 35 | 71 | 107 | 144 | 181 | 376 | 583 | 803 |

**Frage 104.** Wie werden die Zenithdistanzen gemessen?

**Bemerkung.** Es ist angezeigt, wenn solche Punkte vorhanden sind, zur Höhenbestimmung Zenithdistanzen zu möglichst vielen der gegebenen Punkte zu nehmen. Man erhält so neben einem genauen Resultat, auch in den sich zeigenden Differenzen zugleich ein Mass der Genauigkeit des Resultats.

**Bemerkung.** Bezüglich der Elimination der Fehler bei diesem Verfahren gilt das in den Fragen 88 bis 90 des I. Teils Gesagte.

**Antwort.** Man pflegt die Zenithdistanzen genau so wie die Horizontalwinkel zu messen (vergl. Frage 99).

Das Fernrohr wird zunächst sorgfältig horizontiert und die Libelle zum Einspielen gebracht.

Darauf wird der Gegenstand anvisiert und die Zenithdistanz $z_1$ abgelesen; das Fernrohr durchgeschlagen oder umgelegt und der Horizontalkreis um 180° gedreht und sodann die zweite Zenithdistanz $z_2$ abgelesen. Die richtige Zenithdistanz ist dann:

$$z = \frac{1}{2}(z_2 - z_1)$$

Wie der Libellenstand zu berücksichtigen ist, zeigt das nachstehende Schema:

| Standpunkt | Ziel und nähere Bezeichnung | Fernrohrlage | Ablesung | Mittel | $2Z = Z_2 - Z_1$ <br> $Z = \frac{1}{2}(Z_2 - Z_1)$ | Libellenstand $a$ an dem Okular-Ende | Libellenstand $b$ an dem Objektiv-Ende | $a - b$ | $\left(\frac{a-b}{4}\right)''$ in Sekunden | Definitives Resultat $Z + \left(\frac{a-b}{4}\right)''$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | ° ′ ″ | ′ ″ | ° ′ ″ | Teilstriche | Teilstriche | | | ° ′ ″ |
| | | I | 3 49 10 | | | | | | | |
| *A* | *B* | | 40 | 49 25 | 172 23 45 | 11 | 5 | +6 | $+\frac{5}{4} = 1,25$ | |
| | | | 176 18 20 | | | | | +5 | +1,25 | |
| | | II | 0 | 13 10 | 86 11 52.5 | | | | 5 | |
| | | | | | | | | | +7″2 | |
| | | | | | | 8 | 9 | −1 | | 86 11 59″7 |

**Bemerkung.** Der Wert eines Teilstriches der Libelle war in dem angeführten Beispiel 5″.
Ferner hat man:

$$176^0\,18'\,10'' - 3^0\,49'\,25'' = 172^0\,23'\,45''$$

$$\frac{1}{2}(172^0\,23'\,45'') = 86^0\,11'\,52', 5$$

Das übrige ist unmittelbar klar.

**Bemerkung.** Die Grössen:

$$\varDelta z = \frac{0{,}16}{R}\cdot\frac{d}{\sin 1''}$$

$$n = \frac{d^2}{2R}$$

können den Tafeln entnommen werden. Wir rechnen sie aber gesondert aus:

| | |
|---|---|
| $\log d$ | 3·69 897 |
| $\log 0{\cdot}16$ | 9·20 412 |
| Summe I | 2·90 309 |
| $\log R$ | 6·80 380 |
| $\log\sin 1''$ | 5·31 443 |
| Summe II | 2·11 823 |
| I — II | 0·78 486 |
| Zahl | 6″ 1 |

Um ein vollständig durchgeführtes Beispiel zu haben, nehmen wir die Entfernung zwischen $A$ und $B$ gleich:

$$d = 500 \text{ m}$$

und die absolute Höhe von $B$:

$$h_B = 850 \text{ m}$$

Dann hat man nachstehendes Schema:

| | |
|---|---|
| $\log d^2$ | 7·39794 |
| $\log R$ | 6·80 380 |
| $\log 2$ | 0·30 103 |
| $\log 2R$ | 7·10 483 |
| $\log\frac{d^2}{2R}$ | 0·29 311 |
| Zahl | $+1{\cdot}96 = 0$ |

| | | |
|---|---|---|
| $d = 5000$ | $z = 86^0\,11'\,59''{\cdot}7$ | $\log d = 3{\cdot}698\,970$ |
| $h_B = 828{\cdot}00$ | $\varDelta z = \quad +6''\,1$ | $\log\operatorname{ctg}(z+\varDelta z) = 8{\cdot}822\,118$ |
| $m = 331{\cdot}96$ | | |
| $n = \quad 1{\cdot}96$ | $z+\varDelta z = 86^0\,12'\,5''\,8$ | $\log m = 2{\cdot}521\,083$ |

$$h_A = 494 = h_B \pm m \pm n, \text{ je nachdem } z \gtrless 90^0$$

Es ist demnach die absolute Höhe des Standpunktes gleich 494 Meter.

---

## 3. Aufgaben über trigonometrische Höhenmessung.

**Aufgabe 37.** Es soll die Höhe eines Kirchturmfensters (unterer Rand) bestimmt werden, wenn man nur einen einzigen Standpunkt zur Verfügung hat und die Entfernung des Turmes unbekannt ist.

**Auflösung.** Man lasse von der Fenstersohle das Messband frei herabhängen ($AB$ in der Figur 109). Seine Länge sei $S$.

Sodann hat man, wenn:

$$AC = H$$
$$CD = h$$
$$OC = E$$
$$\sphericalangle ZOA = \alpha$$
$$\sphericalangle ZOB = \beta$$

gesetzt wird:

$$AC = E\operatorname{ctg}(90^0 - \alpha) = E\operatorname{tg}\alpha$$
$$BC = E\operatorname{ctg}(90^0 - \beta) = E\operatorname{tg}\beta$$

Nun ist:

$$AC - BC = s = E(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)$$

also:

$$E = \frac{s}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}$$

**Erkl. 76.** Es ist:

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

ferner:

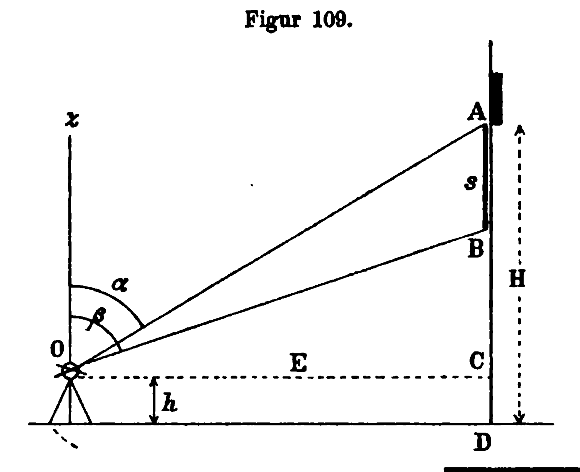
$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta} = \frac{\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$$

da nun:

$$\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha = \sin\alpha$$

ist, so folgt die nebenstehende Formel.

Figur 109.




Damit wird:

$$H = h + CA = h + E\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

oder:

$$H = h + \frac{s\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta}$$

wofür man auch (vergleiche Erkl. 76):

$$H = h + \frac{s \sin\alpha \cos\beta}{\sin(\alpha - \beta)}$$

setzen kann.

**Aufgabe 38.** Es soll die Höhe einer Turmspitze gefunden werden, vorausgesetzt, dass man die Höhe einer Fenstersohle, wie in der vorigen Aufgabe angezeigt, gefunden hat.

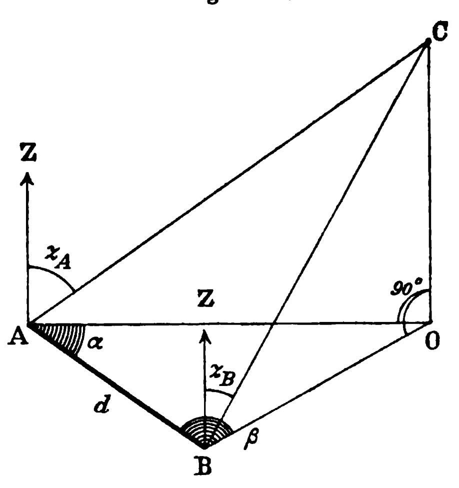
**Auflösung.** Bezeichnet $e$ die Entfernung der Turmspitzprojektion von dem Aussenrand in der Visurebene und behalten die übrigen Grössen dieselbe Bedeutung wie früher, so hat man:

$$H = h + (E + e)\,\mathrm{tg}\,z$$

wobei $z$ die Zenithdistanz der Turmspitze ist. Um diese Formel zu beweisen, hat man genau dieselben Betrachtungen anzustellen wie in der vorhergehenden Aufgabe.

**Aufgabe 39.** Es soll die Höhe eines Gegenstandes gefunden werden, wenn man denselben von zwei Orten, deren Entfernung genau bekannt ist, anvisieren kann.

Figur 110.




**Auflösung.** Es sei $OC$ die zu bestimmende Höhe (vergl. Figur 110) und $AB$ die bekannte Entfernung der Standpunkte $A$ und $B$.

Ferner können als gemessen angenommen werden die Zenithdistanzen:

$$ZAC = z_A$$
$$ZBC = z_B$$

sowie die Winkel:

$$OAB = \alpha$$
$$ABO = \beta$$

Sei noch:

$$AB = d$$

so hat man im Dreieck $AOB$:

$$AO = d \cdot \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

sodann im Dreieck $AOC$:

$$OC = AO \cdot \mathrm{tg}\,(90 - z_A)$$

oder:

$$\text{I} \ldots OC = d\,\frac{\sin\beta\,\mathrm{ctg}\,z_A}{\sin(\alpha + \beta)}$$

**Bemerkung.** Bei der Anwendung der Formel I ist also die Kenntnis von $z_B$ nicht nötig.

Figur 111.

analog erhält man:

$$\text{II} \ldots OC = d\,\frac{\sin\alpha \operatorname{ctg} z_B}{\sin(\alpha+\beta)}$$

welche Formel zur Kontrolle dient.

In dem speziellen Falle, wo $A$, $B$, $O$ auf einer Geraden liegen, hat man (vergleiche Figur 111):

$$OC = OB \operatorname{ctg} z_B$$

und auch:

$$OC = OA \operatorname{ctg} z_A$$

also:

$$OA - OB = d = OC(\operatorname{tg} z_A - \operatorname{tg} z_B)$$

so dass also:

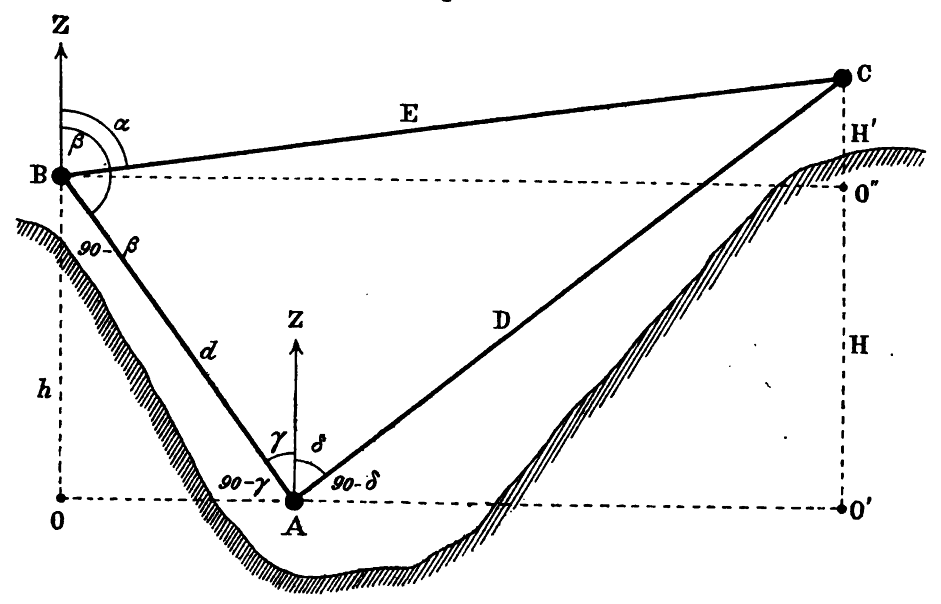
$$OC = \frac{d}{\operatorname{tg} z_A - \operatorname{tg} z_B}$$

wird. Will man diese Formel logarithmisch anschreiben, so hat man nach Erkl. 76 der Aufgabe 37:

$$OC = \frac{d \cos z_A \cos z_B}{\sin(z_A - z_B)}$$

---

Figur 112.




**Aufgabe 40.** Um die Seehöhe $h_c$ des Punktes $C$ (vergleiche Figur 112) zu bestimmen, wurden von zwei Punkten $A$ und $B$, deren Seehöhen $h_A$ und $h_B$ bekannt waren, die Zenithdistanzen:

$\alpha = \sphericalangle$ Zenith $BC$
$\beta = \sphericalangle$ Zenith $BA$
$\gamma = \sphericalangle$ Zenith $AB$
$\delta = \sphericalangle$ Zenith $AC$

gemessen. Wie berechnet sich hieraus $h_c$?

**Auflösung.** Bei dieser Auflösung wollen wir von der Refraktion absehen, um einfachere Bezeichnungen zu haben.

Da die Entfernungen der Punkte $A$, $B$, $C$ nicht bekannt sind, so müssen zunächst diese berechnet werden.

Man hat im Dreieck $OAB$:

$$1) \ldots AB = d = \frac{OB}{\sin(90-\gamma)} = \frac{h}{\cos\gamma}$$

oder:

$$d = \frac{OB}{\cos(90-\beta)} = \frac{h}{\sin\beta}$$

Sodann ist im Dreieck $BAC$:

$$AC = D = d \cdot \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin[180^0 - (\beta - \alpha + \gamma + \delta)]}$$

oder:

$$D = d\,\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\gamma+\delta-\alpha)}$$

also mit Hinzuziehung der Formel 1):

$$2) \ldots D = \frac{h \sin(\beta-\alpha)}{\cos\gamma \sin(\beta+\gamma+\delta-\alpha)}$$

Nun ist im Dreieck $AO'C$:

$$OC = h_c - h_A = \frac{D}{\sin(90-\delta)} = \frac{D}{\cos\delta}$$

so dass also:

$$h_c = h_A + \frac{h \sin(\beta-\alpha)}{\cos\delta \cos\gamma \sin(\beta+\gamma+\delta-\alpha)}$$

sein wird.

**Bemerkung.** Statt $D$ könnte man auch aus dem Dreieck $ABC$ die Seite $E$ und mit dieser die Seite $O''C$ aus dem Dreieck $BO''C$ berechnen. Dann erhält man:

$$h_c - h_B = O''C$$

und somit:

$$h_c = h_B + O''C$$

Diese zweite Berechnungsart dient zur Kontrolle, man beachte daher, dass in der Lösung vorausgesetzt wird, dass alle drei Punkte $A$, $B$, $C$ in einer und derselben vertikalen Ebene liegen.

---

**Aufgabe 41.** Um die absolute Höhe des Standpunktes $D$ zu bestimmen, wurden zu drei Punkten $A$, $B$, $C$ die Zenithdistanzen:

$$\sphericalangle ZDC = \gamma$$
$$\sphericalangle ZDB = \beta$$
$$\sphericalangle ZDA = \alpha$$

gemessen. Die Entfernungen der Punkte sind unbekannt, man kennt aber ihre absoluten Höhen:

$$h_A \quad h_B \quad h_C$$

Man soll $h_D$ hieraus berechnen.

**Bemerkung.** Diese Aufgabe ist ein Analogon des Pothenotschen Problems der Koordinatenaufnahme.

**Erkl. 77.** Es ist im Dreieck $DCC'$ $CD = m$, $DC' = h_D - h_C$, $\sphericalangle CDC' = 180^0 - \gamma$ also:

$$\cos(180^0-\gamma) = \frac{h_D - h_C}{m}$$

woraus:

$$m = -\frac{h_D - h_C}{\cos\gamma}$$

folgt. Das Vorzeichen von $m$ ist ohne Bedeutung.

**Auflösung.** Es ändert an dem Problem nichts, wenn wir uns alle drei Punkte $A$, $B$, $C$ in einer Ebene denken (vergleiche Figur 113). Sei sodann:

$$ZDC = \gamma \qquad CZD = \psi$$
$$ZDB = \beta \qquad AOD = \varphi$$
$$ZDA = \alpha$$

Wir haben (vergleiche Erkl. 77):

$$1) \ldots \begin{cases} DC = m = (h_D - h_C) : \cos\gamma \\ DB = n = (h_D - h_B) : \cos\beta \\ DA = p = (h_D - h_A) : \cos\alpha \end{cases}$$

Ferner ist analog:

$$2) \ldots \begin{cases} BC = (h_C - h_B) : \cos\psi \\ AB = (h_B - h_B) : \cos\varphi \end{cases}$$

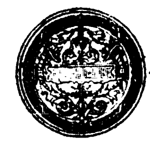
Nun haben wir im Dreieck $BCD$:

$$3) \ldots \begin{cases} m = BC \cdot \dfrac{\sin(\psi+\beta)}{\sin(\beta-\gamma)} \\ n = BC \cdot \dfrac{\sin(\psi+\gamma)}{\sin(\beta-\gamma)} \end{cases}$$

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

1326. Heft. | Preis des Heftes 25 Pf. | Vermessungskunde (Geodäsie). Zweiter Teil. Forts. v. Heft 1325. — Seite 113—128. Mit 21 Figuren.





# Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

**viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,**

aus allen Zweigen

der **Rechenkunst,** der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — **aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie;** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's;** der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

**zum einzig richtigen und erfolgreichen**

**Studium,** zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

**Dr. Adolph Kleyer,**

Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

# Vermessungskunde

## (Geodäsie).

**Zweiter Teil.**

Nach **System Kleyer** bearbeitet von **Dr. W. Láska.**

Fortsetzung von Heft 1325. — Seite 113—128. Mit 21 Figuren.

**Inhalt:**

Aufgaben über trigonometrische Höhenmessung. — Verschiedene Höhenmessinstrumente. — Der Universal-spiegeldiopter von L. Tesdorpf in Stuttgart. — Der Gefällmesser. — Barometrische Höhenmessung. — Theorie und Gebrauch des Barometers. — Beschreibung einiger Barometer. — Quecksilberbarometer. — Die Aneroide.

**Stuttgart 1894.**

Verlag von Julius Maier.

**Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.**

# PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form,** mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann **auch alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

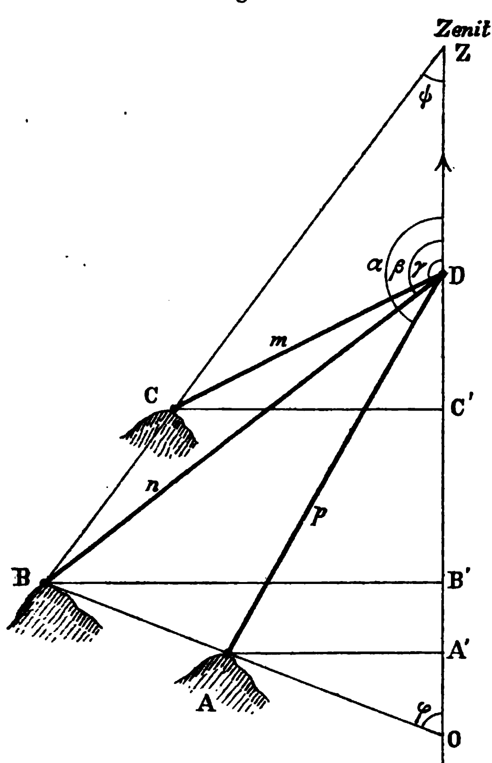
Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. **Kleyer,** Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

**Stuttgart.** **Die Verlagshandlung.**

Figur 113.




**Erkl. 78.** Es ist:

$\sphericalangle DBZ = 180^0 - \psi - \beta$

$\sphericalangle CDB = \beta - \gamma$

$\sphericalangle BCD = \gamma + \psi$

analog ist:

$\sphericalangle DBA = 180^0 - \varphi - (180^0 - \beta)$

$\sphericalangle BDA = \alpha - \beta$

$\sphericalangle BAD = \varphi + (180^0 - \alpha)$

**Erkl. 79.**

$$\frac{\sin(\psi+\gamma)}{\cos\psi} = \frac{\sin\psi\cos\gamma + \cos\psi\sin\gamma}{\cos\psi}$$

$$= \frac{\sin\psi}{\cos\psi}\cos\gamma + \sin\gamma$$

$$= \operatorname{tg}\psi\cos\gamma + \sin\gamma = y\cos\gamma + \sin\gamma$$

analog sind die übrigen Glieder zu entwickeln.

analog ist im Dreieck $BAD$:

$$4) \ldots \begin{cases} n = AB \cdot \dfrac{\sin(\varphi-\alpha)}{\sin(\alpha-\beta)} \\ p = AB \cdot \dfrac{\sin(\beta-\varphi)}{\sin(\alpha-\beta)} \end{cases}$$

Verbindet man die Werte für $m$ und $p$ aus den Gleichungen 1), 2) und 3), so folgt:

$$m = \frac{h_D - h_C}{\cos\gamma} = \frac{h_C - h_B}{\cos\psi} \cdot \frac{\sin(\psi+\beta)}{\sin(\beta-\gamma)}$$

$$p = \frac{h_D - h_A}{\cos\alpha} = \frac{h_B - h_A}{\cos\varphi} \cdot \frac{\sin(\beta-\varphi)}{\sin(\alpha-\beta)}$$

Diese Gleichungen lassen sich vereinfachen. Setzt man:

$$M = \frac{h_C - h_B}{\sin(\beta-\gamma)}\cos\gamma \quad N = \frac{h_B - h_A}{\sin(\alpha-\beta)}\cos\alpha$$

so folgt:

$$\text{I} \ldots h_D - h_C = M\frac{\sin(\psi+\beta)}{\cos\psi}$$

$$\text{II} \ldots h_D - h_A = N\frac{\sin(\beta-\varphi)}{\cos\varphi}$$

ferner folgt aus Gleich. 3) und 4):

$$n = \frac{h_C - h_B}{\cos\psi} \cdot \frac{\sin(\psi+\gamma)}{\sin(\beta-\gamma)}$$

$$= \frac{h_B - h_A}{\cos\varphi} \cdot \frac{\sin(\varphi-\alpha)}{\sin(\alpha-\beta)}$$

oder:

$$\text{III} \ldots \frac{M}{\cos\gamma} \cdot \frac{\sin(\psi+\gamma)}{\cos\psi}$$

$$= \frac{N}{\cos\alpha} \cdot \frac{\sin(\varphi-\alpha)}{\cos\varphi}$$

Die drei Gleichungen I, II, III enthalten die Lösung des Problems. Aus ihnen sind die Unbekannten:

$$\varphi, \quad \psi, \quad h_D$$

zu bestimmen. Aus I und II folgt:

$$\text{IV} \ldots h_C + M\frac{\sin(\psi+\beta)}{\cos\psi}$$

$$= h_A + N\frac{\sin(\beta-\varphi)}{\cos\varphi}$$

Setzt man:

$$\operatorname{tg}\varphi = x$$

$$\operatorname{tg}\psi = y$$

so wird (vergl. Erkl. 79):

$$\text{III}' \ldots \frac{M}{\cos\gamma}(y\cos\gamma + \sin\gamma) = \frac{N}{\cos\alpha}(\sin\alpha - x\cos\alpha)$$

und weiter:

$$\text{IV}' \ldots h_C + M(y\cos\beta + \sin\beta) = h_A + N(\sin\beta - x\cos\beta)$$

Ordnet man die Gl. III' und IV' wie folgt:

$$y \cdot M - x \cdot N = N \cdot \operatorname{tg}\alpha + M \cdot \operatorname{tg}\gamma$$

$$yM + xN = \frac{1}{\cos\beta}[h_A - h_C + (N - M)\sin\beta]$$

so folgt sofort:

$$y = \frac{1}{2M}\left[\frac{h_A - h_C}{\cos\beta} + N(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) + M(\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\beta)\right]$$

$$x = \frac{1}{2N}\left[\frac{h_A - h_C}{\cos\beta} + N(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha) + M(\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\beta)\right]$$

Führt man noch für die Summen und Differenzen der Tangenten logarithmische Formeln ein, so folgt:

$$y = \frac{1}{2M\cos\beta}\left[h_A - h_C + N\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha} + M\frac{\sin(\gamma-\beta)}{\cos\gamma}\right]$$

$$x = \frac{1}{2N\cos\beta}\left[h_A - h_C + N\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\cos\alpha} + M\frac{\sin(\gamma+\beta)}{\cos\gamma}\right]$$

Nun ist aber:

$$M\frac{\sin(\gamma-\beta)}{\cos\gamma}\quad h_A - h_C$$

$$N\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\cos\alpha}\quad h_A - h_C$$

also wird:

$$y = \frac{1}{2M\cos\beta}\left[h_A - 2h_C + h_B + N\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha}\right]$$

$$x = \frac{1}{2N\cos\beta}\left[h_A - 2h_C + h_B + M\frac{\sin(\gamma+\beta)}{\cos\gamma}\right]$$

Dadurch haben wir nicht nur einfache, sondern auch elegante Formeln für die Lösung unseres Problems gewonnen.

---

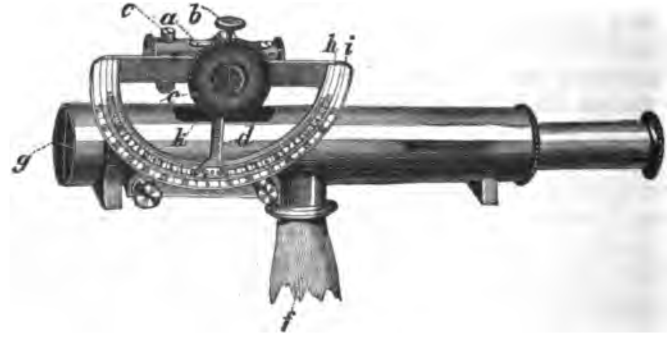
## 4. Verschiedene Höhenmessinstrumente.

**Anmerkung 7.** Im folgenden beschreiben wir einige neuere Apparate, die besonders für forstliche Vermessungen und Strassenbau bestimmt sind.

### a) Der Universalspiegeldiopter von L. Tesdorpf in Stuttgart.

Das zum Gefäll- und Baumhöhenmessen dienende Visierrohr (siehe Figur 114), das nicht mit Okular- und Objektivgläsern versehen und also kein Fernrohr ist, besitzt am Objektivende einen Kreuzfaden $g$ und einen Okularauszug.

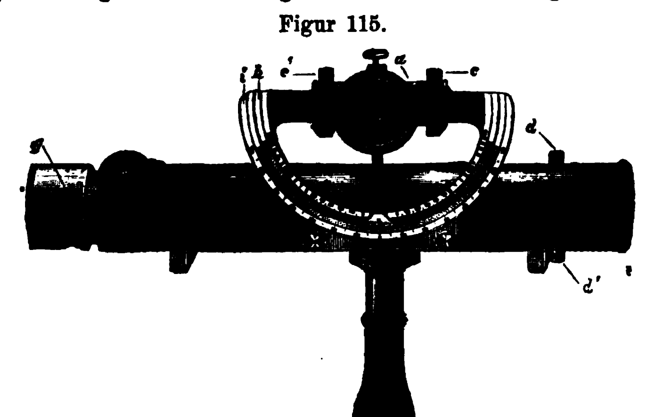
Figur 114.




Spiegeldiopterinstrument mit $^1/_1{}^0$ und $^0/_0$ Teilung.

Das Rohr trägt zur Seite einen Höhenkreis bezw. Halbkreis, der mit zwei Schrauben befestigt ist und an welchem (durch den Kopf *e* drehbar) die Libelle *a* angebracht ist, mit welcher sich gleichzeitig der zur Teilung des Höhenkreises herabgehende Zeiger *d* bewegt.

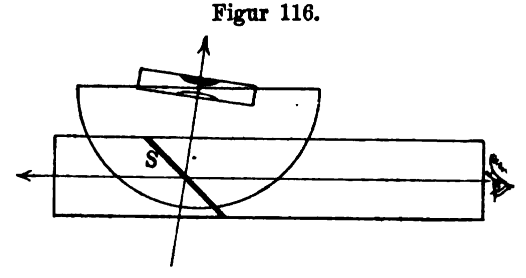
Figur 115.



Spiegelprozentgefällmesser mit 12fach vergrösserndem Fernrohr, anstatt der Diopter.

Das metallene Gehäuse der Libelle (siehe Figur 115) ist auch an der unteren Seite durchbrochen, ebenso hat das Visierrohr selbst unmittelbar unter der Libelle eine der Länge und Form des durchscheinenden Teils der Libelle entsprechende Oeffnung, in welcher unter einem Winkel von 45° (die linke Hälfte des Rohrs einnehmend) ein Metallspiegel *S* angebracht ist, der beim Durchsehen durch das Visierrohr das Bild der Luftblase der Libelle gegen das Auge des Beobachtenden wirft und somit während des Visierens nach einem Gegenstand gleichzeitig die Beobachtung des Standes der Libelle ermöglicht (siehe Figur 116).

Figur 116.




Auf dem Metallspiegel ist genau in der Ebene des Horizontalfadens (am Objektivende des Visierrohrs) ein dunkler horizontaler Strich angebracht, der die Verlängerung der rechten Hälfte des Horizontalfadens zu bilden scheint, so dass man beim Visieren den Horizontalfaden ganz zu sehen glaubt, während man in Wirklichkeit nur die rechte Hälfte des Fadens sieht. Wenn nun das Bild der Luftblase der Libelle von dem Strich am Spiegel (scheinbar von dem Horizontalfaden) in der Mitte geschnitten wird, so ist die Blase in der Mitte der Libelle und es nimmt somit die Libelle eine horizontale Lage ein. Sieht man durch das Rohr und bewegt dasselbe leicht auf und ab, so scheint die Luftblase der Libelle vorn am Vertikalfaden auf- und abzugleiten, und es ist sehr leicht, die Libelle mit dem Knopf *e* so zu drehen, oder wenn sie auf eine bestimmte Zahl des Höhenkreis fest eingestellt ist, das Rohr in eine solche zu bringen, dass das Bild der Luftblase, welches vorne zu schweben scheint, von dem Horizontalfaden (in Wirklichkeit von dem Strich am Spiegel) in der Mitte geschnitten wird.

Hält man also das Instrument in der rechten Hand und visiert beispielsweise gegen die Spitze eines Baumes, so kann man während des Visierens den Knopf *e* mit der linken Hand ganz leicht so drehen, dass beim Visieren nach der Baumspitze die Luftblase durch die Linie am Spiegel, scheinbar durch den Horizontalfaden, in der Mitte geschnitten wird. Der mit der Libelle sich bewegende Zeiger gibt sodann an, welchen Winkel die Visierlinie mit dem Horizont in der Augenhöhe des Beobachtenden bildet.

Der Höhenbogen ist mit einer Prozentteilung versehen, in der Weise, dass vom Nullpunkt des Höhenkreises, welcher den Horizontalstand der Visierlinie anzeigt, nach rechts und links je bis zu 50 Prozent die einzelnen Prozente, von 50—100 je 2 Prozent und von 100—200 je 5 Prozent durch einen Teilstrich bezeichnet sind.

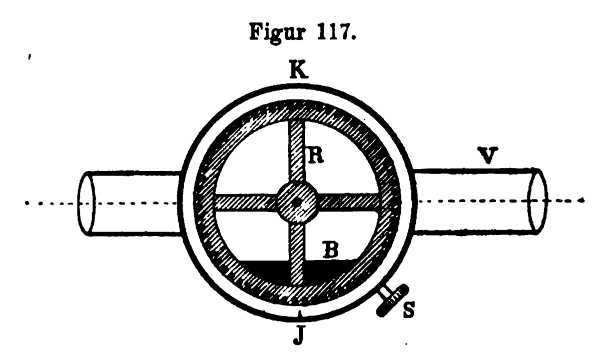
Es bedarf kaum der Bemerkung, dass die Prozentteilung für den praktischen Gebrauch des Instruments im Walde überaus bequem ist, möge es sich um die Ermittelung der Höhe eines Baumes oder um die Tracierung einer Weglinie handeln.

Bei der Baumhöhenmessung ist mit der Zahl der Prozente einfach die Standlinie zu multiplizieren, um den Höhenunterschied zwischen dem Horizont des Beobachtenden und der Baumspitze zu finden. In gleicher Weise kann die Steigung oder das Gefäll eines Weges, Grabens, mit dem Instrument einfach in der Art ermittelt werden, dass man sich an passender Stelle einen Stab, dessen Länge der eigenen Augenhöhe gleich gemacht wird, senkrecht halten und gegen das obere Ende desselben visierend, die Luftblase einspielen lässt. Die Teilung gibt dann die Steigung oder das Gefälle unmittelbar in Prozenten an. Bei der Tracierung einer Weglinie mit gegebener Steigung oder gegebenem Gefäll wird der Zeiger auf den Teilstrich der betreffenden Prozentzahl eingestellt und es erhält die Visierlinie bei der Horizontaleinstellung der Libelle sofort die gewünschte Richtung nach oben und unten. Um hiebei eine Verrückung der Zeigerstellung während der Arbeit zu verhüten, ist über der Achse, welche den Knopf *e* und die Libelle verbindet und die auch den Zeiger trägt, eine Bremsschraube angebracht, welche den Zeiger mit Hilfe eines passenden Zwischenstücks arretiert.

## b) Die Gefällmesser.

Das Prinzip aller dieser Instrumente, die in verschiedenster Ausführung in den Handel kommen, dürfte sich am besten an der nebenstehenden schematischen Figur 117 erklären lassen. In einer mit einer Visiervorrichtung *V* fest verbundenen Kapsel *K* schwingt frei ein Rad *R*, welches eine Grad- oder Prozentteilung besitzt. Mit der Schraube *S* kann die freie Bewegung des letzteren aufgehoben werden.

Figur 117.




Ein Teil des Rades (*B* in der Figur 117) ist mit Blei ausgefüllt, so dass das Rad bei freier Beweglichkeit stets eine und dieselbe Lage gegen die Horizontale annimmt. Ist das Rad frei (d. h. die Schraube *S* offen) und dreht man die Visur um eine horizontale Achse, dann gehen an dem Indexstrich *J* der Hüllenkapsel die einzelnen Grade der Teilung vorüber. Der Gebrauch ist einfach. Man visiert den Gegenstand (etwa eine Baumspitze) bei offener Schraube *S* an, klemmt diese sodann vorsichtig fest und liest den Höhenwinkel am Index *J* ab. Die zu erreichende Genauigkeit schwankt bei diesen Instrumenten zwischen $0^0{,}1$ und $0^0{,}2$.

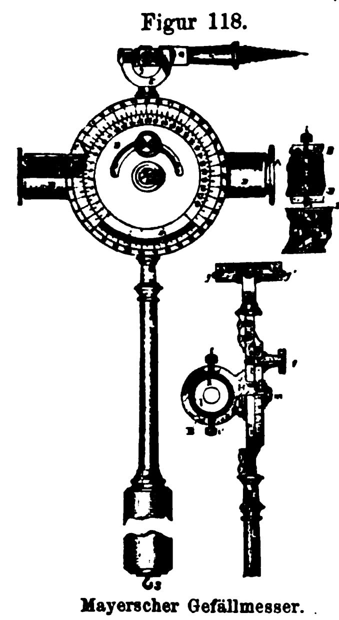
Auf diesem Prinzip ist der von Tesdorpf in Stuttgart gebaute Mayersche Gefällmesser mit kleinem Fernrohr zum Vor- und Rückwärtsvisieren eingerichtet, welchen wir in der Figur 118 zur Abbildung bringen.

Zu den Gefällmessern gehört füglich auch der grosse Prozentgefällmesser nach Professor Bohn. Die Figur 119 gibt ein solches Instrument in der von L. Tesdorpf in Stuttgart gebauten Form.

Das Instrument besitzt zwei Libellen *C* und *N* in der Figur 119, die eine genaue Horizontalstellung ermöglichen. $a\,a'\,a''$ und $b\,b'\,b''$ sind Visiere. *L* ist ein Massstab, an welchem mittelst des beweglichen Diopterschiebers mit Nonius die 0,1 Prozente der Steigung unmittelbar eingestellt resp. abgelesen werden könnnen.

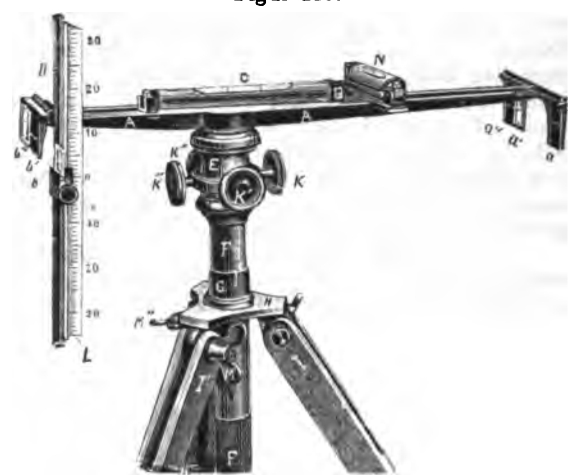
Als ein einfacheres Pendelinstrument kann der von K. Scheurer (C. Sickler in Karlsruhe in Baden) Sicklersche Gefällmesser angesehen werden (vergl. Figur 120).

Figur 118.



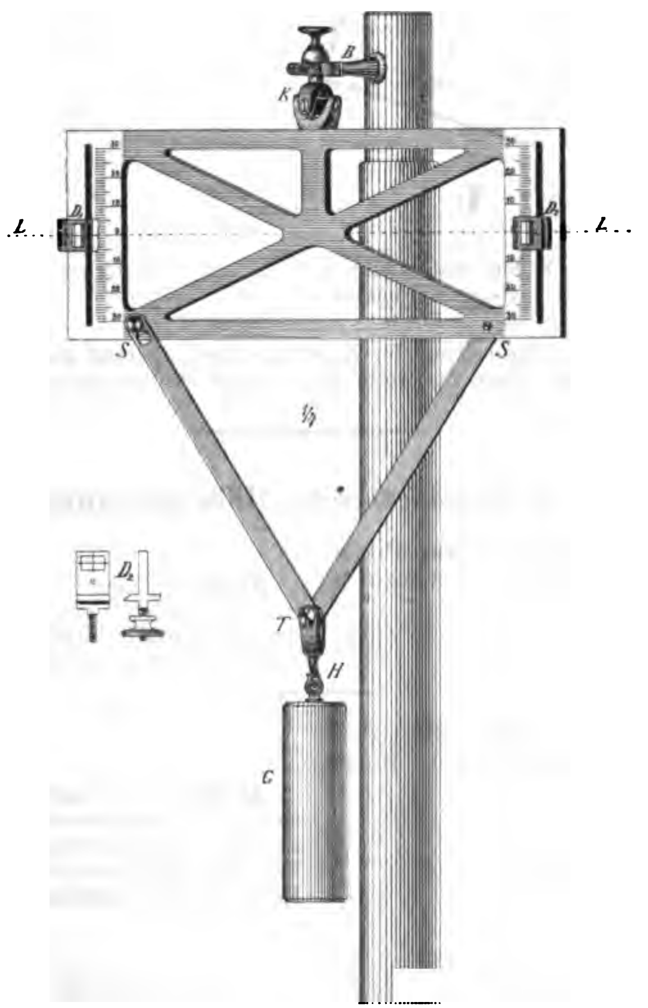
Mayerscher Gefällmesser.

Figur 119.



Prozent-Gefällmesser von Prof. Bohn.

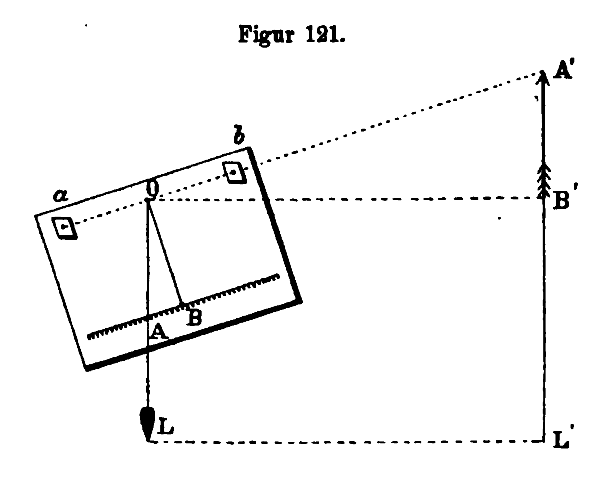
Figur 120.



Derselbe besteht aus einer rechteckigen durchbrochenen Metallplatte, welche in einem Kugelgelenk aufgehängt, unten mit einem Senkel versehen, sich stets genau lotrecht stellt. In den senkrechten Schlitzen der Platte befinden sich zwei verschiebbare Diopter $D_1 D_2$, welche man mittels ihrer Indexstriche an der dabei befindlichen Teilung einstellen kann. Da jeder einzelne Teil der Teilung genau 0,005 der Entfernung der beiden Diopter voneinander beträgt, kann man das Gefälle direkt an der Teilung ablesen. Wenn beide Diopter auf 0 stehen, steht alles, was anvisiert wird, im Niveau. Schiebt man das Okulardiopter hinauf auf 5, so fällt die anvisierte Linie um 5 Prozent. Verschiebung des einen Diopter um einen Teilstrich weiter als das andere, verändert das Gefäll um 0,5 Prozent. Die Diopter sind zum Vor- und Rückwärtsvisieren eingerichtet. Für genauere Arbeiten lässt sich 0,1 Prozent noch leicht schätzen.

Hieher sind endlich auch die in früherer Zeit oft gebrauchten Dendrometer zu rechnen. Auf einem Brettchen sind zwei Visiere $a$, $b$ (vergl. Figur 121) angebracht und in deren Mitte vom Punkte $O$ ein Lot $L$ am Faden befestigt.

Figur 121.




Sei $OL = l$ die Fadenlänge, sowie $OB = 1$, $AB = m$, ferner die Distanz $OB' = d$, dann ist die Höhe des anvisierten Punktes $A'$:

$$L'A' = h = l + d \cdot m$$

Wird also $m$ an der Teilung der Tafel abgelesen, $d$ direkt gemessen, so lässt sich hieraus leicht $h$ finden. Dass die Genauigkeit dieser Instrumente nur eine sehr geringe sein kann, ist klar.

## 5. Barometrische Höhenmessung.

**Frage 105.** Auf welchem Prinzip beruht die barometrische Höhenmessung?

**Antwort.** Die barometrische Höhenmessung gründet sich auf die Thatsache, dass der Luftdruck mit der Höhe abnimmt, denn die Luft ist schwer.

**Frage 106.** Wie lautet die Grundgleichung der barometrischen Höhenmessung?

**Antwort.** Die Grundgleichung der barometrischen Höhenmessung besagt, dass bei konstanter Temperatur die logarithmische Zu- oder Abnahme des Luftdruckes, der Höhenab- oder -zunahme proportional ist.

**Erkl. 80.** Unter logarithmischer Zu- oder Abnahme einer Grösse $p$ versteht man den Ausdruck:

$$\pm \frac{\Delta p}{p}$$

wobei $\pm \Delta p$ den Betrag der einfachen Zu- oder Abnahme darstellt.

Man kann also schreiben, wenn $p$ den Luftdruck und $H$ die Höhe bezeichnet:

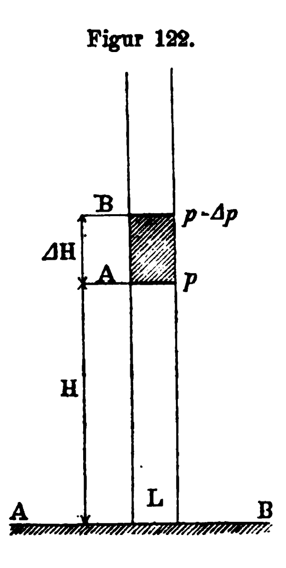
$$\frac{\Delta p}{p} = -k \Delta H$$

$\Delta p$ und $\Delta H$ drücken die Ab- oder Zunahme der Grössen $p$ resp. $H$ aus, $k$ ist ein Koëffizient, der wesentlich von der Temperatur abhängt.

---

**Frage 107.** Wie wird die barometrische Grundgleichung abgeleitet?

Figur 122.




**Antwort.** Um die barometrische Grundgleichung abzuleiten, stellen wir folgende Ueberlegung an:

Es sei $p$ der Luftdruck in der Höhe $H$ bei einer Luftsäule ($L$ in der Figur 122) mit dem Querschnitt $= 1$.

In der Höhe $H + \Delta H$ wird offenbar $p$ kleiner, also etwa gleich $p - \Delta p$. Und zwar wird der Luftdruck in $B$ und das Gewicht der zwischen $A$ und $B$ befindlichen Luftsäule kleiner. Das Volumen dieses Cylinders ist offenbar gleich $1 \times \Delta H = \Delta H$, denn der Querschnitt hat die Fläche $= 1$. Seine Masse wird gleich sein:

$$\varrho \Delta H$$

wo $\varrho$ die Luftdichte bezeichnet und sein Gewicht ist gleich:

$$g \varrho \Delta H$$

wobei $g$ die Beschleunigung der Schwere bedeutet. Wir haben also:

$$\Delta p = -g \varrho \Delta H$$

Nun ändert sich die Dichte eines Gases nach dem Mariottschen Gesetze proportional dem Drucke, also ist:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\varrho}{\varrho_0}$$

wobei $p_0 \varrho_0$ irgend einen Zustand bezeichnen. Wir haben also:

$$\varrho = p \cdot \frac{\varrho_0}{p_0}$$

und demzufolge:

$$\Delta p = -g \frac{\varrho_0}{p_0} \cdot p \Delta H$$

oder:

$$\frac{\Delta p}{p} = -g \frac{\varrho_0}{p_0} \cdot \Delta H$$

**Erkl. 81.** Das Mariottsche Gesetz besagt, dass sich das Volumen $v$ eines Gases bei konstanter Temperatur umgekehrt proportional dem Druck $p$ ändert, die Dichte $\varrho$ ändert sich demnach proportional dem Druck. Wir haben also für zwei Zustände $A$ und $B$:

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{p_B}{p_A} = \frac{\varrho_B}{\varrho_A}$$

**Bemerkung.** Die nebenstehende Formel gilt zufolge des Mariottschen Gesetzes nur für konstante Temperatur.

---

**Frage 108.** Wie wird die Temperaturänderung berücksichtigt?

**Antwort.** Um den Einfluss der Temperatur zu berücksichtigen, haben wir nun nach dem Gay-Lussacschen Gesetz die rechte Seite der Gleichung mit:

**Erkl. 82.** Das Gay-Lussacsche Gesetz besagt, dass bei konstantem Druck die Volumänderung der Temperatur proportional ist. Ist also $v_0$ das Volumen für die Temperatur $= 0$, sowie $v$ das Volumen für die Temperatur $t$, so wird:

$$v = v_0 (1 + \varepsilon t)$$

Der Koëffizient $\varepsilon$ ist für alle permanenten Gase nahezu konstant.

Nun ändert sich nach dem Mariottschen Gesetze die Dichte umgekehrt wie das Volumen, darum schreiben wir:

$$\frac{1}{1+\varepsilon t}$$

und nicht einfach:

$$1 + \varepsilon t$$

$$\frac{1}{1+\varepsilon t}$$

wo

$$\varepsilon = \frac{1}{273} = 1 \cdot 003665$$

bezeichnet und $t$ die betreffende im Luftcylinder $AB$ herrschende Temperatur darstellt, zu multiplizieren.

Unsere vollständige Formel wird also lauten:

$$\text{I} \ldots \frac{\Delta p}{p} = -g \frac{\varrho_0}{p_0} \frac{\Delta H}{1+\varepsilon t}$$

Das eine möge noch hervorgehoben werden, dass die vorliegende Formel eine Differentialformel ist, dass also $\Delta H$ nicht den Höhenunterschied, sondern die Höhenzunahme bezeichnet. Der Höhenunterschied zweier Orte ist nämlich:

$$\text{II} \ldots H_B - H_A = \int_A^B \Delta H$$

---

## Frage 109. Wie wird die Höhenformel erhalten?

**Antwort.** Setzt man in die Gleichung II der vorhergehenden Frage den Ausdruck für $\Delta H$ aus der Gleichung I ein, also:

$$\Delta H = -\frac{\Delta p}{p} \cdot \frac{p_0}{\varrho_0} \cdot g \cdot (1 + \varepsilon t)$$

so folgt:

$$H_B - H_A = -\frac{p_0}{\varrho_0} g \int_A^B \frac{dp}{p} (1 + \varepsilon t)$$

Erlaubt man sich hier noch eine mittlere Temperatur, also etwa:

$$1 + \varepsilon \cdot \frac{t_A + t_B}{2}$$

als Konstante einzuführen, so kann man offenbar schreiben:

$$H_B - H_A = -\frac{p_0}{\varrho_0} g \left(1 + \varepsilon \frac{t_A + t_B}{2}\right) \int_A^B \frac{dp}{p}$$

Nun ist aber:

$$\int_A^B \frac{dp}{p} = \log \frac{p_B}{p_A}$$

also wird:

$$\text{III} \ldots H_B - H_A = \frac{p_0}{\varrho_0} g \left(1 + \varepsilon \frac{t_A + t_B}{2}\right) \log \frac{p_A}{p_B}$$

**Bemerkung.** Streng genommen ist das Integral:

$$\int_A^B \frac{dp}{p} (1 + \varepsilon t) = \sum_A^B \frac{dp_k}{p_k} (1 + \varepsilon t_k)$$

also gleich der Summe aller Elementarteile von

$$\frac{dp_k}{p_k} (1 + \varepsilon t_k)$$

Um die Integration ausführen zu können, haben wir für die einzelnen:

$$1 + \varepsilon t_k$$

einen Mittelwert eingeführt.

Dadurch ist unsere Formel minder streng geworden.

**Bemerkung.** Wir haben in der nebenstehenden Betrachtung den Wert $g$ als konstant angesehen. Nun ist aber für die geographische Breite $\varphi$ und die Meereshöhe $H$ der Wert von $g$ gleich:

$$g = g_0 (1 + 0 \cdot 00531 \sin^2 \varphi) \left(1 + \frac{2H}{R}\right)$$

wobei:

$$g_0 = 9 \cdot 780 \text{ m}$$

und $R = 6370000$ m

zu setzen ist. $R$ ist der Erdradius. Ferner wird noch der Luftdruck durch die Luftfeuchtigkeit geändert, welche auch eine kleine Korrektion bedingt.

**Bemerkung.** Man hat für die vollständige barometrische Formel Tafeln entworfen. Solche sind u. a. von Jordan, Neumaier, Mathieu publiziert worden.

Benützen wir die gewöhnlichen Logarithmen, so können wir, da allgemein:

$$\log x = \frac{1}{M} \log x$$

wo

$$M = 0{\cdot}434295$$

der Modul der Briggschen Logarithmen ist, indem wir:

$$\frac{1}{M} \frac{p_0}{\varrho_0} g = k = 18464$$

setzen, die Höhenformel auch so schreiben:

$$\text{III}' \ldots H_A - H_B = 18464 \left(1 + \frac{t_A + t_B}{546}\right) \log \frac{p_A}{p_B}$$

Werden noch ausserdem die genaueren Werte für $g$ eingesetzt und auch der Einfluss der Luftfeuchtigkeit berücksichtigt, so ergibt sich nachstehende:

vollständige Formel für die Barometer-Höhenmessung:

$$\Delta h = 18400 \log \frac{p_A}{p_B} (1 + 0{\cdot}003665\, t) \left(1 + 0{\cdot}377 \frac{e}{(p)}\right) (1 + 0{\cdot}00265 \cos 2\varphi) \left(1 + 2 \frac{H}{r}\right)$$

dabei ist:

$$\Delta h = h_B - h_A$$

$$t = \frac{1}{2} (t_A + t_B)$$

$$H = \frac{1}{2} (h_A + h_B) \text{ (genähert)}$$

$$(p) = \frac{1}{2} (p_A + p_B)$$

$$e = \text{Dunstdruck}$$

$$r = 6{\cdot}370{\cdot}000$$

**Bemerkung.** Für $e$ kann ein Näherungswert aus:

$$e = 3{,}6 + 0{\cdot}45\, t$$

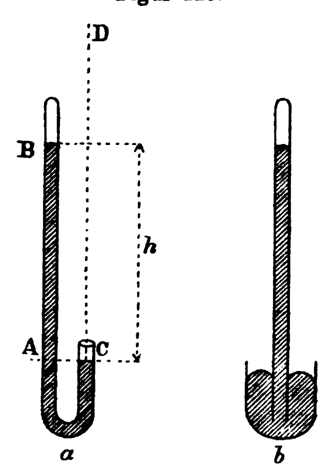
($t$ die Lufttemperatur in Celsius, $e$ der Dunstdruck in Millimeter) berechnet werden.

---

## 6. Theorie und Gebrauch des Barometers.

**Frage 110.** Was ist ein Barometer?

Figur 128.




**Antwort.** Das Barometer ist ein physikalisches Instrument, welches zur Messung der Grösse des Luftdruckes dient und auf dem Prinzip der kommunizierenden Röhren beruht.

Es besteht im Princip aus einem $U$-förmig gebogenen Rohr, dessen eines Ende offen, das andere aber zugeschmolzen ist. Dieses Rohr ist mit Quecksilber gefüllt, jedoch so, dass der Raum am zugeschmolzenen Ende ganz luftleer bleibt.

Nach dem Prinzip der kommunizierenden Röhren ist dann das Gewicht der über dem Querschnitt $A$ stehenden Quecksilbersäule $AB$ gleich dem Gewicht der über dem Querschnitt $C$ liegenden Luftsäule (vergleiche Figur 123).

**Bemerkung.** Die Figur 123 stellt die zwei am gewöhnlichsten angewandten Barometerformen dar und zwar wird a) das Heberbarometer und b) das Gefässbarometer genannt.

---

**Frage 111.** Was versteht man unter dem Barometerstand?

**Antwort.** Unter dem Barometerstand versteht man die Höhe der Quecksilbersäule eines fehlerfreien Barometers.

---

**Frage 112.** Wann ist ein Barometer fehlerfrei?

**Bemerkung.** Der gröbste Fehler bei der Messung der Barometerstände kann durch die in den luftleeren Raum eingedrungene Luft entstehen.

Selbst bei sehr genau gearbeiteten Barometern findet man oft mikroskopisch kleine Luftblasen an den Wänden des Glasrohres. Um sich zu überzeugen, ob die Luft in den zugeschmolzenen Raum eingedrungen ist, neige man das Barometer, bis sich die ganze zugeschmolzene Röhre mit Quecksilber füllt. Ist Luft in der Röhre, so wird sich oben eine kleine Luftblase zeigen.

**Antwort.** Soll ein Barometer fehlerfrei genannt werden, so müssen nachstehende Bedingungen erfüllt sein:

1) Das Quecksilber muss chemisch rein sein.

2) Der Raum im zugeschmolzenen Arme muss vollkommen luftleer sein.

3) Das Glasrohr soll innen vollkommen sein.

4) Der Querschnitt darf nicht zu klein sein, sonst entstünde eine Kapillardepression.

5) Bei der Beobachtung muss das Instrument senkrecht stehen.

6) Die Ablesungsskalen sollen richtig geteilt sein.

---

**Frage 113.** Zeigt ein allen in der vorhergehenden Frage angeführten Bedingungen genügendes Barometer den richtigen Stand?

**Bemerkung.** Je wärmer das Quecksilber ist, desto grösseren Raum nimmt es ein und desto höher wird auch die Quecksilbersäule, ohne dabei auch schwerer zu sein. Denkt man sich den Luftdruck ungeändert, so würde das Barometer bei grösserer Wärme steigen, bei kleinerer fallen.

**Antwort.** Sind alle angeführten Bedingungen erfüllt, so wird im allgemeinen der abgelesene Barometerstand nicht der richtige. Nachdem man die Abhängigkeit der Quecksilbersäule von der Wärme kennen gelernt hat, ist man übereingekommen jenen Barometerstand als normalen zu betrachten, der der Temperatur 0° Celsius entpricht. Es muss daher ein jeder bei einer anderen Temperatur abgelesener Barometerstand auf Null reduziert werden. Zu diesem Zwecke befindet sich gewöhnlich nahe beim Glasrohr ein Thermometer, dessen Ablesung man „Thermometer am Barometer“ zu nennen pflegt.

---

**Frage 114.** Wie wird der Barometerstand auf Null reduziert?

**Antwort.** Um das Barometer auf Null zu reduzieren, bedient man sich einer eigenen Tafel. Die Korrektion ist negativ bei einer Temperatur über Null und positiv bei einer Temperatur unter Null. Der Gebrauch der nachstehenden Tafel wird an folgenden Beispielen klar:

| | | |
|---|---|---|
| Thermometer am Barometer | + 10° | — 10° |
| Abgelesene Höhe | 755° 0 | 755° 0 |
| Reduktion auf 0° | — 1·2 | + 1·2 |
| Auf 0° reduzierter Stand | 753·8 | 756·2 |

Tafel für Reduktion auf 0°.

| Temperatur | Barometerstand | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 660 | 680 | 700 | 720 | 740 | 760 | 780 | 800 |
| 0 | 0·0 | 0·0 | 0·0 | 0·0 | 0·0 | 0·0 | 0·0 | 0·0 |
| 5 | 0·5 | 0·6 | 0·6 | 0·6 | 0·6 | 0·6 | 0·6 | 0·7 |
| 10 | 1·1 | 1·1 | 1·1 | 1·2 | 1·2 | 1·2 | 1·3 | 1·3 |
| 15 | 1·6 | 1·7 | 1·7 | 1·7 | 1·8 | 1·8 | 1·9 | 1·9 |
| 20 | 2·1 | 2·2 | 2·3 | 2·3 | 2·4 | 2·5 | 2·5 | 2·6 |
| 25 | 2·7 | 2·7 | 2·8 | 2·9 | 3·0 | 3·1 | 3·2 | 3·2 |
| 30 | 3·2 | 3·3 | 3·4 | 3·5 | 3·6 | 3·7 | 3·8 | 3·9 |

**Frage 115.** Was versteht man unter der barometrischen Stufe?

**Antwort.** Unter der barometrischen Stufe versteht man die in Metern ausgedrückte Höhe einer Luftsäule, deren Druck einen Millimeter ausmacht. Man kann also sagen: Der Höhenunterschied (in Meter) zweier Orte ist genähert gleich der Differenz der Barometerstände (ausgedrückt in Millimetern) multipliziert mit der barometrischen Stufe.

Hat man so z. B. für zwei Orte *A* und *B* eine Barometerstanddifferenz gleich 12·5 mm bei einer Temperatur von + 10° Celsius und dem Stande 740 mm gefunden, so ist der Höhenunterschied gleich:

140 m

**Hilfsrechnung:**

12·5 × 11·2
125
250
140·00

Tafel der barometrischen Stufen.

| Luftdruck | Temperatur | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | + 30° | + 20 | + 10 | + 0 | — 10 | — 20 | — 30 |
| 780 | 11·5 | 11·1 | 10·7 | 10·2 | 9·8 | 9·4 | 9·0 |
| 770 | 11·6 | 11·2 | 10·8 | 10·4 | 10·0 | 9·5 | 9·1 |
| 760 | 11·8 | 11·4 | 10·9 | 10·5 | 10·1 | 9·7 | 9·3 |
| 750 | 11·9 | 11·5 | 11·1 | 10·7 | 10·2 | 9·8 | 9·4 |
| 740 | 12·1 | 11·7 | 11·2 | 10·8 | 10·4 | 9·9 | 9·5 |
| 730 | 12·2 | 11·8 | 11·4 | 10·9 | 10·5 | 10·1 | 9·6 |
| 720 | 12·4 | 12·0 | 11·5 | 11·1 | 10·6 | 10·2 | 9·8 |
| 710 | 12·6 | 12·2 | 11·7 | 11·3 | 10·8 | 10·4 | 9·9 |
| 700 | 12·8 | 12·3 | 11·9 | 11·4 | 11·0 | 10·5 | 10·0 |
| 690 | 13·0 | 12·5 | 12·0 | 11·6 | 11·1 | 10·7 | 10·2 |
| 680 | 13·2 | 12·7 | 12·2 | 11·7 | 11·3 | 10·8 | 10·3 |
| 670 | 13·4 | 12·9 | 12·4 | 11·9 | 11·4 | 11·0 | 10·4 |

**Frage 116.** Wozu wird die barometrische Stufe benützt?

**Antwort.** Man benützt die barometrische Stufe um den Barometerstand auf den Meeresspiegel zu reduzieren. Zur Ausführung dieser Reduktion muss man die Höhe des Beobachtungsortes über dem Meeresspiegel und die Temperatur kennen. Mit Hilfe der barometrischen Stufe wird dann die Reduktion bewerkstelligt.

Beispiel einer vollständigen Reduktion.

Seehöhe + 32 m

| | | |
|---|---|---|
| Abgelesener Stand | 757·00 mm | |
| Lufttemperatur | + 15·0 Celsius. | |
| Thermometer am Barometer | + 10·10 Celsius. | |
| I. Reduktion auf 0° . . . . . . | 757·00 | (nach Frage 114) |
| | — 1·20 | |
| | 755·80 | auf 0° reduziert. |
| II. Reduktion auf den Meeresspiegel | + 2·90 | |
| | 758·70 | |

Nebenrechnung.

Barometrische Stufe für 757 und + 15° Celsius ist gleich 11·2 m, also:

$$\frac{32\cdot 0}{11\cdot 2} = 2\cdot 9$$

d. h.: 11·2 m entspricht 1 mm

also: 32·0 m entsprechen 2·9 mm

---

## 7. Beschreibung einiger Barometer.

### a) Quecksilberbarometer.

**Frage 117.** In welcher Form werden die Barometer gebaut?

**Bemerkung.** Die nebenstehenden Abbildungen (vergleiche Figur 124—128) und Anweisungen sind den Katalogen der Firma R. Fuess, Steglitz bei Berlin, entnommen, welche heutzutage die vollkommensten Instrumente dieser Art baut.

**Antwort.** Die Barometer werden je nach der Bestimmung als Stand- oder als Reisebarometer gebaut. Uns interessieren vor allem die Reisebarometer, die zur Höhenmessung verwendet werden. Da man aber gezwungen ist, seinen Reisebarometer öfters mit einem Standbarometer zu vergleichen, so fügen wir auch die Beschreibung solcher bei.

Die Figur 124 und 125 stellt ein Normalbarometer, System Wild-Fuess mit Nonienablesung dar.

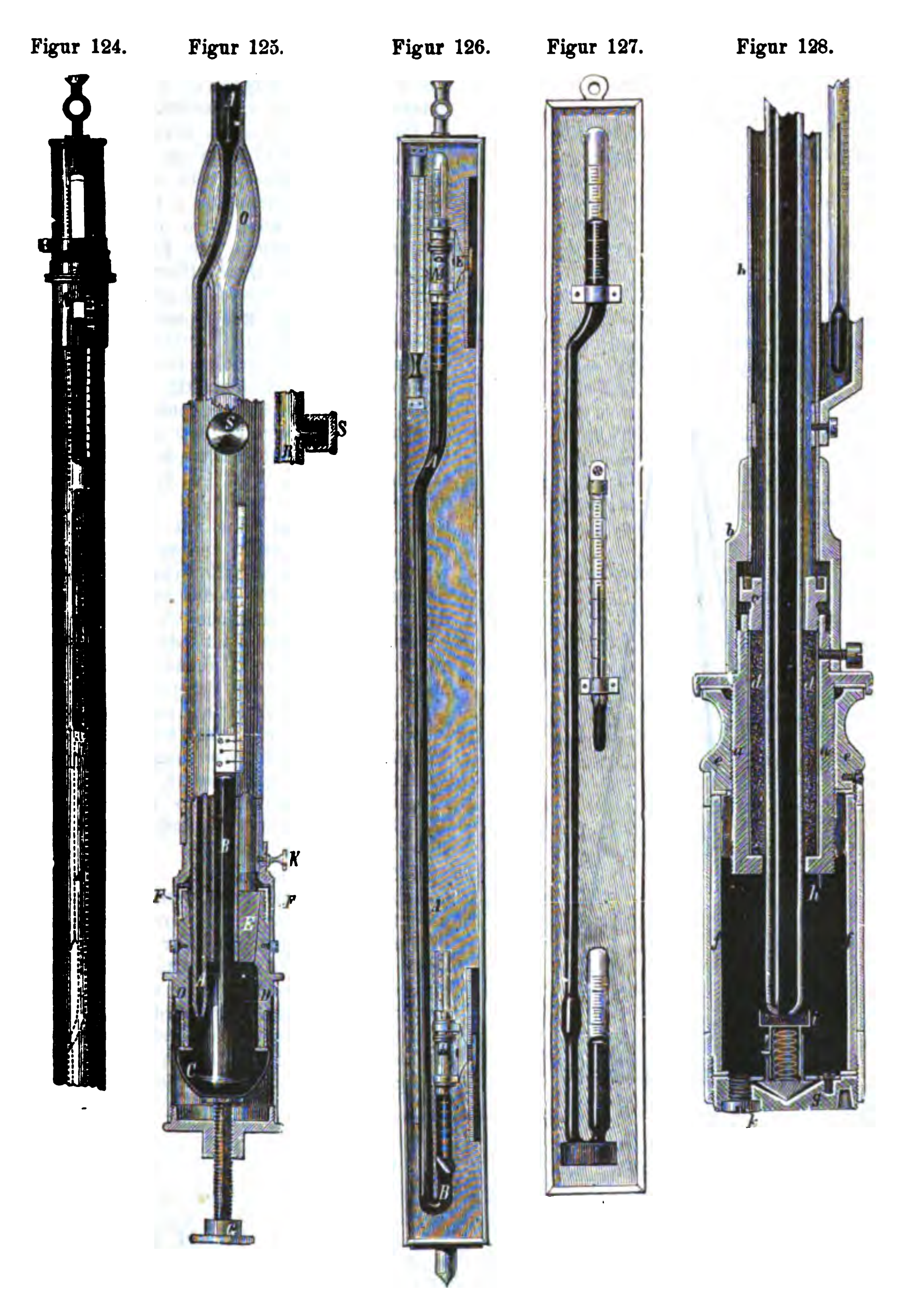
Figur 126. Ein Hebelbarometer mit Glasnonien. Die Teilung ist direkt auf die Glasröhre eingeätzt, auf welcher auch die Nonien verschiebbar sind.

Figur 127. Stellt ein einfaches Heberbarometer auf Holzbrett dar.

Figur 128. Ein Fortinsches Barometer speziell für Höhenmessungen konstruiert, weswegen wir dasselbe näher beschreiben müssen.

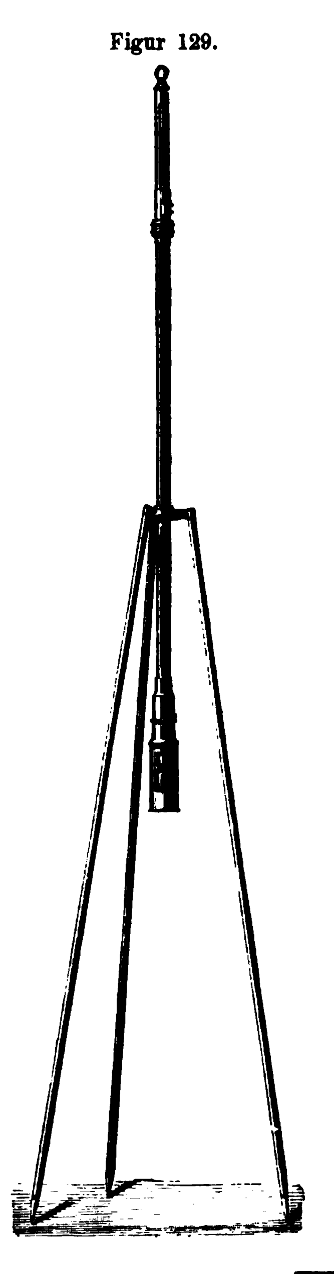
Das hohle Eisenstück *a* (siehe Figur 128) trägt an seinem untern, mit Schraubengewinde versehenen Teile das Quecksilbergefäss, an dem andern Ende die Skalenröhre *b*, während in seinem innern Hohlraume die Barometerröhre befestigt ist.

Figur 124. Figur 125. Figur 126. Figur 127. Figur 128.



Barometer von R. Fuess (vormals J. G. Greiner jr. & Geissler), Steglitz bei Berlin.

Figur 129.



Die Befestigung der Röhre wird durch die Mutter *c* bewirkt, die einen auf die Barometerröhre geleimten Cylinder *d*, welcher aus Papiermasse hergestellt ist, fest an den untern Ansatz des Eisenstückes *a* anpresst.

Das Quecksilbergefäss wird gebildet aus der Glasröhre *f*, welche in ein laternenförmig durchbrochenes Messingrohr eingesetzt ist; ferner aus der Bodenplatte *g* und dem Oberteil *e*. Letzteres kann an *a* auf- und niedergeschraubt und damit die Einstellung der Spitze *h* auf die Quecksilbersäule bewirkt werden. Wenn, wie die Figur zeigt, sich das Instrument in geschlossenem Zustande befindet, das Oberteil *e* des Gefässes fest an die Flansche des Eisenkörpers *a* angeschraubt ist, so wird auch gleichzeitig durch den mit einem Lederscheibchen gepolsterten Federbolzen *i* die Barometerröhre geschlossen, so dass weder ein Schwanken des Quecksilbers stattfinden, noch Luft in die Röhre eindringen kann.

Das Instrument kann mit geringer Mühe auseinander genommen und zusammengesetzt werden. Im erstern Falle schraube man die Schraube *k* aus der Bodenplatte und lasse das im Gefäss befindliche Quecksilber auslaufen. Das Barometer ist sodann umzukehren und die Skalenröhre *b* abzuschrauben. Die Mutter *c*, welche die Barometerröhre festhält, liegt dann frei und kann nun gelöst werden. In umgekehrter Reihenfolge geschieht die Zusammensetzung des Instruments, wobei zu beachten ist, dass vor dem Eingiessen des Quecksilbers in das Gefäss die Barometerröhre vollständig mit Quecksilber gefüllt sein muss.

Für Forschungsreisende, welche selten Gelegenheit haben, ein unterwegs verunglücktes Instrument reparieren zu lassen, dürfte dieses Barometer sehr zu empfehlen sein. In einem gut gepolsterten Etui können eine beliebige Anzahl gefüllter und ungefüllter Reserveröhren mitgeführt werden, ebenso ein oder mehrere Reserve-Glascylinder für das Gefäss. Für die Reise ist ein eigenes Stativ (siehe Figur 129) gebaut worden.

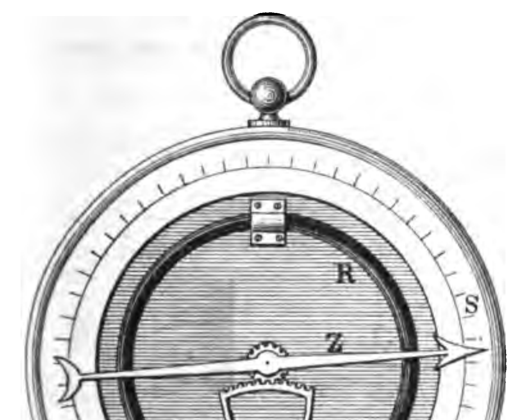
---

## b) Die Aneroide.

**Frage 118.** Was ist ein Aneroid?

**Antwort.** Ein Aneroid ist ein Messinstrument, welches den Luftdruck zu messen gestattet, indem es seine Einwirkung auf die Elastizität der Metalle anzeigt. Man unterscheidet Röhren- und Dosenaneroide.

Figur 130.




Das **R ö h r e n a n e r o i d** besteht aus einer elastischen Metallröhre ($R$ in der Figur 130), aus welcher die Luft ausgepumpt wird. Die Röhre selbst ist kreisförmig gebogen und mit einem Hebel $H$ in Verbindung gesetzt, welcher wieder auf einen Zeiger $Z$ wirkt, dessen Bewegung an der Skala $S$ abgelesen werden kann.

Mit wachsendem Luftdruck krümmt sich die Metallröhre, ihre Enden $A$ und $B$ nähern sich einander und wirken so auf den Hebel $H$.

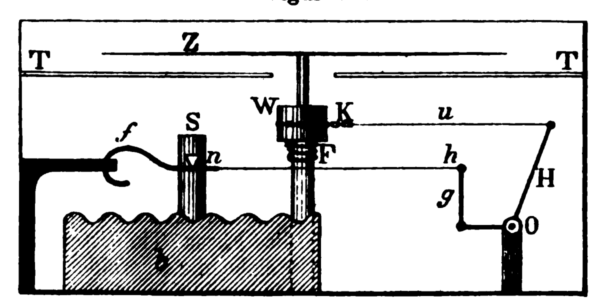
Die **D o s e n a n e r o i d e** haben als Hauptbestandteil eine Metalldose, deren eine (sehr dünne) Wand sich unter dem Einflusse des Luftdruckes biegt. Diese Biegung wird vermittels eines geeigneten Hebelsystems auf einen Zeiger übertragen.

Je nach der Art der Uebertragung der Bewegung der dünnen Wand unterscheidet man das N a u d e t s c h e und das G o l d s c h m i d t - s c h e Aneroid.

Die Naudetsche Einrichtung besteht im Prinzip in nachstehendem:

Die Dose $b$ (vergl. Figur 131) ist mit einer Säule $S$ fest verbunden. Dieselbe überträgt die Bewegungen der wellenförmigen Oberfläche der Dose auf die mit dem Gehäuse fest verbundene Feder $f$ vermittels der Schneide $n$. Die Feder $f$ ist mit einer Stange $h$ verbunden, welche ihre Bewegungen vergrössert auf das um $O$ drehbare Gelenkhebelsystem $g$, $H$ überträgt.

Figur 131.




Der Hebel $H$ ist mit einer Kette $K$ in Verbindung und bewirkt so die Drehung einer Welle $W$, welche den Zeiger $Z$ trägt, dessen Bewegung an der Teilung $T$ abgelesen wird. Dem Hebel $H$ wirkt die Feder $F$ entgegen, so dass die Kette $K$ immer gespannt bleibt.

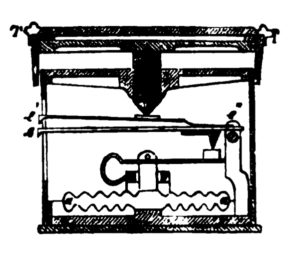
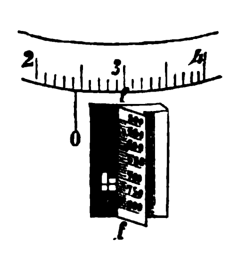
Dass die Büchse $b$ luftleer sein muss, versteht sich von selbst.

Goldschmidt hat die obige ziemlich komplizierte Hebelübertragung wesentlich vereinfacht, indem er die Bewegung der Wellen-

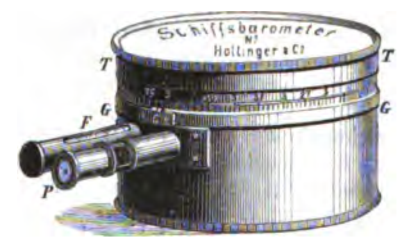
**Bemerkung.** Das Wort Aneroid stammt vom griechischen a = nicht und n e r o s = nass, d. h. ein Barometer ohne Quecksilber. Es wurde vom Engländer Vidi 1847 erfunden. Später verbesserten die Mechaniker N a u d e t und H u - l o t dasselbe und nannten es „Baromètre holostérique“ vom griechischen h o l o s = ganz und s t e r e o s = starr. Wesentliche Verbesserung erfuhr das Aneroid von G o l d s c h m i d t in Zürich.

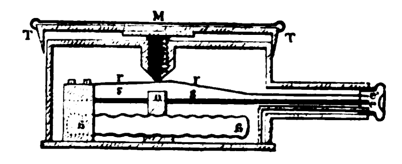
fläche mittels eines Armes gleich auf den Hebel *e* (vergl. Fig. 132) wirken lässt.. Der Hebel trägt am Ende eine Marke. Ein zweiter stark federnder Hebel *e'* steht in Verbindung mit der Mikrometerschraube *M*, deren ganze Umdrehungen an der Millimeterteilung *T* und 0,1 derselben an dem Index 0 abgelesen werden.

Figur 132.

Figur 133.





Barometer von Th. Usteri-Reinacher in Zürich.

**Bemerkung.** Es ist klar, dass die Temperatur sowohl auf die Röhre *R* als auch auf die Dose *b* einwirkt. Es muss daher das Aneroid mit einem Quecksilberbarometer verglichen werden und zwar bei verschiedenen Drucken und verschiedenen Temperaturen. Diese Vergleichung liefert dann bestimmte Korrektion, die sogenannte Temperaturkorrektion der Aneroide. Diese Vergleichung soll öfters gemacht werden, denn die Korrektion ändert sich mit der Zeit.

Soll eine Ablesung gemacht werden, so wird mit Hilfe der Schraube *M* der Indexstrich von *e'* mit jenem von *e* zur Deckung gebracht. Hierauf wird mit Hilfe der Lupe die Ablesung an der Millimeterteilung und mit freiem Auge die Ablesung am Index 0 gemacht (vergl. Figur 132).

Noch einfacher ist die Form, welche die Firma Th. Usteri-Reinacher in Zürich, welche die Aneroide als langjährige Spezialität baut, dem sogenannten Schiffsbarometer gab (vergl. Figur 133). Dasselbe ist aber nur als Barometer und nicht als Höhenmesser (Hypsometer) zu gebrauchen, da die Skala nur auf kleinere Schwankungen des Luftdruckes berechnet ist.

---

**Frage 119.** Wie wird der Einfluss der Temperatur bei dem Aneroidbarometer eliminiert?

**Antwort.** Der Einfluss der Temperatur bei den Aneroiden kann entweder konstruktiv durch geeignete Kompensation oder rechnerisch durch Vergleichung mit

**Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.**

**Der ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert, um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft.

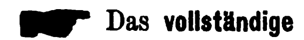
5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

---



**Das vollständige**

## Inhaltsverzeichnis

**der bis jetzt erschienenen Hefte**

kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

---

**Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.**

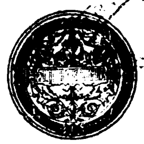
Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

1327. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Vermessungskunde (Geodäsie). Zweiter Teil. Forts. v. Heft 1326. — Seite 129—144. Mit 15 Figuren.



# Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
**Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten**
erläutert durch
**viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,**
aus allen Zweigen
der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — **aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie**; des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's**; der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar-** u. **Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
**zum einzig richtigen und erfolgreichen**
**Studium**, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

**Dr. Adolph Kleyer,**
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

# Vermessungskunde
## (Geodäsie).
### Zweiter Teil.

Nach **System Kleyer** bearbeitet von **Dr. W. Láska.**

Fortsetzung von Heft 1326. — Seite 129—144. Mit 15 Figuren.

**Inhalt:**

Beschreibung einiger Barometer. — Die Aneroide. — Die thermische Höhenmessung. — Die Distanzmessung. — Einleitung. — Das Ertel'sche Universalinstrument. — Behandlung, Prüfung und Berichtigung des Ertel'schen Universalinstruments. — Gebrauch der Distanzmesser. — Die Tachymetrie.

**Stuttgart 1894.**
Verlag von Julius Maier.

einem Quecksilberbarometer eliminiert werden. Die konstruktive Kompensation ist immer eine unvollkommene und man wird bei genauen Messungen wohl immer zur rechnerischen Bestimmung greifen.

---

**Frage 120.** Wie gestaltet sich der Ausdruck der Reduktion eines Federbarometers?

**Bemerkung.** Um den Einfluss dieser Fehler klar zu machen, denken wir uns zunächst zwei Barometer A (Quecksilber-) und B (Feder-Barometer). Die Temperatur soll 0° sein.

Wir lesen ab:

| Temperatur | A | B |
|---|---|---|
| 0° Celsius | 760·00 mm | 760·35 mm |
| | 761·00 | 761·37 |
| | 762·00 | 762·25 |
| | 763·00 | 763·40 |

Lassen wir 760 mm als Normalstand gelten, dann ist — 0·35 die Standkorrektion. Also werden:

$$(-761{\cdot}37 + 0{\cdot}35 + 761{\cdot}00) = -0{\cdot}02$$
$$(-762{\cdot}25 + 0{\cdot}35 + 762{\cdot}00) = +0{\cdot}10$$
$$(-763{\cdot}40 + 0{\cdot}35 + 763{\cdot}00) = -0{\cdot}05$$

die Teilungskorrektionen sein.

Nehmen wir weiter an, wir hätten bei 10° Celsius nachstehende Ablesung gemacht:

| A | B |
|---|---|
| 760·00 mm | 760·55 mm |

wir haben also eine Differenz:

$$B - A = 0{\cdot}55 \text{ mm}$$

Davon kommen:

auf Standkorrektion — 0·35 mm

also verbleiben, da keine Teilungskorrektion vorliegt:

— 0·20 mm

als Temperaturkorrektion für + 10° Celsius; also wird in unserem Falle:

$$y = -\frac{0{\cdot}20}{10} = -0{\cdot}02 \text{ mm}$$

**Bemerkung.** Statt bloss dreier Beobachtungen, verwendet man in der Regel möglichst viele und berechnet sie nach der Methode der kleinsten Quadrate.

**Bemerkung.** Der allgemeine Vorgang bei einer Aneroidhöhenmessung ist nachstehender:

Man liest das Aneroid bei einer Höhenmarke ab (eventuell an einem Orte, dessen Meereshöhe

**Antwort.** Im allgemeinen wird das Aneroid, wenn es auch nach Millimeter 760, 770·· beziffert ist, nicht an diesen Stellen genau den Luftdruck anzeigen, den ein Quecksilberbarometer zeigen würde und zwar aus nachstehenden Gründen:

1) Der Nullpunkt des Federbarometers liegt nicht genau im Nullpunkte der Teilung (Standkorrektion).

2) Die Teilung selbst entspricht nicht der gleichwertigen Teilung des Quecksilberbarometers (Teilungskorrektion).

3) Verändert die Temperatur die Bestandteile (Temperaturkorrektion).

Bezeichnen wir die Einheit-Korrektionen der Reihe nach mit $x$, $y$, $z$, wobei wir 760 als Normalstand und 0° Celsius als Temperaturnullpunkt nehmen, so wird, wenn $Q$ den abgelesenen auf Null reduzierten Quecksilberbarometerstand bezeichnet und $F$ die jeweilige Ablesung am Federbarometer darstellt:

$$Q = F + x + yt + z(760 - F)$$

Bestimmt man für eine andere Temperatur und einen anderen Stand:

$$Q' = F' + x + yt' + z(760 - F')$$
$$Q'' = F'' + x + yt'' + z(760 - F'')$$

so folgt:

$$Q - Q' = (F - F')(1 - z) + y(t - t)$$

und analog:

$$Q - Q'' = (F - F'')(1 - z) + y(t - t'')$$

Man kann also aus drei verschiedenen Barometerständen, die bei verschiedenen Temperaturen beobachtet werden, leicht:

$$1 - z, \quad y, \quad x$$

berechnen.

Je grösser die Differenzen:

$$Q - Q'', \quad F - F'', \quad t - t''$$
$$Q - Q', \quad F - F', \quad t - t'$$

sind, desto genauer werden die Werte erhalten.

Es sei hier aber noch einmal darauf aufmerksam gemacht, dass die so ermittelten Korrektionen keine konstanten Grössen sind, sondern sich von Zeit zu Zeit ändern. Darum

bekannt ist), begibt sich nun an jenen Ort, dessen Meereshöhe man bestimmen will, und kehrt sodann zum Ausgangsort zurück. Seien $t$, $t'$, $t''$ die Zeiten und $h$, $h'$, $h''$ die Aneroidstände, so wird man zur Berechnung des Höhenunterschiedes die Aneroidstände:

$$h'$$

und

$$H = (h'' - h)\frac{t' - t}{t'' - t}$$

wählen, vorausgesetzt, dass man annehmen kann, dass sich in der Zwischenzeit der Luftdruck proportional der Zeit geändert hat. Man muss also Tage mit starken Lufdruckschwankungen (Gewittertage, Tage mit starken Winden etc.) möglichst vermeiden. wird das Aneroid immer nur als Interpolationsinstrument verwendet.

## c) Die thermische Höhenmessung.

**Frage 121.** Auf welchem Prinzip beruht die thermische Höhenmessung?

**Antwort.** Die thermische Höhenmessung beruht auf der Thatsache, dass der Siedepunkt des chemisch reinen Wassers von dem Barometerstande abhängig ist.

Es siedet nach Regnaults Untersuchungen das Wasser:

| Siedetemperat. | Barometer | Siedetemperat. | Barometer | Siedetemperat. | Barometer |
|---|---|---|---|---|---|
| 85° Celsius | 433 mm | 91° Celsius | 546 mm | 100° Celsius | 658 mm |
| 86 | 450 mm | 92 | 567 mm | 96 | 682 mm |
| 87 | 468 mm | 93 | 588 mm | 97 | 707 mm |
| 88 | 487 mm | 94 | 611 mm | 98 | 738 mm |
| 89 | 506 mm | 95 | 634 mm | 99 | 760 mm |
| 90 | 525 mm | | | | |

**Bemerkung.** Aus der vorstehenden Tafel ist ersichtlich, dass die Benützung der Siedethermometer nur zu ganz rohen Näherungswerten führen kann. Die ganz bequemen Aneroide haben in der Neuzeit die Siedethermometer ganz verdrängt, weshalb wir diese Art der Messung nur als eine historische hier kurz erwähnen.

Daraus könnte man durch Bestimmung des Siedepunktes den entsprechenden Barometerstand herleiten.

Man kann auch eine direkte Höhenformel ableiten:

$$H = 300(T - T_1)(1 + 0{,}004t)$$

wobei $H$ die Höhendifferenz, $T$ und $T_1$ die Siedepunkte beider Stationen und $t$ das Mittel der Lufttemperaturen bezeichnet. Diese Formel gibt $H$ in Meter an.



# V. Die Distanzmessung.

## 1. Einleitung.

**Frage 122.** Was versteht man unter der Distanzmessung?

**Antwort.** Unter der Distanzmessung wird die Ermittelung einer Entfernung von einem Standpunkte aus verstanden. Das dazu verwendete Instrument wird ein Distanzmesser genannt.

---

**Frage 123.** Welche Arten der Distanzmesser unterscheidet man?

**Bemerkung.** Wir behandeln im nachstehenden nur die Distanzmesser mit Latte, indem die Distanzmesser ohne Latte in der Vermessungskunde des Geometers keine Anwendung finden.

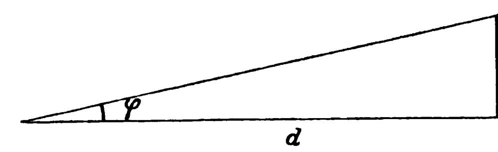
**Antwort.** Je nachdem im Endpunkte eine Latte aufgestellt werden muss oder nicht, unterscheidet man:

1) Distanzmesser mit Latte,
2) Distanzmesser ohne Latte.

---

**Frage 124.** Auf welchem Grundprinzip beruht die Distanzmessung mit Latte?

Figur 134.




**Erkl. 83.** Streng genommen ist:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{l}{d}$$

da aber $\varphi$ bei allen Anwendungen ein sehr kleiner Winkel ist, so kann man:

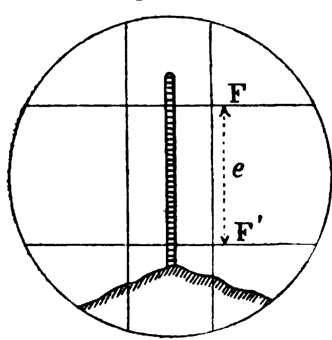
$$\operatorname{tg}\varphi = \varphi'' \sin 1''$$

setzen, wodurch:

$$d = \frac{l}{\varphi'' \sin 1''} = 206\,265 \frac{l}{\varphi''}$$

($\varphi$ in Sekunden ausgedrückt) wird.

Figur 135.




**Antwort.** Der Distanzmessung mit Latte liegt das einfache Prinzip zu Grunde, dass der Gegenstand uns um so kleiner erscheint, je weiter er entfernt ist.

Sei (vergl. Figur 134) $l$ die Länge der Latte, $d$ die Entfernung und $\varphi$ der Winkel, unter welchem die Latte gesehen wird, so besteht die Beziehung:

$$d = \frac{l}{\varphi''} \cdot 206\,265$$

(vergl. Erkl. 83).

Aus dem Umstande, dass hier eine grosse Zahl als Multiplikator erscheint, kann man ohne weiteres annehmen, dass die Genauigkeit der Distanzbestimmung keine allzugrosse sein wird.

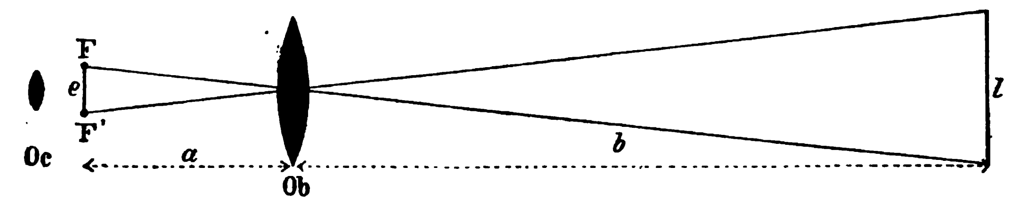
Da man gewöhnlich eine Latte von konstanter Länge benützt, so lassen sich leicht Tabellen mit dem Argumente $\varphi''$ berechnen, welchen sofort die Distanz entnommen werden kann.

Man kann aber auch dem Winkel $\varphi''$ eine konstante Grösse erteilen und die Länge $l$ an der Latte ablesen.

Die Distanzmesser erster Art werden auch Schraubendistanzmesser, jene der zweiten Art Fadendistanzmesser genannt.

---

Figur 136.




**Frage 125.** Wie lautet die Beziehung zwischen der Fadendistanz $e$ und der Entfernung $b$ des Gegenstandes bei dem Fadendistanzmesser?

**Antwort.** Um die Theorie prinzipiell zu entwickeln betrachte man die Figur 136. $oc$ und $ob$ stellen die Okular resp. Objektivlinse eines einfachen Fernrohrs dar. $l$ ist die Lattenlänge, die der Fadendistanz $e = FF'$ entspricht (vergleiche Figur 135).

Sei ferner $b$ der Abstand der Latte vom Objektiv, $a$ der Abstand der Fäden (also bei richtiger Einstellung auch des Lattenbildes) vom Objektiv, so besteht nach Frage 44 des I. Teiles (Seite 45, Formel VII) die Beziehung:

$$a = \frac{bf}{b-f}$$

wobei $f$ die Brennweite des Objektivs bezeichnet.

Nun haben wir, wie aus der Figur 136 ersichtlich:

$$b : a = l : e$$

also:

$$b : \frac{bf}{b-f} = l : e$$

woraus (vergl. Erkl. 84):

$$b = f + l \cdot \frac{f}{e}$$

Dabei ist aber $b$ die Entfernung, vom Objektiv aus gerechnet. Will man dieselbe vom Mittelpunkte des Instruments haben, so ist noch die Entfernung objektiv bis Mittelpunkt $E$ hinzuzufügen, so dass wir haben:

$$b = E + f + l \cdot \frac{f}{e}$$

oder kurz:

$$b = m + n \cdot l$$

wobei $m$ und $n$ konstante Grössen sind, die am besten durch einige Versuche, bei welchen sowohl $b$ als auch $l$ bekannt sind, bestimmt werden können.

**Erkl. 84.** Aus:

$$b : \frac{bf}{b-f} = l : e$$

folgt zunächst:

$$\frac{blf}{b-f} = eb$$

also:

$$\frac{ef}{b-f} = e$$

oder:

$$l \cdot \frac{f}{e} = b - f$$

d. h.

$$b = f + l \cdot \frac{f}{e}$$

**Bemerkung.** Aus der Gleichung:

$$b \cdot f - l \frac{f}{e}$$

folgt, dass die vom vorderen Brennpunkte des Objektivs an gezählten Entfernungen der Latte den Lattenabschnitten proportional sind. Dieser Brennpunkt führt den Nenner des anallatischen Punktes (von anallatos, unveränderlich).

---

**Frage 126.** Wie lautet dieselbe Beziehung bei einem Schraubendistanzmesser?

**Antwort.** Es ist klar, dass dieselbe Beziehung auch für den Schraubendistanzmesser

gilt. Nur ist dort $l$ konstant, $e$ veränderlich. Die Formel lautet also:

$$b = m + \frac{n}{e}$$

wobei $e$ hier die Zahl der Schraubendrehungen und ihrer Teile bezeichnet.

**Anmerkung 8.** Ehe wir etwas über den Gebrauch des Distanzmessers mitteilen, wollen wir das Universalinstrument von Ertel & Sohn in München beschreiben, welches die Eigenschaften eines für alle Zwecke ausreichenden Instruments in sich vereinigt. Es soll dabei auch ein ausführliches Beispiel der Prüfung eines zusammengesetzten Instruments geliefert werden.

---

## 2. Das Ertelsche Universalinstrument.

Das sogenannte Ertelsche Universalinstrument (siehe Figur 137) ist in erster Linie Nivellierinstrument, dann Winkel- und Distanzmesser; es verbindet daher seiner Konstruktion nach die Anforderungen, welche an ein vollkommen gutes Nivellierinstrument gestellt werden müssen, mit jenen, welche für einen Theodolit notwendig sind. Die Leistungsfähigkeit des Distanzmessers ist proportional der Brennweite des Fernrohrs.

Unterscheidet man am Instrument die beim Gebrauch unbeweglich bleibenden von den beweglichen Teilen des Instruments, so bilden jene den Unterbau, diese den Aufbau desselben. Den Unterbau bilden folgende Teile:

1) Das Dreifussgestell, mit welchem das Instrument auf seiner zur Aufstellung dienenden Unterlage (Stativ) ruht.

2) Die vertikale Achse, ein massiver Stahlkonus, auf dessen gerundeter Kopffläche (bei $V$) der bewegliche Teil mittels der Aufhängung (Balancierung) sich stützt und

3) der Limbus, ein fein geteilter Kreis auf Silber.

Der Aufbau setzt sich aus folgenden Teilen zusammen:

4) Die über den Stahlkonus als Kern entsprechend geformte Hülse.

5) Die Alhidade, ein Kreisring oder eine Kreisscheibe am unteren Ende der Hülse, welche der Grösse des Limbus entsprechend in dessen Ebene so eingepasst ist, dass sein Rand dem geteilten Kreis konzentrisch gegenüberliegt. Dieser Rand trägt auf einem Durchmesser liegend zwei Nonien, deren Angabe je nach der Grösse und Teilung des Kreises entweder 10 Sekunden, 30 Sekunden oder 1 Minute ist. Die Hülse erweitert sich nach oben gabelförmig und bildet so

6) das Lager für die horizontale Drehachse $DD$ in cylindrischer Form.

7) Die horizontale Achse selbst wird aus zwei kurzen Stahlcylindern gebildet, welche als kurze seitliche Ansätze an ein halbcylinderförmiges Lager erscheinen, das hier insbesondere als

8) Gabel bezeichnet wird und zum Einlegen des Fernrohres dient.

9) Das Fernrohr ruht mit zwei genau gleichgrossen und cylindrischen Ringen so in der Gabel, dass es leicht gedreht werden kann. Diese Drehung geschieht um eine Achse, welche als „mechanische“ Achse des Fernrohrs bezeichnet wird. Das Fernrohr ist entweder als Huyghenssches Okular mit einem festen Fadenkreuz und zwei verstellbaren Distanzparallelfäden nebst Korrektionsschräubchen ($I$—$II$) ausgestattet, oder es werden bei den Instrumenten der kleinsten Gattung die Distanzfäden in unveränderlicher Lage auf das Diaphragma gespannt, welches das Fadenkreuz trägt. Die orthoskopische Okularlinse des Fernrohrs ist in allen Fällen gegen das Fadenkreuz verstellbar, indem ihre Fassung mit einem kurzen Ansatz, sogenannten Auszug versehen ist. Okularlinse und das Fadennetz sind zusammen im Kopf des Okulars vereinigt und dieser bei den Instrumenten der grösseren Gattungen durch vier kreuzweise stehende Schräubchen (4, 5, 6 und 7) auf das vordere Ende der Okularröhre aufgeklemmt, bei denjenigen der kleinsten Gattung und jenen mit anallatischem Fernrohr hingegen fest aufgeschraubt. Die Okularröhre ist in das Hauptrohr so eingepasst, dass sie mittels des Getriebes (Zahnstange und Zahnrädchen $G$) verstellt werden kann, bis die Ebene des Fadennetzes in die Bildebene

der Objektivlinse zu liegen kommt. Der optische Mittelpunkt der Objektivlinse und der auf die Bildebene eingestellte Schnittpunkt des Fadenkreuzes bilden die Visier-, Abseh- oder Ziellinie des Fernrohrs, welche als „optische" Achse des Fernrohrs bezeichnet wird.

10) Auf denselben Ringen, mit welchen das Fernrohr in der Gabel ruht, sitzt die Reiterlibelle und wird durch zwei an deren Enden überzulegende federnde Bügel in dieser Lage festgehalten. Auf diese lässt sich ein schmaler Spiegel unter $45^0$ zur Libellenachse so aufstecken, dass der Stand der Blase auch vom Okular aus durch den Spiegel beobachtet und diese zum Einspielen gebracht werden kann, ohne dass der Beobachter notwendig hat, seine Stellung gegen das Instrument zu ändern.

11) Auf der Fläche der Alhidadenebene sitzt eine zweite kleinere Libelle, die Alhidadenlibelle, entweder wie in der Abbildung „quer" oder auch „parallel" zur Fernrohrrichtung; sie dient vorzugsweise zum Horizontalstellen des Instruments und soll in dieser Lage stets einspielen.

12) Ferner sitzt auf der horizontalen Achse $DD$ des Instruments ein geteilter Kreisbogen von etwas mehr als ein Vierteil des Umfangs normal, an welchem die Neigung der Ziellinie des Fernrohrs mit einem Nonius auf 1 Minute gemessen werden kann. Endlich sind noch die Klemm- und Mikrometerschrauben $K_1$, $M_1$ und $K_2$, $M_2$ zu erwähnen, mittelst deren eine unveränderliche Stellung der Vertikal- und Horizontaldrehungen gegen die Achsen herbeigeführt und fein eingestellt wird.

Das ganze Instrument ruht mit den drei Fussschrauben $F_1$, $F_2$, $F_3$, welchen ebensoviele Blättchen unterlegt sind, auf der Kopffläche des Stativs und wird durch einen starken Haken $H$, der in eine entsprechend grosse Oese in der Mitte des Dreifussgestells von unten eingreift, gefasst. Dieser Haken ist am unteren Ende schraubenförmig geschnitten und endigt mit einem kleinen Häkchen, das zum Einhängen eines Senkels dient. Soll nun das Instrument auf dem Stativ festgehalten werden, so wird über den Haken von unten eine starke dreiarmige, in der Mitte durchbrochene Feder $F$ gehoben und diese durch die vorzulegende Schraubenmutter $M$ vor dem Herabfallen geschützt und durch Anziehen der Mutter gespannt.

## 3. Behandlung, Prüfung und Berichtigung des Instruments.

Soll das Instrument zum Gebrauch im Felde vorbereitet werden, so ist zunächst das Stativ mit annähernder Horizontallage des Stativkopfes aufzustellen und sind die Stativfüsse durch Anziehen der Muttern einzeln zu probieren, bis sie eine nicht zu strenge Bewegung um ihre Gelenke gestatten. Hierauf wird das Instrument ohne Fernrohr und Libelle aufgesetzt, die Fussplättchen unterlegt und die Verbindung zwischen ihm und dem Stativ mit Haken, Feder und Schraubenmutter hergestellt, wobei letztere nicht allzustark angezogen werden soll; sodann sind die drei Flügelschrauben am Dreifuss anzuziehen bis die Bewegung der Fussschrauben beginnt strenge zu werden.

Bevor nun das Fernrohr in das Lager der Gabel eingelegt und die Libelle aufgesetzt wird, sind diese sowohl wie die beiden Ringe und die Libellenfüsse sorgfältigst mit dem Staubpinsel zu reinigen.

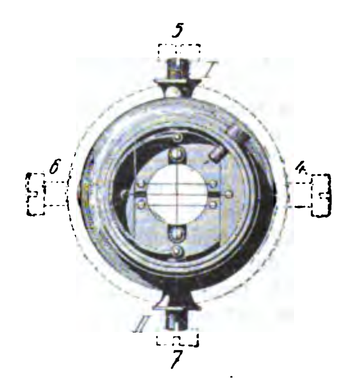
Die nun vorzunehmende Prüfung des Instruments muss in ihrem ganzen Umfang durchgeführt werden, wenn dasselbe als Universalinstrument, d. h. zum Nivellieren, Messen von Horizontal- und Vertikalwinkeln, sowie zum Distanzmessen gleichzeitig verwendet werden soll; ist dies nicht der Fall, so genügt es, die notwendigen Untersuchungen und Berichtigungen am Instrument vorzunehmen. Um eine Prüfung und Berichtigung am Instrument in rechter Weise vornehmen zu können, muss man sich stets den Zweck des zu prüfenden Teils und den mechanischen Vorgang beim Gebrauch vor Augen halten.

Die Prüfung und Berichtigung erstreckt sich auf folgende Instrumententeile: 1) Das Fernrohr, 2) die Libellen, 3) die vertikale und horizontale Instrumentenachse, 4) die Distanzfäden, 5) den Vertikalkreisbogen und 6) die Aufhängung (Balancierung).

1) Das Fernrohr muss unter allen Umständen, wenn man es gegen einen hellen Hintergrund richtet, die Fäden auf dem Diaphragma als feine, scharf begrenzte dunkle Linien zeigen. Eine geringe Verschiebung der Okularlinse in ihrer Fassung lässt für jedes Auge, ob kurz- oder fernsichtig, ob bewaffnet oder nicht, die notwendige Schärfe

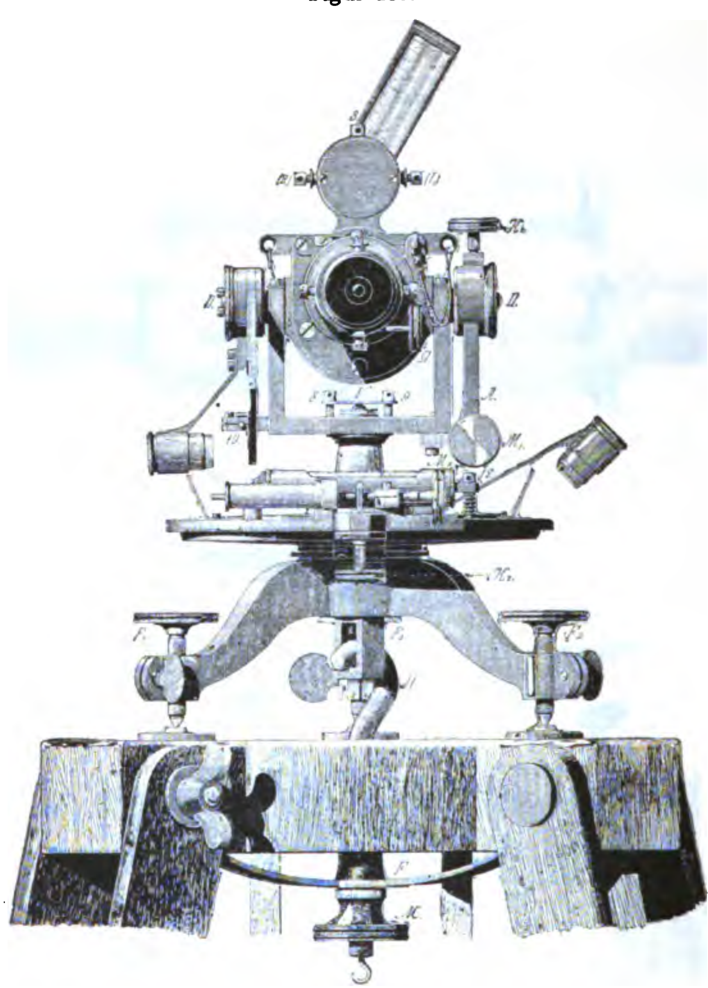
Figur 137.

erreichen. Da das Fernrohr im Lager um seine mechanische Achse drehbar ist, muss seine optische Achse (Ziellinie) mit ersterer zusammenfallen. Man untersucht das Vorhandensein einer Abweichung durch vorsichtiges Drehen des Fernrohres um seine mechanische Achse (am besten nimmt man dabei die obere Libelle hiebei ab und fasst das Fernrohr an beiden Enden an), nachdem vorher ein gut markierter Punkt in mässiger Entfernung durch den Schnittpunkt der beiden Mittelfäden eingestellt war. Verlässt beim Drehen in irgend einer Stellung der Schnittpunkt den Zielpunkt, so ist eine Abweichung in der Lage beider Achsen vorhanden und diese aufzuheben. Die Aenderung in der Lage der optischen Achse geschieht nur durch die vier Klemmschräubchen *4*, *5*, *6* und *7*, mit welchen die Befestigung des Okularkopfes auf der Okularröhre stattfindet (siehe Figur 138). Man wählt nun eine gut beleuchtete Linie (z. B. Hauskante,



Figur 138.

Figur 139.



Blitzableiter, Fensterkreuze), stellt diese sorgfältigst mit einem der Mittelfäden ein und dreht das Fernrohr vorsichtig um 180° (vergl. Figur 139). Findet man nun eine Abweichung des Fadens, so entspricht diese der doppelten Fehlergrösse und ist zur Hälfte durch die Schraubenpaare *4-6* oder *5-7* zu beseitigen, je nachdem zuerst der vertikale Faden oder der horizontale Mittelfaden untersucht wird. Diese vier Schrauben wirken als Zugschrauben, indem sie bei einer Vorwärtsdrehung den Ort nicht ändern, sondern der Körper, in welchen ihre Mutter eingeschnitten ist; hier der Okularkopf. Hat man sonach nach rechts zu verbessern, so ist das linksseitige Schräubchen (in Fig. 139 mit *6* bezeichnet) zuerst nachzulassen, d. h. rückwärts zu drehen, sodann das rechtsseitige (*4*) anzuziehen, d. h. vorwärts zu drehen.

Ist der Fehler für den Vertikalfaden nach wiederholtem Probieren beseitigt, so macht man durch Drehen des Fernrohrs um 90° den horizontalen Mittelfaden zum vertikalen und benützt das gleiche Objekt zum Einstellen. Eine sich zeigende Abweichung wird durch Benützung der Schräubchen *5-7* in gleicher Weise wie vorher beseitigt. Endlich prüft man die Wirkung der Gesamtkorrektion nochmals durch wiederholtes Einstellen auf einen gut markierten Punkt und vorsichtiges fortgesetztes Drehen des Fernrohrs im Lager.

2) Das Universalinstrument hat zwei Libellen, die grössere Reiterlibelle auf dem Fernrohr und eine kleinere auf dem Alhidadenkreis, rechtwinklig zur Fernrohr-

richtung festsitzende Querlibelle. Erstere kommt vor allem zur Prüfung, wenn genaue horizontale Ziellinien notwendig sind, also bei Linien- und Flächennivellements, letztere hingegen nur dann, wenn die Anwendung des Instruments zur Messung von Winkeln beabsichtigt ist.

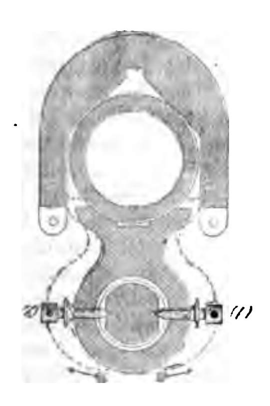
Die Reiterlibelle sitzt auf den beiden Ringen als cylindrische Unterlage, welche die mechanische Drehachse des Fernrohres bedingen, und bezweckt die genaue Herbeiführung einer horizontalen Ziellinie. Sie lässt sich ein wenig nach der Seite neigen und in zwei einander entgegengesetzte Lagen aufsetzen. Damit der Zweck erreicht wird, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

a) muss die Ziellinie mit der mechanischen Achse zusammenfallen und kann dann kurz als Fernrohrachse bezeichnet werden;

b) muss die Libellenachse zu dieser Fernrohrachse parallel liegen.

Die erste Bedingung ist nach der unter 1) gegebenen Behandlung des Fernrohrs erfüllt; zur Erfüllung der zweiten Bedingung hat man zu beachten, dass Libellen- und Fernrohrachsen sich im allgemeinen kreuzen werden. Daher müssen beide zuerst in eine Ebene gebracht und dann parallel gestellt werden. Die sich kreuzende Lage beider erkennt man daran, dass man zunächst in der Mittellage oben (siehe Figur 140) die Libellenachse horizontal stellt (durch Einstellen der Blase auf die Mitte der Teilung) und sodann vorsichtig nach rechts und links abwechselnd neigt, soweit es der Spielraum des Lagers gestattet, ohne die Berührung der Gleitfläche aufzuheben. Zeigt hiebei die Blase eine Neigung abwechselnd nach beiden Seiten auszuweichen, so ist eine kreuzende Lage vorhanden und diese durch Drehen der beiden Druckschräubchen *1* und *2* zu beseitigen, nachdem vorher die Gegenmuttern zurückgedreht sind. Wird diese Seitwärtsbewegung mit den Druckschräubchen fortgesetzt bis die Blase ausschliesslich einseitig ausschlägt oder stehen bleibt, so sind die beiden Achsen in eine Ebene gerückt.

Figur 140.




Figur 141.




Die Abweichung beider Achsen von der parallelen Lage erkennt man, indem man die Libelle in der Mittellage oben wieder horizontal stellt, sodann vorsichtig abhebt und mit vertauschten Enden wieder aufsetzt. Zeigt nun die Libellenblase keinen Ausschlag, so sind Libellenachse und Mantellinien ihrer cylindrischen Unterlage (also auch die Achse des Cylinders) horizontal und parallel. Ein Ausschlag hingegen entspricht dem doppelten Fehlerwinkel und wird zur Hälfte mittelst der Zugschraube *3* (siehe Figur 141), welcher eine Feder entgegenwirkt, beseitigt; hierauf wird die Libelle wieder zum Einspielen gebracht, umgesetzt und korrigiert bis die Horizontalstellung der Achse in beiden Lagen der Libelle erkennbar ist, indem kein Ausschlag mehr stattfindet.

c) Die Querlibelle, auf der Alhidadenscheibe festsitzend, dient vorzugsweise zur Horizontalstellung von Limbus- und Alhidadenebene, d. h. zur Vertikalstellung der senkrechten Drehungsachse des Instruments und ständigen Kontrolle dieser Lage während der Dauer von Winkelmessungen.

Sie soll stets einspielen, wenn die vertikale Drehachse lotrecht steht, beschreibt demnach beim Drehen eine Horizontalebene. Das kann jedoch nur der Fall sein, wenn die vertikale Drehachse und die Libellenachse sich rechtwinklig kreuzen. Die Untersuchung dieser Lage geschieht, indem man die Libelle parallel der Richtung stellt, welche durch zwei Fussschrauben $F_1$, $F_2$ gegeben ist (siehe Abbildungen), sie zum Einspielen bringt, also ihre Achse horizontal stellt; dann dreht man den Aufbau um 180°, so dass ihre Lage wieder parallel derselben Richtung $F_1 F_2$ ist, jedoch mit vertauschten Enden. Kommt die Libellenblase in der Mitte zur Ruhe, so ist die genannte Voraussetzung erfüllt, schlägt sie hingegen aus, so ist der Ausschlag dem doppelten Fehlerwinkel entsprechend und zur Hälfte mittels der Schraube *12*, der eine Spiralfeder entgegenwirkt, zu beseitigen, die andere Hälfte ist durch Drehen der beiden Fussschrauben $F_1$ und $F_2$ zu beseitigen und wird damit die Blase wieder zum Einspielen gebracht. Hierauf wiederholt sich die Untersuchung und Berichtigung, indem man neuerdings um 180° dreht und den halben Ausschlag mit dem Schräubchen *12* beseitigt und solange fortfährt, bis keine Abweichung der Blase aus der Mitte bemerkbar ist. Nun erst lässt sich die vertikale Drehachse lotrecht stellen, womit der Limbus und die Alhidadenebene ihre horizontale Lage erreichen. Dieses geschieht, indem nach erfolgter Korrektur der Aufbau um 90° gedreht wird, so dass die Libelle in der zur vorigen $F_1 F_2$ senkrechten Richtung über der dritten Fussschraube $F_3$ steht. Es wird durch Drehen dieser Fussschraube $F_3$ allein die Libellenblase zum Einspielen gebracht, hierauf zurückgedreht in eine der beiden ersten Lagen parallel $F_1 F_2$, die Blase wieder nur durch Drehen der Fussschrauben in die Mittelstellung gebracht und abermals über $F_3$ gedreht, bis schliesslich die Blase stets einspielt.

d) Geradeso lässt sich die Horizontalstellung mit der Reiterlibelle erreichen, wenn man sie derselben Bedingung und Behandlung unterwirft, nur darf die rechtwinklige Lage zur Drehungsachse ausschliesslich durch Drehen der Mikrometerschraube $M_1$ herbeigeführt werden.

3) Die vertikale und horizontale Instrumentenachse. Die lotrechte Lage der Erstgenannten bedingt nicht allein die horizontale Lage der Kreisebene, sondern auch jene der horizontalen Drehungsachse $D_1 D_2$ abermals unter der Voraussetzung, dass beide rechtwinklig gegen einander liegen, ausserdem die vertikale Lage des Vertikalkreisbogens. Diese lotrechte Lage muss für jede Aufstellung des Instruments herbeigeführt werden nach dem vorausgehend angegebenen Verfahren. Die horizontale Drehachse ist bei den meisten unserer Universalinstrumente ein- für allemal normal zur vertikalen im Lager; bei einigen lässt sich diese Lage ändern und muss dann untersucht werden. Das Drehen der horizontalen Achse $DD$ hat eine Bewegung des Fernrohrs in vertikaler Richtung zur Folge, das sogenannte Kippen oder Aufsteigen desselben; dabei soll sich das Fernrohr in einer Ebene bewegen, was jedoch nur dann genau der Fall ist, wenn Ziellinie und Drehachse einen rechten Winkel bilden. Dies ist hinreichend genau der Fall, sobald im Fernrohr die optische und mechanische Achse zusammenfallen. Diese Ebene wird nun Lot- (Projektions-) Ebene, wenn gleichzeitig die Drehachse $DD$ horizontal ist. Man begnügt sich nun mit der Untersuchung dieser Projektions-Ebene nach beiden Bedingungen — rechtwinklig zur lotrechten Vertikalachse und zur Ziellinie — indem eine in der Natur gegebene vertikale Linie (lotrechte Mauerkante, Blitzableiter, Helmstange eines Kirchturms) zum Vergleich gewählt wird. Eine fühlbare Abweichung wird durch Heben oder Senken der Lager für die Drehachse $DD$ beseitigt, wenn Korrektionsschräubchen vorhanden sind.

4) Die Distanzfäden sollen vom Mittelfaden nahezu gleichen und unter sich einen von der Einteilung der Distanzplatte abhängigen Abstand haben. Man benützt zum Distanzmessen entweder a) besonders geteilte Distanzlatten oder b) die gewöhnlichen Nivellierlatten; letzteres namentlich dann, wenn ausser der Horizontalprojektion der geneigten Distanzlinien auch ihre vertikale gemessen werden soll, sogenanntes trigonometrisches Nivellement.

a) Zur Berichtigung der verstellbaren Distanzfäden benützt man die beiden Schräubchen *I* und *II* (s. Figur 138), welche jedoch erst vorwärts gedreht werden können, wenn die Gegenmutter zurückgedreht wurde. Diese Bewegung lässt die Stellung der Mittelfäden des Fadenkreuzes ganz unverändert. Die Prüfung der Fadenstellung führt man wie folgt durch: Auf ebenem, wenig geneigtem Terrain — am besten benützt man eine

gerade Strassenstrecke — wird eine Gerade von 100—150 m mit Stahlband oder Messlatten in Abschnitten von etwa 20 zu 20 m gemessen und bezeichnet. In der Richtung der Geraden, und zwar um die 1½fache Fernrohrlänge vor dem Anfangspunkt der geteilten Strecke stellt man sodann das Instrument auf und lässt die Latte zunächst bei 40 m — kleinere Entfernungen sind stets direkt zu messen — lotrecht aufstellen. Hierauf liest man bei horizontalem Fernrohr die beiden Fadenstellungen im Bild der Latte ab und rechnet ihre Differenzen als Lattenabschnitt = $l_1$. Sodann wird die Latte auf 60 m Entfernung aufgestellt, wiederum abgelesen und der Lattenabschnitt = $l_2$ berechnet, welchen die beiden äusseren Fäden einschliessen, indem man die Differenz der abgelesenen Zahlen bildet; ebenso verfährt man für alle übrigen Entfernungen und erhält die Lattenabschnitte $l_3$, $l_4$ u. s. w. Sind diese durchgängig zu klein oder zu gross gegen die gegebenen Entfernungen, so muss der Fadenabstand geändert werden und zwar im ersten Fall durch Rückwärtsdrehen beider Schrauben *I* und *II*, im letzteren durch Vorwärtsdrehen. Bei dieser Verstellung der Fäden hat man zweckmässig darauf zu sehen, dass beide auch gleichen Abstand gegen den Mittelfaden erhalten. Man prüft dies einfach damit, dass nach erfolgter Verbesserung für eine mittlere Distanz von 80 oder 100 m wieder auf die Latte eingestellt, horizontal gestellt und an beiden Fäden abgelesen wird; hierauf dreht man das Fernrohr vorsichtig um 180° und liest abermals an allen Fäden ab. Hiebei haben die beiden äusseren Fäden ihre Lage vertauscht und sollen dieselben Ablesungen wie vorher liefern. Nach erfolgter Richtigstellung der Fäden schraubt man endlich die beiden Gegenmuttern vorwärts, bis sie festsitzen.

b) Findet eine gewöhnliche nach Metermass geteilte Nivellierlatte als Distanzlatte Verwendung, so unterscheidet sich das Verfahren nur dann vom vorhergehend beschriebenen, wenn das Instrument statt des Huyghensschen Fernrohrs ein sog. anallatisches Fernrohr nach Porro enthält. Im letzteren Falle hat die Aufstellung des Instruments über dem Nullpunkt der Distanzlinie selbst zu geschehen. Die Verhältniszahl der Distanz wird bei Verwendung von gewöhnlichen Nivellierlatten entweder 100 oder bei anallatischen Fernrohren 50 sein, so das im ersten Falle für 100 m Distanz eine Länge von 1 m, im letzteren eine solche von 2 m zwischen beiden Distanzfäden erscheint.

5) Der Vertikalkreisbogen sitzt normal auf der horizontalen Achse des Instruments und wird vertikal, sobald erstere die horizontale Lage erhält. [Korrektur 3) am Ende.] Er soll Höhen- und Tiefenwinkel messen, daher für horizontale Ziellinie die Ablesung 0° geben. Dies erreicht man unmittelbar damit, dass die korrigierte Reiterlibelle horizontal gestellt wird und eine vorhandene Abweichung in der Noniusstellung durch Benützung der beiden Schräubchen *10* und *11* aufgehoben wird.

6) Die Gleichgewichtslage des Instrumentenaufbaues (Balancierung) ist notwendig, damit zwischen der konischen Vertikalachse und der Hülse nicht zu starke Reibung eintritt. Sie ist dadurch erreicht, dass das Gewicht des ganzen Aufbaues sich mittels eines Metallplättchens als Steg auf das obere kuppenförmige Ende der Vertikalachse — bei 5) — stützt. Werden die beiden Schräubchen *8* und *9* stark angezogen, so hebt sich der ganze Aufbau und der Spielraum zwischen Achse und Hülse wird zu gross; lässt man sie beide zu viel nach, so kommen Achse und Hülse in starke Reibung und die Horizontaldrehung wird erschwert.

Ist die Berichtigung des Instruments vollendet, so sind sowohl die drei Flügelschrauben am Dreifuss, als auch die Schraubenmutter *M* unter dem Stativkopf etwas nachzuziehen, damit der Stand des Instruments ein möglichst sicherer ist. Die Befestigung des Instruments am Stativ mittels Haken und Feder soll keine allzustarke sein, ein leichterer Druck genügt auch.

Nicht bei allen Messungsoperationen ist eine vollständige Prüfung und Berichtigung sämtlicher Instrumententeile notwendig, jedenfalls aber ist die sub 1) gegebene Behandlung des Fernrohrs stets notwendig, ebenso das in der Schlussbemerkung Gesagte.

Nachstehend soll die Reihenfolge der Prüfungen in verschiedenen Fällen kurz bezeichnet werden.

I. **Vertikalmessungen:**

1. **Linien-Nivellements:** 1) vollständig, 2) a), b) und 4).
2. **Flächen-Nivellements:** a) mit horizontalen Ziellinien: 1), 2) a) bis d), 3), sowie 4); b) mit geneigten Distanzen und Höhenwinkeln: 1) bis 6).

II. Horizontalmessungen:
1. Horizontal-Winkel: 1), 2), 3) und 4).
2. Horizontal-Distanzen: a) mit horizontalen Ziellinien: 1), 2), 3), 4) und 5); b) mit geneigten Distanzen und Höhenwinkeln: 1) bis 4).

## 4. Gebrauch der Distanzmesser.

**Frage 127.** Wie wird ein Distanzmesser benützt?

**Antwort.** Bei der Benützung der Distanzmesser hat man zu unterscheiden, ob man die Distanz auf ebenem oder geneigtem Boden misst.

Ist der Boden eben, dann horizontiert man das Instrument wie den Theodolit nach Frage 97 des I. Teiles. Hierauf wird entweder die Latte abgelesen oder die Lattengrösse im Gesichtsfeld vermittels der Schraube bestimmt. Die Distanz wird endlich einer für das Instrument berechneten Tafel entnommen.

Auf geneigtem Boden wird das Instrument ebenfalls vor allem horizontiert. Sodann am Fernrohr der Neigungswinkel des unteren Randes der Latte $\alpha$ (vergl. Figur 142) abgelesen, hierauf neigt der Gehilfe die Latte so lange, bis er durch die Visiervorrichtung $VV$ das Objektiv des Fernrohrs erblickt.

Dadurch erhält man den Abstand:

$$b = OA$$

und endlich vermittels des gemessenen Winkels $\alpha$ den gesuchten Horizontalabstand:

$$OB = b \cdot \cos \alpha$$

**Bemerkung.** Da die Formeln:

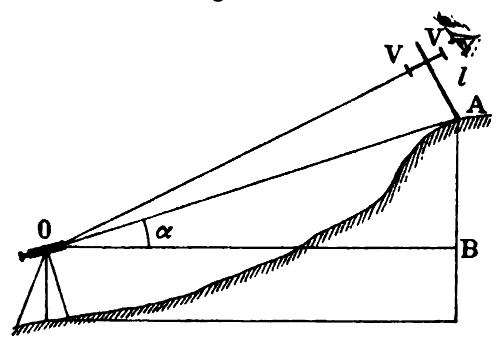
$$b = m + nl$$

oder:

$$b = m + \frac{n}{e}$$

nur $b$ als unbekannte und $l$ resp. $e$ als zu messende Grösse enthält, so lassen sich leicht Tafeln entwerfen, die mit dem Argument $l$ resp. $e$ gleich die Grösse $b$ geben.

Figur 142.




**Bemerkung.** Man beachte, dass in der Vermessungskunde in der Regel nur der horizontale Abstand zweier Punkte gemessen wird.

# VI. Die Tachymetrie.

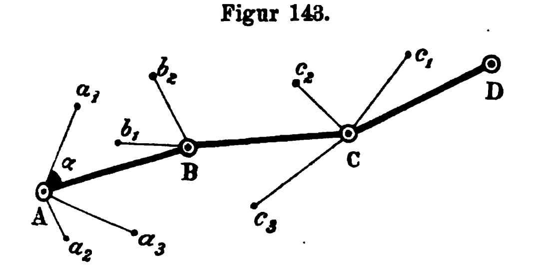
**Frage 128.** Was versteht man unter Tachymetrie?

**Antwort.** Unter der Tachymetrie wird eine Vermessung verstanden, welche in der Verbindung der Theodolitaufnahme mit der trigonometrischen Höhenmesskunst und der Distanzmessung besteht.

Man geht dabei von einer Reihe festgelegter Standpunkte aus ($A$, $B$, $C$, $D$ in der Figur 143), deren Lagen man durch Koordinatenvermessung streng festlegt.

**Bemerkung.** Das Wort Tachymetrie stammt vom griechischen tachys, schnell und metrein, messen, würde also zu deutsch etwa der Schnellmesskunst entsprechen.

Figur 143.




**Bemerkung.** Tachymetrische Aufnahmen werden am meisten bei den Eisenbahnvorarbeiten gemacht. Die Festlegung der Hauptpunkte geschieht da streng polygonal und durch Nivellement; die Nebenpunkte, die nur für den Eisenbahnkörper Bedeutung haben, werden tachymetrisch aufgenommen.

Sodann stellt man sich nacheinander auf jedem der Hauptpunkte $A, B, C, D \cdot\cdot$ auf, während sich der Gehilfe mit der Distanzlatte auf den zu bestimmenden Nebenpunkt (etwa $a_1$, $a_2$, $a_3$, $b_1$, $b_2$, $c_1$, $c_2$, $c_3 \cdots$) stellt. Der zweite benachbarte Hauptpunkt $B$ muss ebenfalls bezeichnet werden. Nun wird für jeden Nebenpunkt die Neigung gegen die nächste Polygonseite (also bei $a_1$ der Winkel $a_1 AB = \alpha$), ferner die Zenithdistanz und endlich mit Hilfe des Distanzmessers die Entfernung ($Aa_1$ für den Punkt $a_1$ u. s. w.) bestimmt.

Wird mindere Genauigkeit verlangt, dann wird der Hauptzug ($A$, $B$, $C$, $D$) nicht trigonometrisch, sondern mit Hilfe der Bussole orientiert.

---

**Frage 129.** Worauf ist bei der tachymetrischen Aufnahme besonders zu achten?

**Antwort.** Bei der tachymetrischen Aufnahme muss man vor allem beachten, das zu vermessende Terrain möglichst genau wiederzugeben. Es müssen also alle Punkte aufgenommen werden, welche für die Oberflächenbeschaffenheit des Terrains charakteristisch sind.

**Bemerkung.** Da gewöhnlich auf Grund der tachymetrischen Aufnahme Querprofile konstruiert werden, so sollen die Nebenpunkte so gewählt werden, dass sie die Konstruktion der Horizontalkurven ermöglichen.

---

**Frage 130.** Was ist ein Tachymeter?

**Antwort.** Ein Tachymeter ist ein Theodolit, welcher ausser mit Höhen- und Horizontalkreisen auch noch mit einem Distanzmesser und Kompas oder einer Magnetnadel zum Ablesen der Deklination versehen ist.

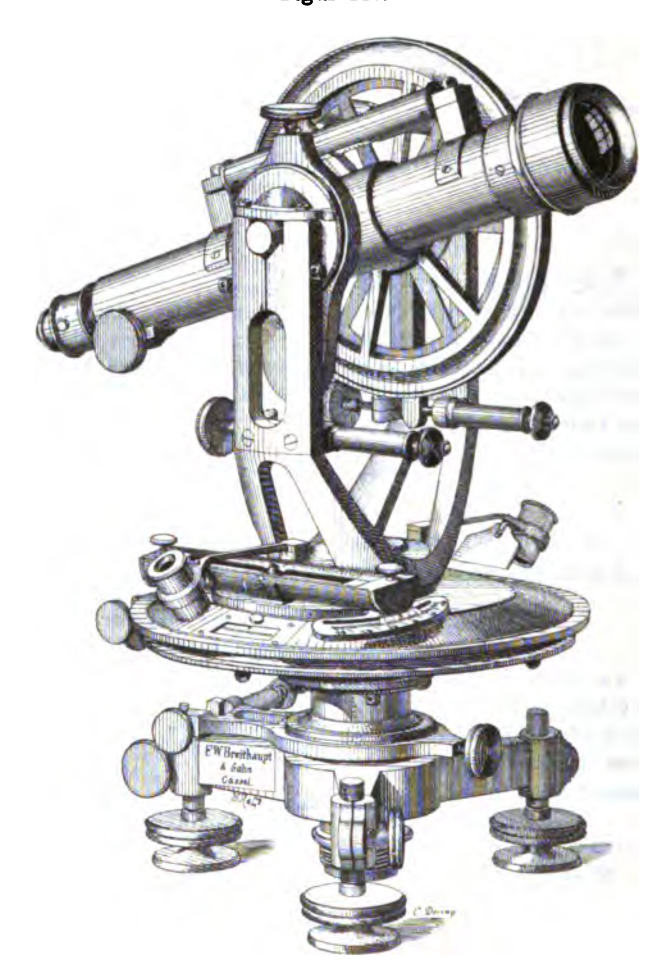
Die Figur 144 stellt einen solchen Tachymeter von Breithaupt & Sohn in Kassel dar. Die cylinderförmige Bussole befindet sich seitlich auf der Alhidade und ist auf eingeteiltem Bogen mittels Nonius gegen die Visierlinie des Fernrohrs verstellbar, so dass die einspielende Nadel mit der Visierlinie die magnetische Deklination einschliesst; zu diesem Zwecke ist auch der Horizontalkreis verstellbar. Auf der Alhidade befindet sich überdies eine Dosenlibelle zur vorläufigen Horizontierung. Auf dem Fernrohr, welches zum Durchschlagen eingerichtet ist, befindet sich eine Reversionslibelle. Eine zweite ist an der Alhidade des Höhenkreises befestigt. Dieselbe kann in jeder Lage mittels Mikrometerschraube zum Einspielen gebracht werden.

Die Figur 145 zeigt einen von L. Tesdorpf in Stuttgart neu konstruierten, sehr handlichen Tachymeter, welchem je nach Bedarf eine aufsetzbare Schmalkalder Patent-Bussole mit niederlegbaren Dioptern, oder eine einfache Orientierungsbussole beigegeben wird (welche in der Figur nicht ersichtlich ist).

Der Höhenbogen von 12 cm Radius für Visuren $\pm$ 35° besitzt: Gradteilung durch Nonius 1′ direkte Ablesung, ferner direkte Prozentteilung, mittelst Index noch 0,1 % schätzbar.



Figur 144.



Tachymeter von Breithaupt & Sohn in Kassel.

Der Distanzmesser des 12 mal vergrössernden Fernrohrs wird in den Verhältnissen 1 : 50 oder 1 : 100 ausgeführt.

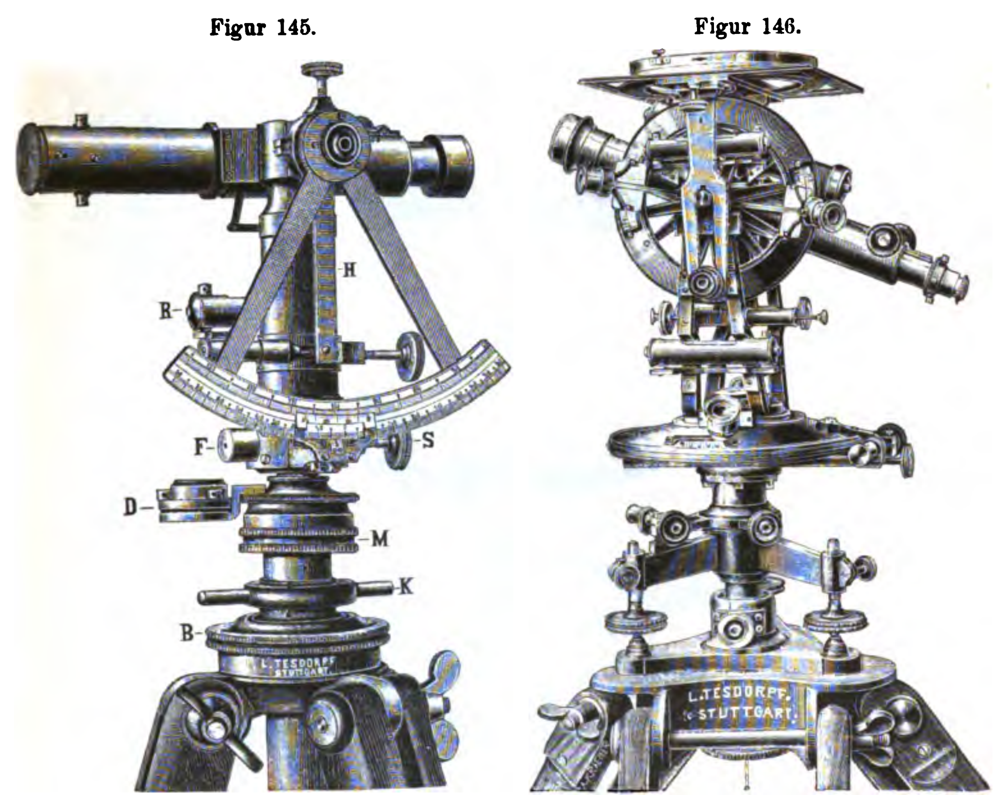
Durch die beigegebene patentierte, automatische Spiegelbewegung ist die Blase der Nivellierlibelle $R$ bei jeder Neigung des Fernrohrs vom Okular aus durch eine besondere Linse direkt innerhalb des Fernrohrs sichtbar, wodurch im Moment der Lattenablesung auch gleichzeitig die Kontrolle der Libelle erfolgt. Ohne Verrückung des Auges lässt sich jeweils durch die Mikrometerschraube $S$ die genaue Einstellung von $R$ bewirken.

Die Stativkonstruktion ermöglicht bei Einhaltung konstanter Instrumentenhöhe sehr schnelle und genaue Aufstellung über einen gegebenen Punkt.

Eine andere tachymetrische Form bringt Figur 146, dieselbe zeigt einen der grösseren Tachymeter, Repetitionstheodolit der Firma L. Tesdorpf in Stuttgart, bei welchem die diesem Institut eigene Stativbefestigung ohne Stengelhaken ersichtlich ist.

Das Instrument mit 15 cm Horizontalkreis und 12 cm Höhenkreis besitzt ein 30-fach vergrösserndes zentrisch-durchschlagbares Distanzmesser-Fernrohr. Bei beiden Kreisen

Figur 145. Figur 146.




Tachymeter von L. Tesdorpf in Stuttgart. Repetitionstheodolit von L. Tesdorpf in Stuttgart.

sind die Nonien einliegend, nicht schleifend. Die auf abgeschrägten Flächen ausgeführten Teilungen sind durch metallene Verdecke und Glasfenster gegen Beschädigung geschützt.

Zur besondern Kontrolle der unveränderten Nulllage der Nonien des Höhenkreises sowie zur schnellen Einstellung derselben in die Horizontale ist noch eine besondere Libelle an der Alhidade angebracht.

Die aufsetzbare Bussole mit 10 cm Magnetnadel und quadratischer Zulegeplatte kann leicht von den Trägern gelöst werden, dann als Zulegezeug beim Kartieren verwendet werden.

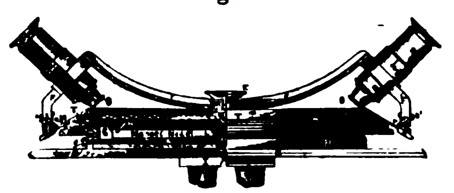
Die Figuren 147 und 148 stellen einen Tachymetertheodolit mit mikroskopischer Bussolenablesung der Firma L. Tesdorpf in Stuttgart dar. Die Ablesungen finden bei dieser Anordnung nicht wie gewöhnlich statt, indem die Stellung der Enden der Magnetnadel zur Teilung direkt ermittelt wird (wie dies bei der Form, siehe Figur 146, der Fall ist), sondern die hochkantige Magnetnadel trägt an beiden Enden ein schräg geneigtes Aluminiumplättchen $H$, auf welchem ein feiner Indexstrich eingezogen ist. Zentrisch zur Bussole ist im Glasdeckel $u$ ein drehbarer Arm $F$ angebracht, welcher auf jeder Seite ein kleines Ablesemikroskop $PI^{M}$ trägt, unterhalb desselben befindet sich der schleifende Nonius $N$.

Am äussern Rande des Bussolenkastens $A$ befindet sich die Kreisteilung.

Die Einstellung erfolgt derart, dass die Mikroskope mittelst des Trägers $F$ so gestellt werden, dass bei den letzten kleinen Schwingungen der Nadel der Strich auf dem Plättchen $H$ gleichen Abstand nach rechts wie links zeigt. (In der absoluten Ruhelage soll die Nadel nicht abgelesen werden.) Mittelst der Nonien lassen sich auf diese Weise bequem einzelne Minuten ablesen.

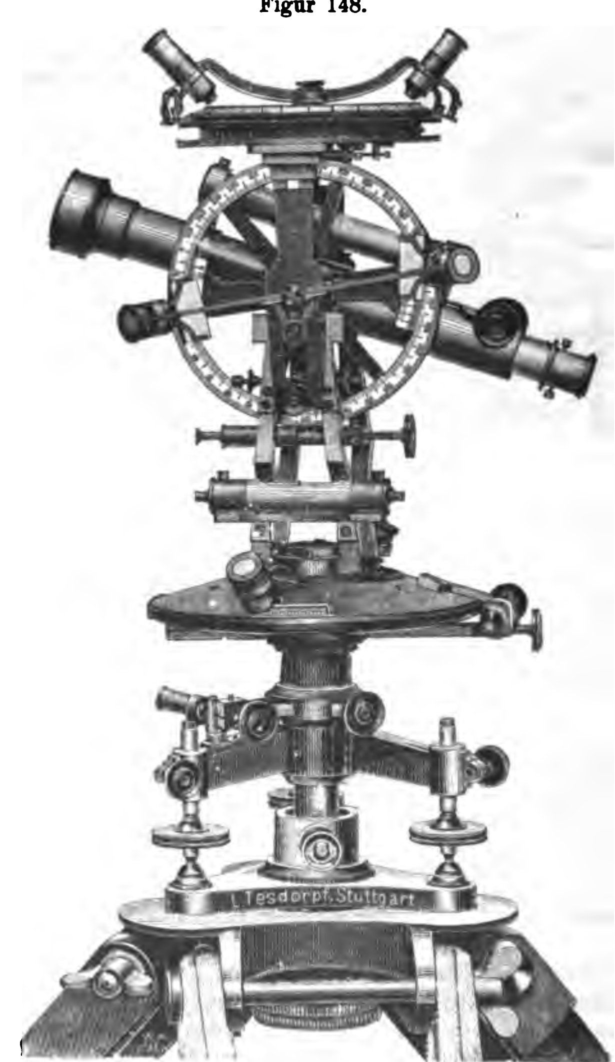
*G* ist ein vertikal stehendes Aluminium- oder Glimmerplättchen, welches dazu dient, die Schwingungen zu dämpfen.

Figur 147.



Querschnitt der Bussole mit **mikroskopischer** Ablesung.

Figur 148.




Tachymetertheodolit von L. Tesdorpf in Stuttgart.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

1328. Heft.

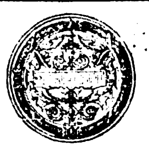
Preis des Heftes 25 Pf.

Vermessungskunde (Geodäsie). Zweiter Teil. Forts. v. Heft 1327. — Seite 145—160. Mit 19 Figuren.





Vollständig gelöste



# Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

**viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,**

aus allen Zweigen

der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — **aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie**; des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's**; der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar-** u. **Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

**zum einzig richtigen und erfolgreichen**

**Studium**, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

**Dr. Adolph Kleyer,**

Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

# Vermessungskunde

## (Geodäsie).

### Zweiter Teil.

Nach **System Kleyer** bearbeitet von **Dr. W. Láska.**

Fortsetzung von Heft 1327. — Seite 145—160. Mit 19 Figuren.

**Inhalt:**

Die Tachymetrie. — Die Photogrammetrie. — Aufgaben über Photogrammetrie. — Apparate der Photogrammetrie. — Die einfache Kamera. — Der Phototheodolit. — Ueber verschiedene in der Vermessungskunde gebrauchte Instrumente. — Die Pantographen.

**Stuttgart 1894.**

Verlag von Julius Maier.

**Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.**

# PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar **in vollständig gelöster Form,** mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch alle **Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich **aber** auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

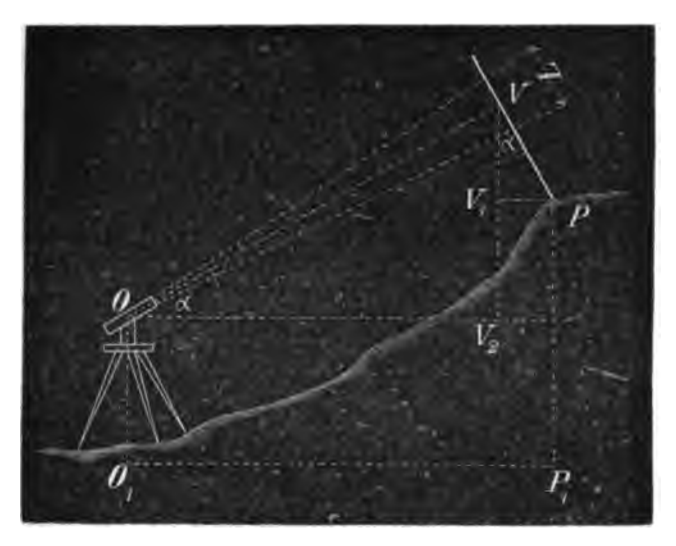
Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust,** Liebe und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc , welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. **Kleyer,** Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

Figur 149.



**Frage 131.** Welche sind die Grundformeln für den Gebrauch des Tachymeters?

**Antwort.** Die Grundformel für den Gebrauch des Tachymeters haben wir in der Distanzmessung prinzipiell entwickelt. Wir wollen dieselben etwas erweitern.

Vor allem ist zu untersuchen, wie sich bei geneigter Visierlinie und Aufstellung der Latte rechtwinklig zu derselben, die Horizontalprojektion $E$ der schief gemessenen Distanz vom Lotpunkt des Instruments bis zum Fusspunkt der Latte, ergibt. Hiezu diene Figur 149, in welcher:

$O$ den Instrumentenmittelpunkt,

$V$ den Nullpunkt,

$P$ den Fusspunkt der Distanzlatte,

$L$ das zwischen den Distanzfäden erscheinende Lattenstück und

$\alpha$ den Neigungswinkel des mittlern Visierstrahles $OV$ gegen den Horizont bezeichnet.

Nennen wir ferner die Horizontalprojektionen der Punkte $O$, $V$, $P$ bezw. $O_1$, $V_1$, $V_2$ und $P_1$ und den Abstand des Nullpunktes der Latte vom Fusspunkt $S$, so erhalten wir die gesuchte Entfernung $O_1P_1$ leicht auf folgende Weise.

Es ist: $OV = C \cdot L + c$

und daher: $OV_2 = (C \cdot L + c)\cos\alpha$

und $V_1P = S \cdot \sin\alpha$

Addiert man diese beiden Gleichungen und berücksichtigt, dass:

$$OV_2 + V_1P = O_1P_1 = E$$

ist, so ergibt sich sofort:

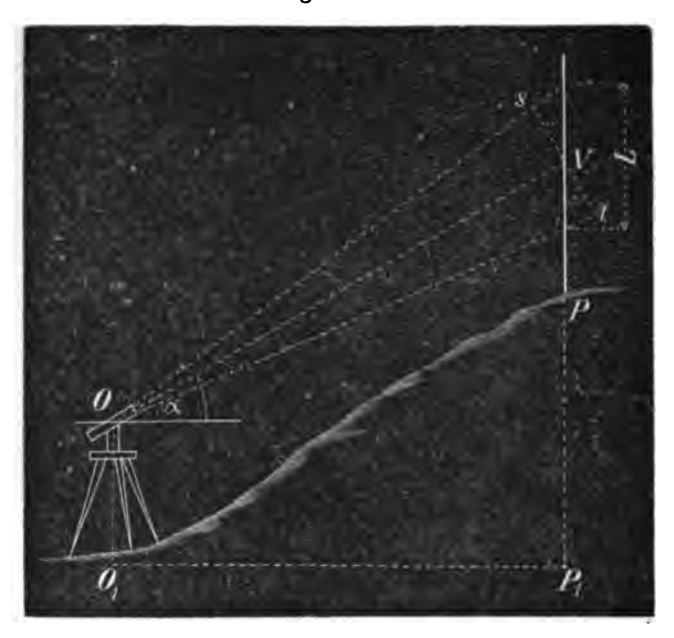
$$E = (C \cdot L + c)\cos\alpha + S \cdot \sin\alpha$$

**Bemerkung.** Bei der Tachymetrie kommt es noch mehr als beim Nivellieren auf eine richtige Haltung der Latten an. Die Firma Otto Fennel in Kassel baut zu ihren nachstehend erwähnten Instrumenten Latten, welche eine Länge von 4,5 m haben und auf beiden Seiten mit Teilung versehen sind.

Die eine Seite ist für Distanzmessungen bestimmt und hat in der Höhe von 1,5 m eine besondere Visiermarke, welche auch den Nullpunkt der Bezifferung bildet. Die andere Seite ist für Nivellements bestimmt und besitzt daher eine gleichmässig durchlaufende Teilung und Bezifferung, deren Nullpunkt mit dem Fusspunkt der Latte zusammenfällt. Zur Erleichterung des Transportes lassen sich die Latten auf 1,75 m zusammenschieben.

Die richtige Lesung an der bei Distanzmessungen rechtwinklig zur Visur aufgestellten Latte wird wesentlich davon abhängen, ob dieselbe richtig und ruhig gehalten wird. Der Beobachter kann leicht kontrollieren, ob die Latte richtig gehalten wird, indem die Visierbretter über deren Oberkante nach dem Instrument visiert wird, vorn schwarz und oben

Figur 150.




und unten weiss angestrichen sind (s. Fig. 151). Bei richtiger Lattenstellung kann der Beobachter nur schwarze Flächen sehen, während bei unrichtiger Stellung oben oder unten ein weisser Streifen sichtbar wird, dessen Breite der Grösse der fehlerhaften Stellung entspricht.

Auf diese Weise wird die Lattenstellung genauer geprüft, als man die Distanz abzulesen im Stande ist.

Figur 151.




Ist man durch die Terrainverhältnisse gezwungen, von der gewöhnlichen Stellung der Latte rechtwinklig zur Visur abzugehen und dieselbe vertikal aufstellen zu lassen, so wird dieser Fall veranschaulicht durch die Fig. 150.

Dann ist mit mehr als hinreichender Genauigkeit:

$$st = L \cdot \cos\alpha$$

und daher:

$$OV = C \cdot L \cdot \cos\alpha + c$$

$$(CL + c)\cos\alpha$$

(Bei $c = 0{,}5$ m und $\alpha = 10^0$ beträgt der Unterschied zwischen vorstehenden Formeln 0,005 m bei $\alpha = 45^0$ 0,145 m).

Bezeichnen wir den Faktor $(CL + c)$ mit $D$, so erhält die letzte Gleichung die Form:

$$OV = D\cos\alpha$$

Nennen wir ferner die Horizontalprojektion $O_1 P_1$ von $OVE$, so ergibt sich:

$$\text{I} \ldots E = OV \cdot \cos\alpha = D \cdot \cos^2\alpha$$

Nennt man noch den Höhenunterschied $VV_2$ (in der Figur 151) $h$, zwischen der Fernrohrmitte und dem Zielpunkte des Mittelfadens, so ist, wie aus dem Dreieck $OVV_2$ folgt:

$$h = OV \cdot \operatorname{tg}\alpha$$

oder:

$$h = D\cos^2\alpha \operatorname{tg}\alpha$$

oder:

$$\text{II} \ldots h = \frac{1}{2} D \sin 2\alpha$$

**Erkl. 85.** Es ist:

$$\cos^2\alpha \operatorname{tg}\alpha = \cos\alpha \cos\alpha \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$= \sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$$

**Bemerkung.** Es lassen sich leicht in den verschiedensten Formen graphische Tafeln konstruieren, welche ebenfalls Lösungen der Gleichungen I und II liefern; wir ziehen jedoch die kleine logarithmische Rechnung vor, wo es sich um grössere Genauigkeit handelt. In allen übrigen Fällen entheben uns die nachstehend beschriebenen Wagner-Fennelschen Schiebetachymeter aller Rechnung und sind zum mindesten ebenso genau wie das graphische Verfahren, haben aber den Vorteil, dass man die gesuchten Grössen sofort am Instrument ablesen kann.

Die Formel I gibt die horizontale Entfernung, und die Formel II den Höhenunterschied des anvisierten Punktes.

I und II bilden die Grundgleichungen der Tachymetrie.

Für ihre Auswertung hat man Tafeln konstruiert, die mit den Argumenten $\alpha$ und $D$ sofort

$$E = D\cos^2\alpha$$

$$h = \frac{1}{2} D \sin 2\alpha$$

geben. Die ausführlichsten Tafeln sind von Prof. Jordan publiziert.

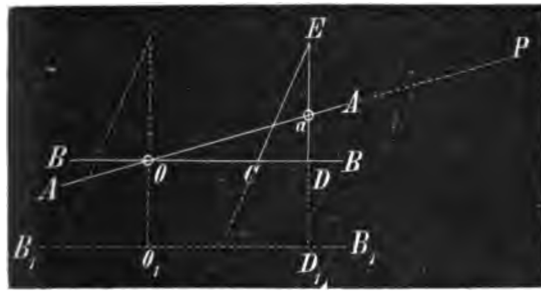
---

**Frage 132.** Welches ist das Prinzip des Wagner-Fennelschen Tachymeters?

**Antwort.** Um sich die Theorie und Wirkungsweise dieses Projektionsapparates zu erklären, denke man sich zwei um einen gemeinsamen Punkt $O$ (siehe Figur 152) drehbare, in einer Vertikalebene liegende gerade Lineale, von welchen die Oberkante $AA$ des einen mittelst einer Visiervorrichtung auf einen aufzunehmenden Punkt $P$ gerichtet ist, während die Oberkante $BB$ des andern durch eine Libelle in horizontaler Lage erhalten wird. Sodann entspreche die Länge $Oa$ in irgend einem bekannten Verhältnis (verjüngtem Massstabe) der Entfernung $OP$ und es sei ferner $CDE$ ein auf $BB$ verschiebbarer rechter Winkel (Projektionswinkel), so ist augenscheinlich $OD$ gleich der Horizontalprojektion und $aD$ gleich der Vertikalprojektion von $Oa$ und es bedarf nur der Anbringung guter Teilungen, um diese Grössen mit ausreichender Genauigkeit direkt ablesen zu können.

Wird das zweite Lineal zwar in der Vertikalebene des ersteren, jedoch anstatt in $BB$ in beliebigem Abstande parallel zu $BB$, etwa bei $B_1B_1$ angebracht, so erhält man mit entsprechend verlängertem Projektionswinkel ebenfalls die Horizontal- und Vertikalprojektion von $Oa$, denn vermöge des entstehenden Parallelogramms ist $OD = O_1D_1$ und $aD = aD_1 - DD_1 = aD - OO_1$. Die Grösse des Abstandes $OO_1 = DD_1$ kommt also nur bei der Vertikalprojektion in Be-

Figur 152.




**Bemerkung.** Um die Benützung des Instruments zu erklären, denke man sich $AA$, $BB$, $ED$ mit Teilungen versehen, etwa im Verhältnis $1:n$ zur Wirklichkeit (vergl. Figur 152).

$BD$ steht immer horizontal, $AA$ ist um $O$ drehbar und $ED$ senkrecht zu $BB$ verschiebbar.

$AA$ hat die Richtung der Visur. Wird nun der Schieber $a$ auf die Länge der an der Latte abgelesenen Distanz $D$ eingestellt, so ist dann unmittelbar:

$$OD = D\cos^2\alpha$$

und

$$Da = \frac{1}{2} D \sin 2\alpha$$

Figur 153.



tracht und zwar als stets in Abzug zu bringende Konstante, welche Subtraktion aber mechanisch erzielt werden kann, wenn dieser Abstand, resp. die Höhenlage des Drehpunktes $O$ an dem Projektionswinkel markiert wird.

Steht z. B. der Nullpunkt der am Projektionswinkel angebrachten Teilung mit dem Punkt $O$ in gleicher Höhe, so entspricht ersterer auch dem Punkt $D$ und es kann alsdann $Da$, resp. die relative Höhe des aufzunehmenden Punktes $P$ in dem der Teilung entsprechenden Verjüngungsverhältnis direkt abgelesen werden.

**Bemerkung.** Der in der Figur 153 abgebildete Wagner-Fennelsche Tachymeter hat nachstehende Einrichtung:

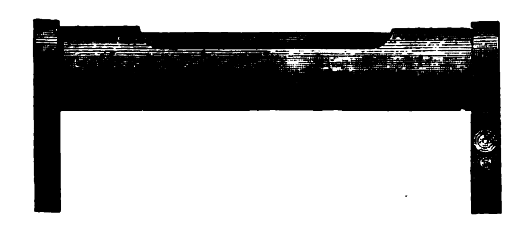
Aus dem zum Distanzmesser eingerichteten Fernrohr ist durch zwei Arme ein mit einem Längenmassstabe versehenes Lineal so befestigt, dass dessen Oberkante parallel zur Visurlinie des Fernrohrs ist, während die Seitenflächen in vertikalen Ebenen parallel zu derselben Visierlinie liegen. Auf diesem Lineal lässt sich ein durch selbstwirkende Federhemmung verstellbarer Schieber bewegen, an dem zwei Nonien angebracht sind. Der obere Nonius ist um eine Achse drehbar, so dass er bei jeder Lage des Fernrohrs vertikal gestellt werden kann, wohingegen der untere Nonius parallel dem Längenmassstabe ist. Nahezu senkrecht unter dem genannten Lineal, ist ein zweites, ebenfalls mit einem Längenmassstab versehenes Linial befestigt.

Auf der Oberkante des letzten Lineals ist mittels Rollen ein rechtwinkliges Dreieck verschiebbar, dessen vertikale Kathete wieder einen Massstab trägt, der in der Ebene des oberen Nonius liegt und so gestellt werden kann, dass mit diesem Nonius gleich die Höhe des anvisierten Punktes über irgend einen angenommenen Horizont abgelesen werden kann. Mittels eines Nonius neben dem horizontalen Massstab werden die auf den Horizont reduzierten Entfernungen abgelesen.

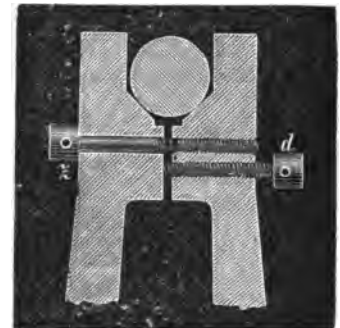
Das Fernrohr ist mit einer Reversionslibelle versehen und kann leicht umgelegt oder durchgeschlagen werden.

Indem wir in Bezug auf die Einzelheiten auf das Werk „Die Wagner-Fennelschen Tachymeter von Otto Fennel in Kassel“ verweisen, möchten wir doch nachstehend auf eine Korrektionsvorrichtung aufmerksam machen. Dieselbe ist in Figur 154 abgebildet. Die Hebung oder Senkung der Auflegeflächen wird durch zwei Schrauben $d$ und $z$ (Druck- und Zugschraube) bewirkt.

Figur 154.







**Frage 133.** Wie wird das Wagner-Fennelsche Tachymeter im Felde gebraucht?

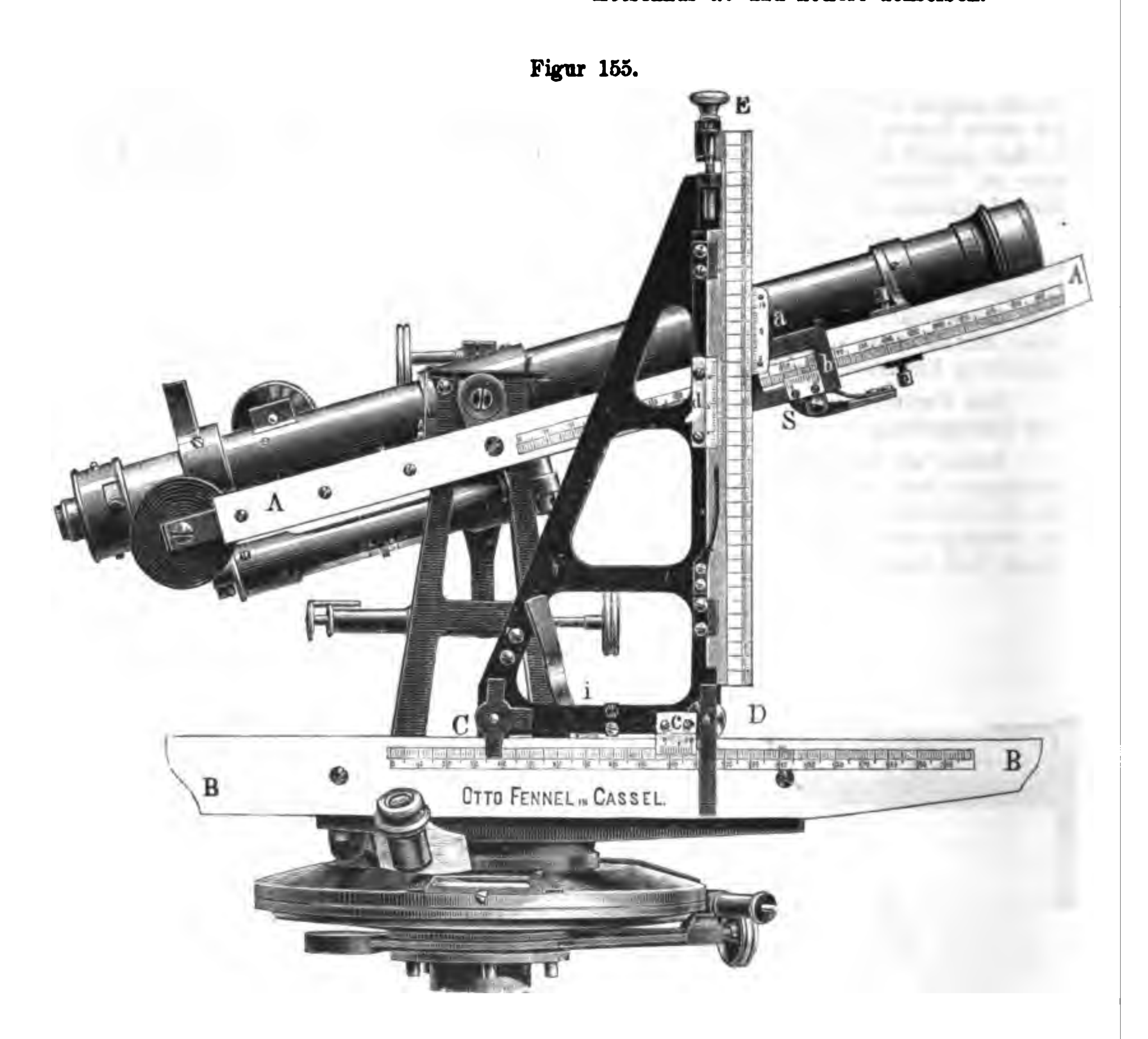
**Antwort.** Die Anwendung der Wagner-Fennelschen Tachymeter im Felde geschieht im allgemeinen nach denselben Regeln wie bei allen andern Tachymetern. Nehmen wir an, das Instrument sei bei Beginn einer Aufnahme über dem ersten Standpunkt (I) zentriert und horizontiert und die Latte sei auf dem zweiten Standpunkt (II) aufgestellt, so sind der Reihe nach folgende Ablesungen und Eintragungen zu machen (vergleiche Figur 155).

1) Man notiert die gegebene Meereshöhe $A$ des Standpunktes.

2) Man liest den Wert $z$ (Unterschied zwischen der Normalhöhe von 1,5 m und der wirklichen Instrumentenhöhe) an der Lotschnur ab und notiert denselben.

**Bemerkung.** Der Italiener Porro hat nachgewiesen, dass man durch Hinzufügung einer Kollektivlinse in das gewöhnliche Distanzfernrohr den anallatischen Punkt in die Mitte des Instruments verlegen kann. Ein solches Fernrohr führt den Namen „anallatisches Fernrohr von Porro.“

Figur 155.



3) Man bildet die Differenz $A - z$, notiert dieselbe, stellt sie am Nonius $d$ des Projektionswinkels ein und setzt den Projektionswinkel auf das Instrument.

4a) (Methode I.) Man richtet das Fernrohr nach der Latte, stellt den Mittelfaden auf die Nullmarke ein, notiert die Ablesungen am Ober- und Unterfaden, addiert dieselben und stellt die erhaltene Summe am Nonius $b$ des Fernrohrlineales ein.

4b) (Methode II.) Man richtet das Fernrohr nach der Latte, stellt den Oberfaden auf die Nullmarke ein, liest den Unterfaden (der im oberen Lattenteil steht) ab, notiert die abgelesene Zahl und stellt sie am Nonius $b$ des Fernrohrlineals ein.

5) Man schiebt den Projektionswinkel an die Kante des drehbaren Nonius $a$ heran, liest am Nonius $c$ die horizontale Entfernung des Fusspunktes der Latte vom Lotpunkt des Instruments, sowie am Nonius $a$ die Meereshöhe des Aufstellungspunktes der Latte ab und notiert beide Zahlen.

6) Man liest den Horizontalwinkel ab und notiert denselben.

Hierdurch ist die Lage des Punktes II völlig bestimmt.

**Bemerkung.** Bei der Methode 4a) steht die Latte schief [also senkrecht zur Visur des Fernrohrs], bei der Methode 4b), dagegen senkrecht auf dem anvisierten Punkte.

Als Beispiel sei angeführt:

**Methode 4a):**

Oberfaden 0·873
Unterfaden 0·874
Einstellung am Fernrohrlineal:
$0{\cdot}873 + 0{\cdot}874 = 1{\cdot}747$

**Methode 4b):**

Oberfaden 0·000
Unterfaden 0·935
Einstellung am Fernrohrlineal:
0·935

# VII. Die Photogrammetrie.

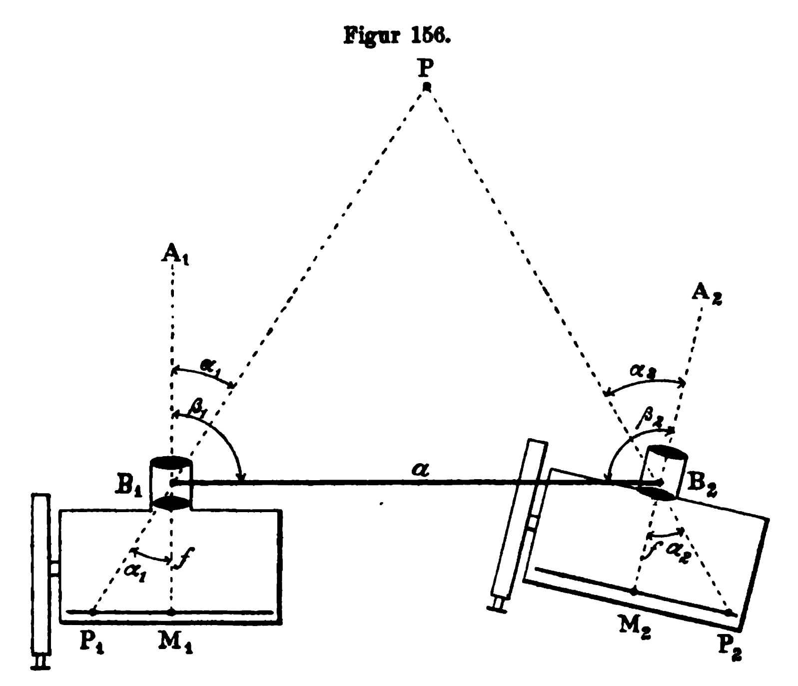
**Frage 134.** Was ist die Photogrammetrie?

**Antwort.** Die Photogrammetrie ist eine Methode zur Aufnahme räumlicher Objekte auf Grund photographischer Aufnahme. Ihre Aufgabe wird daher sein, aus gegebenen Photographien eines Gegenstandes oder Terrains, seine geometrischen Projektionen herzuleiten.

Die Genauigkeit der photogrammetrischen Aufnahmen ist naturgemäss keine allzu grosse, doch immerhin eine solche, dass sie für gewisse Zwecke (topographische Aufnahmen) vollkommen genügt. Es erleidet nämlich bei der Entwicklung der Aufnahme die Gelatineschicht bedeutende Verzerrungen, so dass auch ein vom richtigen Objektivglas gezeichnetes Bild mehr oder minder entstellt wird.

**Bemerkung.** Die Grundprinzipien der Photogrammetrie hat bereits Lambert 1759 entwickelt. Die erste Anwendung machte Beautemps-Beaupré in den Jahren 1791—1793, indem er aus perspektivischen Handzeichnungen seiner Forschungsreise topographische Pläne der berührten Küstenstriche entwickelte. Die erste zu diesem Zwecke konstruierte Kamera hatte Laussedat im Jahre 1851 verwendet, der auf diese Weise im Jahre 1861 einen Teil von Paris aufnahm. Um die Klarlegung der theoretischen Grundlagen haben sich Jordan (Zeitschrift für Vermessungswesen, 1876), Hauck (Journal für Mathematik, Bd. 95) und Steiner (die Photographie im Dienste des Ingenieurs, 1893). Koppe (die Photogrammetrie, 1889) verdient gemacht.

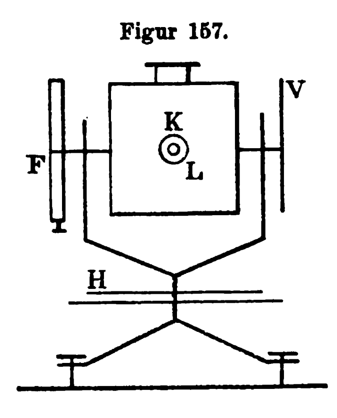
Figur 156.




**Frage 135.** Wie wird ein Punkt photogrammetrisch aufgenommen?

**Bemerkung.** Obschon wir die Phototheodolite später beschreiben, dürfte es doch angemessen sein, hier zum Verständnis des Nebenstehenden wenigstens ihr Grundprinzip zu kennzeichnen.

Figur 157.




Der Phototheodolit (siehe Fig. 157) besteht aus einem gewöhnlichen zentrischen Theodolit, in welchem an die Stelle des Fernrohrs eine Kamera $K$ eingesetzt wird, deren optische Achse genau parallel der optischen Achse des seitwärts angebrachten Fernrohrs $F$ liegt. Ein Horizontalkreis $H$ und ein Vertikalkreis $N$ ge-

**Antwort.** Um einen Punkt $P$ photogrammetrisch aufzunehmen, legt man zunächst eine Basis $a$ fest (vergl. Figur 156). Ihre Endpunkte mögen $B_1$ und $B_2$ heissen. Der Einfachheit wegen denken wir uns, dass die Kamera in beiden Punkten $B_1$ und $B_2$ vollkommen horizontal steht und dass auch $P$ in der horizontalen Ebene liegt.

Wird nun von einem Standpunkte $B_1$ in der Richtung $A_1$ und von einem Standpunkte $B_2$ in der Richtung $A_2$ je ein Bild aufgenommen, ferner die Basis $a$, sowie die Winkel:

$$A_1 B_1 B_2 = \beta_1$$
$$A_2 B_2 B_1 = \beta_2$$

am Horizontalkreis des Phototheodolits (vergl. Bemerkung) bestimmt, so hat man alles um den Punkt $P$, sowie alle auf beiden Photographien sichtbaren Punkte zu konstruieren.

Seien $M_1$ und $M_2$ die Bilder der Punkte $A_1$ und $A_2$, sowie $f_1$ die Brennweite des Kameraobjektivs und $P_1$ resp. $P_2$ die Bilder von $P_1$. So kann man, da $f$ gegeben und

$$P_1 M_1 = d_1, \quad P_2 M_2 = d_2$$

den Photographien abgenommen werden können, auch die Winkel:

$$A_1 B_1 P = P_1 B_1 M_1 = \alpha_1$$
$$A_2 B_2 P = P_2 B_2 M_2 = \alpha_2$$

bestimmen, denn es ist:

statten die genaue Ablesung jeweiliger Drehungswinkel. Zur Horizontierung dient eine Dosenlibelle $L$.

Man kann mit einem Phototheodolit also Photographien in beliebigen Richtungen aufnehmen.

Die Kamera ist immer auf ∞ eingestellt und besitzt also einen konstanten Abstand zwischen der Platte und dem Objektiv. Der Rahmen zur Aufnahme der empfindlichen Platte besitzt Spitzen aus dünnem Blech, welche den Horizont $H$ und die Hauptvertikale $V$ am Bilde markieren (vergl. Figur 158). Der Schnittpunkt $M$ der Markierung soll mit dem am Fadenkreuze des Fernrohrs sichtbaren Punkte übereinstimmen.

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{d_1}{f}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{d_2}{f}.$$

Dann ist aber im Dreieck $PB_1B_2$ bekannt die Basis:

$$B_1B_2 = a$$

und die Winkel:

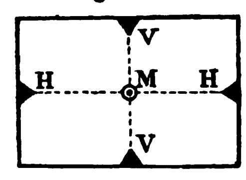
$$PB_1B_2 = \beta_1 - \alpha_1$$

$$PB_2B_1 = \beta_2 - \alpha_2$$

woraus sich das Dreieck konstruieren lässt. Damit ist die Lage des Punktes $P$ bestimmt.

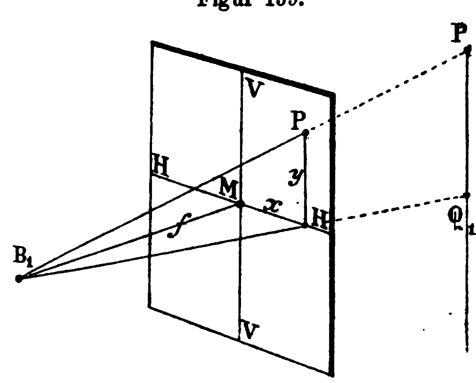
Zur vollständigen Konstruktion des Planes ist aber noch die Ermittelung der eventuellen Höhenkoten erforderlich.

Figur 158.




**Frage 136.** Wie werden die relativen Höhendifferenzen gegen die Standlinie photogrammetrisch bestimmt?

Figur 159.




**Bemerkung.** Da immer zwei Bilder aufgenommen werden, so kann die Höhe eines jeden Punktes doppelt bestimmt werden, was eine Kontrolle abgibt.

**Antwort.** Nachdem in der vorigen Frage die Entfernung $B_1Q_1$ (vergl. Figur 159) bestimmt worden und nachdem man auf der Platte den Horizont $HH$, sowie die Vertikale $VV$ und so den Punkt $M$ als gegeben betrachten kann (man vergleiche die vorige Frage), lassen sich auch die Grössen:

$$PH = y$$

$$MH = x$$

der Platte abnehmen.

Dann ist:

$$PQ_1 : y = B_1Q_1 : B_1H$$

Man hat also:

$$B_1H = \sqrt{x^2 + f^2}$$

wo $f$ die Brennweite bezeichnet, demnach ist:

$$PQ_1 = \frac{y}{\sqrt{x^2 + f^2}} \cdot B_1Q_1.$$

Damit ist die Erhebung von $P$ über den Horizont des Instruments bekannt. Ist ferner $H$ die absolute Höhe des Standpunktes, $i$ die Instrumentenhöhe, so wird:

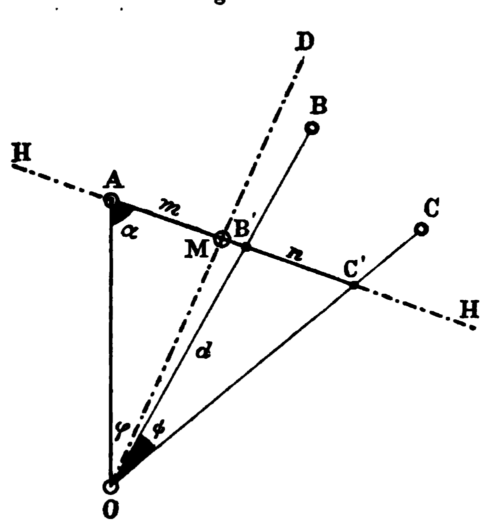
$$h = H + i + PQ_1$$

die absolute Höhe des Punktes $P$ sein.

## 1. Aufgaben über Photogrammetrie.

**Aufgabe 42.** Drei Punkte $A, B, C$, der Standpunkt der Aufnahme sind gegeben und das Bild (vergl. Figur 160). Es sollen die Situationsachsen der Aufnahme gefunden werden.

Figur 160.




**Bemerkung.** Die Situationsachsen werden durch die Richtung der Visur und einer Senkrechten darauf bestimmt. Ihr Schnittpunkt entspricht dem Visurpunkte $M$. Wir wollen die durch die Visur bestimmte Achse $OD$ die Distanzachse und die zu ihr senkrechte $HH$ (in der Figur 160) die Horizontalachse nennen. Der Punkt $M$ kann auch in dem Bilde liegend angenommen werden, dann bildet die Horizontalachse den Horizont. Da es sich bloss um ein projektivisches Koordinatensystem handelt, so ist es gleichgültig, wo $M$ auf $OD$ liegt.

**Erkl. 86.** Es ist:

$$\cos AB'O = \cos[180^0 - (\alpha + \varphi)]$$

$$= -\cos(\alpha + \varphi) = \frac{MB'}{OB'} = \frac{MB'}{d}$$

also:

$$MB' = -d\cos(\alpha + \varphi)$$

**Auflösung.** 1) Durch Rechnung. Wir verlegen die Horizontalachse $HH$ in einen der gegebenen Punkte, etwa $A$ (vergleiche Figur 160), dann bedarf man des Winkels $\alpha = OAB$, um ihre Lage zu fixieren. Dieser ist zu finden. Zu seiner Bestimmung dient das Verhältnis:

$$\frac{m}{n} = \frac{AB'}{B'C'}$$

welches man der Photographie abnimmt. Sei noch:

$$\sphericalangle AOB' = \varphi$$
$$\sphericalangle B'OC' = \psi$$
$$OB' = d$$

so ist im Dreieck $OAB'$:

$$\text{I} \ldots \frac{m}{d} = \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}$$

und im Dreieck $OB'C'$:

$$\text{II} \ldots \frac{d}{n} = \frac{\sin(\alpha + \varphi + \psi)}{\sin\psi}$$

also folgt aus I und II:

$$\frac{\sin\psi}{\sin\varphi}\,\frac{m}{n} = \frac{\sin(\alpha + \varphi + \psi)}{\sin\alpha}$$
$$= \cos(\varphi + \psi) + \sin(\varphi + \psi)\operatorname{ctg}\alpha$$

dadurch ist der Winkel $\alpha$ bestimmt.

Denn setzt man:

$$\lambda = \frac{m}{n}\,\frac{\sin\psi}{\sin\varphi}$$

so wird:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin(\varphi + \psi)}{\lambda - \cos(\varphi + \psi)}$$

Um noch die Lage des Punktes $M$ zu bestimmen, betrachten wir das rechtwinklige Dreieck $OB'M$. Es wird (vergl. Erkl. 86):

$$B'M = -d\cos(\alpha + \varphi)$$

In der Praxis pflegt man aber diese Aufgabe konstruktiv zu lösen, da es sich zumeist nur um eine der Konstruktion entsprechende Genauigkeit handelt.

2) Lösung durch Konstruktion. Man ziehe (vergleiche Figur 161) durch den Punkt $B$ die Gerade $G$ und schneide von $B$ aus:

$$\frac{BA'}{BC} = \frac{m}{n}$$

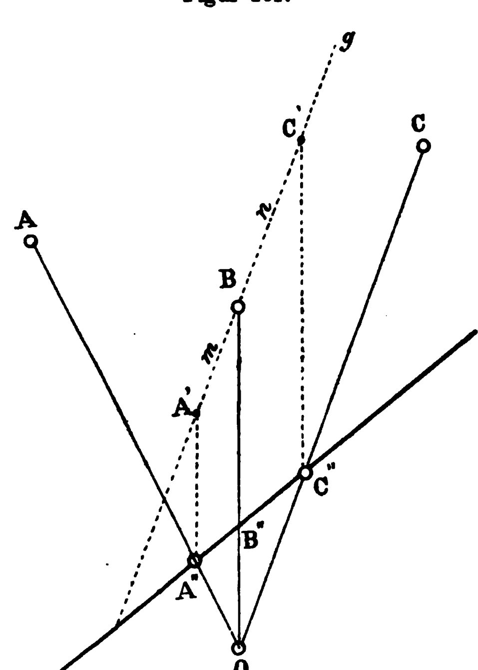
Ziehe sodann:

$$C'C'' \parallel BO$$

und

$$A'A'' \parallel BO$$

Figur 161.




so ist die durch die Punkte $C''$, $A''$ gehende Gerade die gesuchte Horizontalachse. Fällt man durch den Punkt $O$ auf dieselbe eine Senkrechte, so erhöht man die Distanzachse.

Denn wie aus der Figur ersichtlich, verhält sich:

$$\frac{A'B}{BC'} = \frac{m}{n} = \frac{A''B''}{B''C''}$$

Wie man sieht, ist die konstruktive Lösung ungemein einfach.

**Bemerkung.** Man pflegt die Entfernung $OM$ (in der Figur 161) auch die Bildweite zu nennen. Werden die Längen $m = AB'$ und $n = B'C'$ der Photographie entnommen, dann ist die Bildweite gleich der Brennweite zu setzen.

---

**Aufgabe 43.** Es sollen die Schichtenlinien eines Berges konstruiert werden, auf Grund zweier aufgenommenen Photographien. Dabei sind sowohl die Basis der Aufnahme als auch die Orientierungsachsen als gegeben zu betrachten.

**Bemerkung.** Es braucht wohl nicht hervorgehoben zu werden, dass diese Methode nur eine Näherungsmethode ist, die freilich desto genauer wird, je mehr Bilder man hat. Man erhält auf die in der obigen Zeichnung dargestellte Art von zwei Bildern, vier Tangenten und ihre Berührungspunkte:

$$Q_1\ Q_2\ Q_3\ Q_4$$

welche den Bildpunkten:

$$P_1\ P_2\ P_3\ P_4$$

entsprechen. So dass man also wenigstens genähert die Schichtenkurve bestimmen kann.

**Auflösung.** Die Auflösung ist unmittelbar aus der Figur 162 ersichtlich. Man zeichnet sich zuerst die Basis $AB$ und sodann für beide Standpunkte die Orientierungsachsen $HH$, $MA$, $HH$, $MB$. Legt die Photographien so, dass ihre Orientierungslinien mit den Orientierungsachsen zusammenfallen. Will man sodann für eine bestimmte Höhe

$$H1 = H2$$

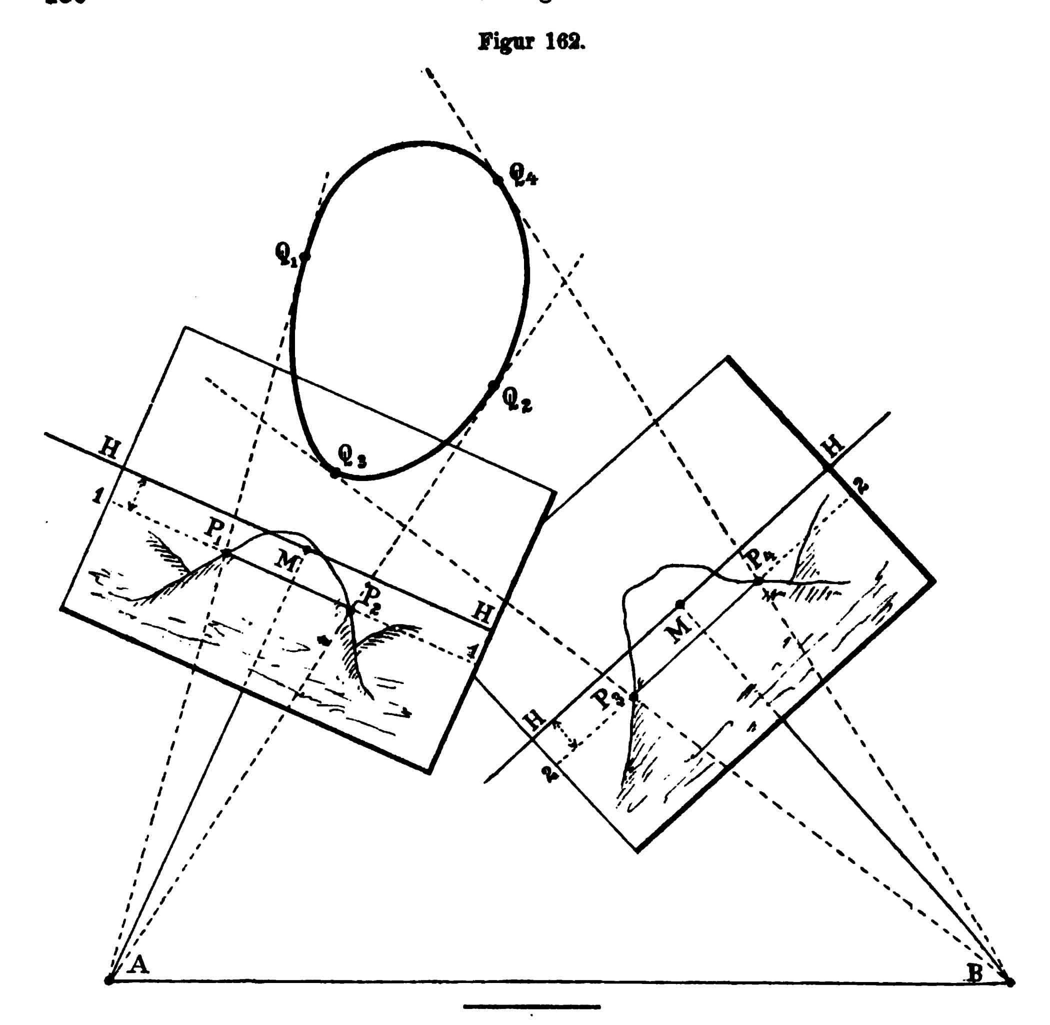
die Schichtenkurve haben, so verbinde man die Schnittpunkte $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ des Bildes mit der in der Entfernung $H1 = H2$ zu $HH$ gezogenen Parallelen mit den Punkten $A$, resp. $B$. Dann sind:

$$AP_1,\ AP_2,\ BP_3\ BP_4$$

Tangenten der Schichtkurve.

Hat man mehrere Bilder, so lassen sich mehr Tangenten und damit auch besser die Form der Schichtkurve bestimmen.

Figur 162.




**Aufgabe 44.** Von einem Punkte $O$ wurde ein Bild zweier Punkte $B$, $C$ aufgenommen. Sowohl $O$ als auch $BC$ sind gegebene Katastralpunkte (vergleiche Figur 163). Man soll die Bildweite $OP$ bestimmen.

**Auflösung.** Man nehme die Mitte der Photographie als Visurmitte an. Ziehe genähert die Horizontal- und Vertikalachse.

Seien sodann $D_B$ und $D_C$ die horizontalen Entfernungen der Punkte $B$ und $C$ von $O$, sowie $H_B$ und $H_C$ die Höhendifferenzen, dann gilt die Beziehung:

$$d_C = \frac{D_C}{H_C} y_C$$

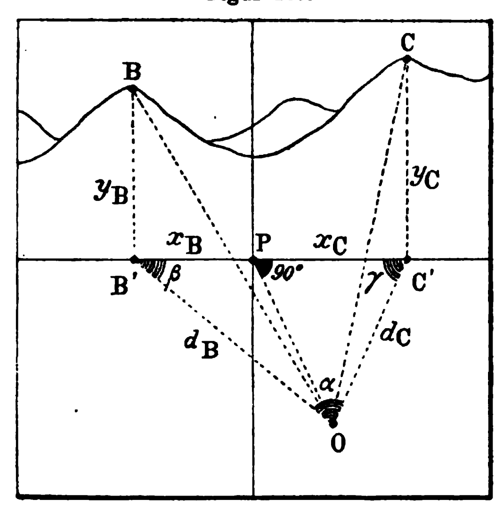
$$d_B = \frac{D_B}{H_B} y_B$$

wobei $y_B$ und $y_C$ die Ordinaten sind und

$$d_C = OC'$$

$$d_B = OB'$$

Figur 163.




$y_B$ und $y_C$ können dem Bilde entnommen werden (zunächst freilich genähert).

Sodann lässt sich das Dreieck $OB'C'$ aus dem Winkel $\alpha$ und den beiden Seiten $d_B$ und $d_C$ konstruieren. Fällt man in demselben von $O$ auf $B'C'$ die Senkrechte, dann erhält man den Punkt $P$ und auch:

$$PC' = x_C$$
$$PB' = x_B$$

War die Annahme über $y_B y_C$ richtig, stimmt $B'C'$ auf die letztere Art konstruiert mit der $B'C'$ im Bilde überein.

$OP$ wird dann die gesuchte Bildweite sein.

Ist keine Uebereinstimmung vorhanden, dann muss man durch Versuche mit angenommenen Werten von $y_B$ und $y_C$ eine solche zu erreichen trachten.

Die Lösung kann graphisch wie folgt bewerkstelligt werden:

Es seien $O\,B\,C$ die drei durch ihre Situation gegebenen Punkte. Man berechne auf die eben angezeigte Art $d_B$ und $d_C$ und mache:

$$OB_1' = d_B$$
$$OC_1' = d_C$$

Die wahre Länge von $B'C'$ sei $B_1E_1$. Sie sei um $C_1'E'$ grösser als die berechnete. Eine zweite Hypothese möge:

$$OB_2' = d_B$$
$$OC_2' = d_C$$

liefern, während die wahre Länge von $B'C'$ um $C_2'E_2$ kleiner ist.

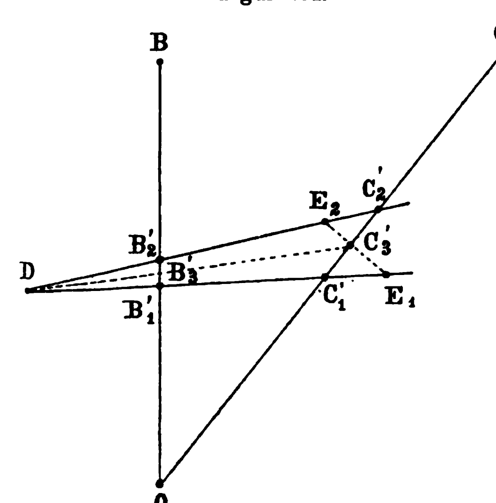
Man verbinde $B_1'C_1'$ und $B_2'C_2'$ bis zum Schnittpunkt $D$. Ferner $E_2$ mit $E_1$, so dass der Schnittpunkt $C_3'$ mit $OC$ erhalten wird. Verbindet man noch $C_3'$ mit $D$, so sind:

$$OB_3' = d_B$$
$$OC_3' = d_C$$

die nahezu richtigen Werte von $A_B$ und $A_C$.

**Bemerkung.** Die nachstehende Methode dient auch zur Berichtigung der Lage der die Achsen angebenden Stahlspitzen der Kassette. Macht man eine Aufnahme und stimmt der berechnete Punkt mit dem durch die Kassette angegebenen, so gibt der Apparat richtige Achsen.

Figur 164.




**Bemerkung.** Die Photogrammetrie rechnet mit Zahlen, welche photographischen Bildern abgenommen werden. Sie rechnet also mit Grössen, deren Genauigkeit eine bestimmte Grenze hat, welche im allgemeinen der einer guten Zeichnung gleichgestellt werden kann. Man wird daher in allen Fällen den konstruktiven Weg einschlagen, oder die Rechnung mit wenigen 3 höchstens 4 Logarithmenstellen ausführen.

**Bemerkung.** Ausser den hier genannten Hauptproblemen gibt es noch ein anderes wichtiges Problem: das Problem der fünf Punkte. Sind fünf Punkte durch ihre Situation

gegeben, welche sich mit fünf Punkten auf einer Photographie identifizieren lassen, dann lässt sich der Standpunkt der Aufnahme konstruktiv oder rechnerisch bestimmen. Die hiezu nötigen Rechnungen sind aber ziemlich kompliziert, so dass wir auf ihre Mitteilung verzichten müssen.

---

## 2. Apparate der Photogrammetrie.

**Frage 137.** Welchen Bedingungen haben die photographischen Apparate, welche für Photogrammetrie benützt werden, zu genügen?

**Antwort.** Die photogrammetrischen Instrumente müssen folgenden Bedingungen entsprechen:

1) Die Bildebene muss genau vertikal stehen.

2) Das zur Festlegung des Hauptpunktes im Bilde liegende Kreuz muss so liegen, dass seine Horizontale den Schnitt einer Horizontalebene, seine Vertikale den Schnitt einer Vertikale durch den Brennpunkt des Objektivs darstellt.

3) Die Bilddistanz wird am besten unveränderlich angenommen, oder es muss am Apparat eine Teilung zum Ablesen derselben angebracht sein, oder sie muss anderweitig gefunden werden können.

4) Das Objektiv muss bis an die Bildränder perspektivisch richtig zeichnen.

5) Bei Instrumenten mit Fernrohr soll die optische Achse desselben mit jener der Kamera parallel sein.

---

**Frage 138.** Welches sind die vorzüglichsten Apparate, die benützt werden?

**Antwort.** Man kann sowohl eine einfache Kamera als auch den Phototheodolit benützen.

---

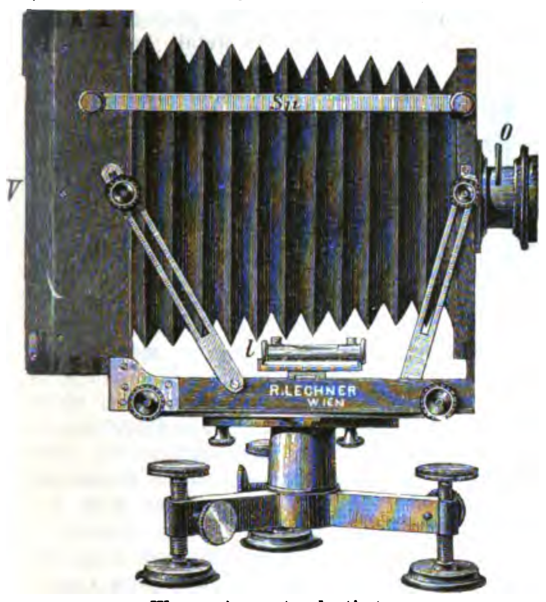
### a) Die einfache Kamera.

(Werners Apparat von R. Lechner in Wien.)

Figur 165 und 166.

Das Gestell besitzt wie beim Theodolit drei Fussschrauben, ferner ist eine Libelle vorhanden, mittels welcher der Apparat horizontiert werden kann. Die aufgestellte Visierscheibe muss senkrecht stehen, wenn die Libellen einspielen; das ist durch die schrägen Metallstützen, welche Kassettenteil und Grundbrett verbinden, schnell und sicher zu bewerkstelligen, da am Ende der Längsschlitze dieser Stützen tiefe Einfeilungen angebracht sind, welche von dem Schlitze rechtwinklig abweichen und die Klemmschrauben aufnehmen, so dass nun ein Neigen der Visierscheibe nach vor- oder rückwärts ausgeschlossen ist. Zur Einstellung einer bleibenden festen Brennweite (Bildweite) des gewählten Objektivs sind auf dem Grundbrett deutliche Marken angebracht, eventuell auf Wunsch auch Millimeterteilung und Nonius. Ist der Objektivteil auf diese Marken, die der Brennweite des Objektivs entsprechen, eingestellt, so passen zwei Metallspangen oder Bügel mit den daransitzenden Kopfschrauben an den entsprechenden Stellen des Kassetten- und Objektivteils und geben angeschraubt dem Apparat die nötige Stabilität. Die Auf- und Abbewegung des Objektivs geschieht einfach mit der Hand, jedoch kann auf Wunsch

Figur 165.




Werner-Apparat, adaptiert.

Figur 166.




Marken für Fadenkreuz.

Massstab und Nonius angebracht werden, um den jeweiligen Stand des Objektivs notieren zu können. Die Bewegung des Objektivbrettes mit Zahnstange und Trieb ist bei diesem Apparat schwieriger, weil diese das Zusammenlegen der Kamera behindern. Zwei oder vier Horizontal- und Vertikalmarken, Spitzen oder Fähnchen geben das nötige Fadenkreuz. Die Marken stehen genau rechtwinklig zu einander und symmetrisch im Kassettenteil, so dass die Verbindungslinien der vier Spitzen bei horizontaler Aufstellung des Apparates die Horizontale und Vertikale repräsentieren. Bei Anwendung von Kreuzlibellen ist auf dem Grundbrett ein Schwalbenschwanzschlitten befestigt, in welchen das auf einer Metallplatte montierte Libellensystem eingeschoben wird. Dosenlibelle kann auf dem Grundbrett korrigierbar befestigt werden.

---

## b) Der Phototheodolit.

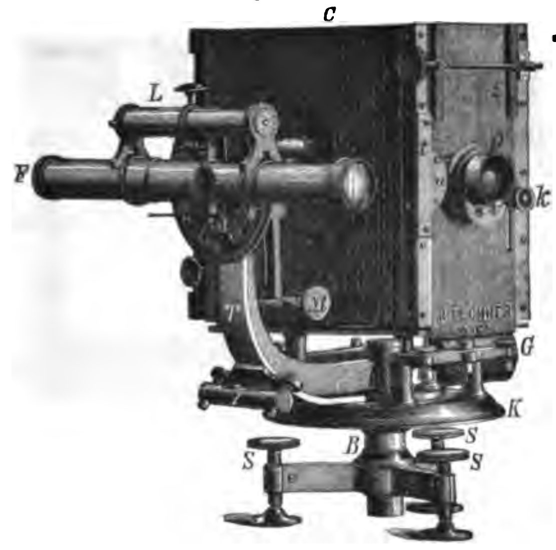
(Pollaks Apparat von R. Lechner in Wien.)

Figur 167.

Der Phototheodolit im Sinne des Wortes muss, die photographische Kamera weggedacht, einem Theodoliten mit exzentrischer Visiervorrichtung in allen seinen Funktionen vollkommen entsprechen. Um das ganze Instrument möglichst leicht zu machen, sind mehrere Teile aus Aluminium hergestellt, was besonders vom Fernrohrträger gilt, der durch das Gegengewicht ausbalanciert werden muss. Der Horizontalkreis wird nach Wunsch in halbe und Drittelgrade geteilt und gestattet mit zwei diametralen Nonien 1 Minute bis 20 Sekunden Ablesung. Das Fernrohr ist nach Art der Kippregel am Träger befestigt und die Korrektur der Horizontaldrehachse des Fernrohres durch eine Röhrenlibelle ermöglicht. Drehung und Klemmung, sowie mikrometrische Einstellung sind vorhanden. Das Fernrohr mit 27 cm Brennweite und 31 mm Oeffnung hat 9 bis 18 fache Vergrösserung und ist für tachymetrische Arbeiten mit Distanzfäden für die Konstante 100 ausgestattet. Mit dem Fernrohr ist eine Reversionslibelle 10—20 sekundenwertig verbunden oder kann auf zwei gleich starken cylindrischen Ringen am Fernrohr eine Aufsatzlibelle auf- und umgesetzt werden. Der Höhenkreis ist in Drittelgrade geteilt und gibt mit zwei Nonien 20 Sekunden Ablesung. Die Festklemmung und Feinstellung

am Horizontalkreis mittels equilibrierter Zentralklemme ist isoliert vom Kreise angebracht. Ablesung der Kreise mit zentral drehbaren diametralen Lupen. Die photographische Kamera, ganz aus Metall, hat ein anastigmatisches Objektiv von C. Zeiss, Jena. Es lässt sich nach Bedarf 30—50 mm an der Kamera auf- und abbewegen, welcher jeweilige Stand an einem Millimetermassstabe mittels Nonius bestimmt werden kann. Die Bewegung geschieht durch Zahnstangen und Trieb. Der Kassettenteil der Kamera enthält einen dem Plattenformat entsprechenden Centimeterrahmen (auch mit Halbcentimeterteilung), welcher sich durch eine eigene mechanische Vorrichtung gegen die lichtempfindliche Schicht bewegt und diese noch bis in die dem Objektiv eigene Bildebene so zurückdrängt, dass letztere bei jeder Platte mathematisch gleich genau eingehalten wird. Somit ist man von etwaigen geringen Kassettenfehlern und besonders von etwaiger Unzuverlässigkeit der Holzkassetten unabhängig. Die Einkerbungen im besprochenen Rahmen sind auf der Teilmaschine hergestellt und bieten auf der Photographie einen genauen Massstab, sowie eine Kontrolle für die Veränderungen, die im Bilde durch die nassen Prozeduren beim Entwickeln und besonders bei der nassen Behandlung und Veränderlichkeit der Papierbilder entstehen.

Figur 167.




Phototheodolit. System Pollack.

# VIII. Ueber verschiedene in der Vermessungskunde gebrauchte Instrumente.

## 1. Die Pantographen.

**Bemerkung.** Der Pantograph (vom griechischen pan, alles und graphein, schreiben) ist eine Erfindung des Jesuitenpaters Christoph Scheiner, der beide Arten in einer 1631 zu Rom erschienenen Schrift publizierte.

**Frage 139.** Was ist ein Pantograph (Storchschnabel)?

**Bemerkung.** Die Figur 169 stellt im Anschluss an die Figur 168 bei gleicher Punktbezeichnung das Instrument in der praktischen Ausführung dar.

**Antwort.** Der Pantograph ist ein Instrument, welches dazu dient, um eine Zeichnung zu vergrössern oder zu verkleinern, und zwar in einem bestimmten Verhältnis.

Er besteht in der ersten Form aus vier durch Gelenke miteinander so verbundenen Stäben, dass dieselben immer ein Parallelogramm ($ABCD$, $A'B'C'D'$ in der Fig. 168) bilden.

In einem verlängerten Arm ($ABO$) befindet sich ein fester Drehpunkt $O$, dagegen

**Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.**

**Der ausführliche Prospekt und das ausführliche Inhaltsverzeichnis der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer" kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung gratis und portofrei bezogen werden.**

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert, um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft.

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

---



Das **vollständige**

## Inhaltsverzeichnis

### der bis jetzt erschienenen Hefte

kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

---

**Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.**

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

1329. Heft.

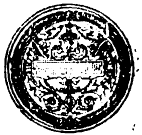
Preis des Heftes 25 Pf.

Vermessungskunde (Geodäsie). Zweiter Teil. Forts. v. Heft 1328. — Seite 161—176. Mit 25 Figuren.





Vollständig gelöste



# Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereométrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — **aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen etc. etc.**

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

**Studium**, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

**Dr. Adolph Kleyer,**

**Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse**

in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

# Vermessungskunde

## (Geodäsie).

**Zweiter Teil.**

Nach **System Kleyer** bearbeitet von **Dr. W. Láska.**

Fortsetzung von Heft 1328. — Seite 161—176. Mit 25 Figuren.

**Inhalt:**

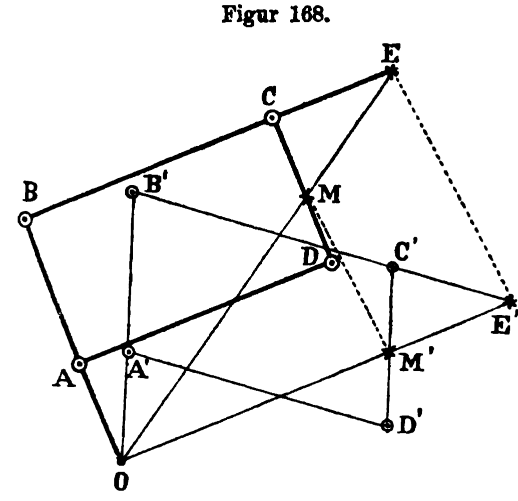


**Stuttgart 1894.**

Verlag von Julius Maier.

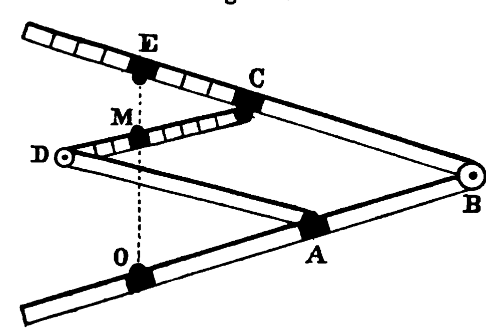
Das vollständige Inhaltsverzeichnis der bis jetzt erschienenen Hefte kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Figur 168.




Pantograph in der Theorie.

Figur 169.




Pantograph in der Ausführung.

**Erkl. 87.** Um das einzusehen, haben wir zu zeigen, dass:

$$\triangle E'M'C' \sim \triangle OB'E'$$

was wir wie folgt beweisen:

Es war in der ersten Lage des Instruments nach der Voraussetzung:

$$EC:CM = EB:BO$$

da nun:

$$EC = E'C' \qquad EM = E'M'$$
$$OB = OB' \qquad BE = B'E'$$

so folgt:

$$E'C':C'M' = E'B':B'O$$

Da nun die Bewegung nur so möglich ist, dass auch:

$$A'B'C'D'$$

ein Parallelogramm wird, so muss:

$$\sphericalangle E'C'M' = \sphericalangle E'B'O$$

wodurch die Aehnlichkeit der Dreiecke erwiesen ist.



sind in den Armen $OD$ in $M$ und $BC$ in $E$ verschiebbare Stifte angebracht.

Werden diese Stifte so befestigt, dass sie bei einer beliebigen Stellung in einer Geraden mit $O$ liegen, so bleiben sie auch bei einer jeden Drehung des Instruments um den Punkt $O$ in einer Geraden (vergl. Erkl. 87).

Denken wir uns das Instrument aus der Lage $OABCDE$ in die Lage $OA'B'C'D'E'$ überführt, so ist:

$$MM' \parallel EE'$$

und es besteht die Proportion:

$$MM':EE' = CB:BE$$

Diese Behauptungen wollen wir nachweisen.

Wir zeigen, dass:

$$\triangle OMM' \sim \triangle OEE'$$

Beide Dreiecke haben einen gemeinschaftlichen Winkel:

$$\sphericalangle EOE'$$

denn die Punkte $OME$ und $OM'E'$ liegen auf je einer Geraden.

Dann ist aber:

$$EO:EM = EB:EC$$
$$= E'B':E'C' = E'O:E'M'$$

also auch:

$$EO:EM = E'O:E'M'$$

Daraus folgt aber die Aehnlichkeit der Dreiecke und die Gleichheit der Winkel:

$$OMM' = OEE'$$

und somit auch, dass:

$$MM' \parallel EE'$$

und

$$MM':EE' = CB:BE$$

(vergl. Erkl. 88 auf der folgenden Seite).

Macht man also:

$$CB:CE = 1:n$$

so wird:

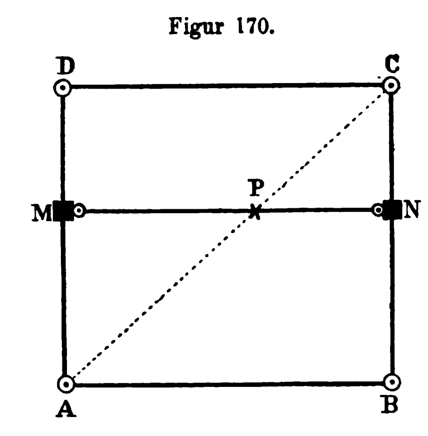
$$MM' = \frac{EE'}{n}$$

Darauf beruht die Anwendung des Pantographs.

Wir gehen nun zur zweiten Art (auch Mailänder genannt) über, dessen Grundprinzip die Figur 170 gibt. Hier hat man ebenso vier durch Gelenke verbundene Stäbe $ABCD$ (Figur 170), überdies ist ein Stab $MN$ verschiebbar angebracht. $P$ ist der Drehpunkt, $C$, $A$ die zeichnenden Punkte. $P$ muss immer in der Geraden $AC$ liegen.

Die Ausführung (die ganz analog der früheren zu führen ist) des Beweises, überlassen wir dem Leser zur Uebung.

Wir geben nachstehend die Abbildung zweier freischwebenden Pantographen der Firma G. Coradi in Zürich.



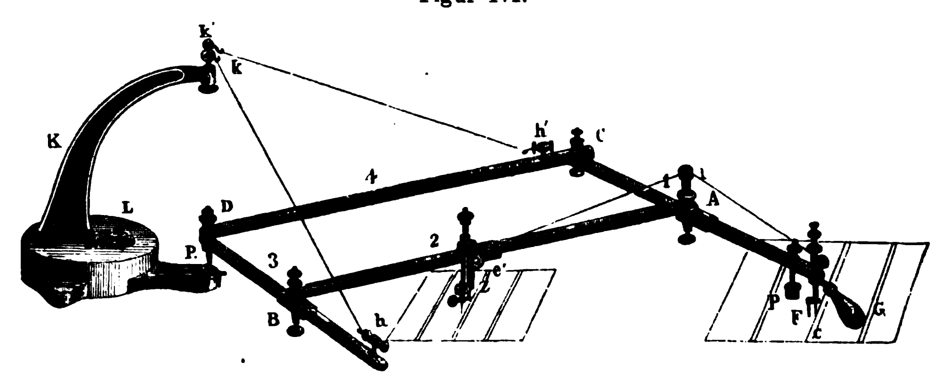

Figur 170.

Figur 171 gibt die erstere und Figur 172 die letztere Art des Pantographs, über dessen Gebrauch wir noch einiges bemerken wollen. Um eine verkleinerte Kopie aufzunehmen, zeichne man auf dem Aufnahmeblatt ein Rechteck, welches dem aufzunehmenden Rechteck ähnlich ist und dessen Seiten der Verkleinerung entsprechen. Dann müssen die Blätter solange verschoben werden, bis bei einer Stellung des Blattes Zeichen- und Kopierstift zugleich auf mindestens drei Ecken der entsprechenden Vierecke stehen. Hat man eine Umrahmung des Originals, so kann diese als Rechteck verwendet werden.

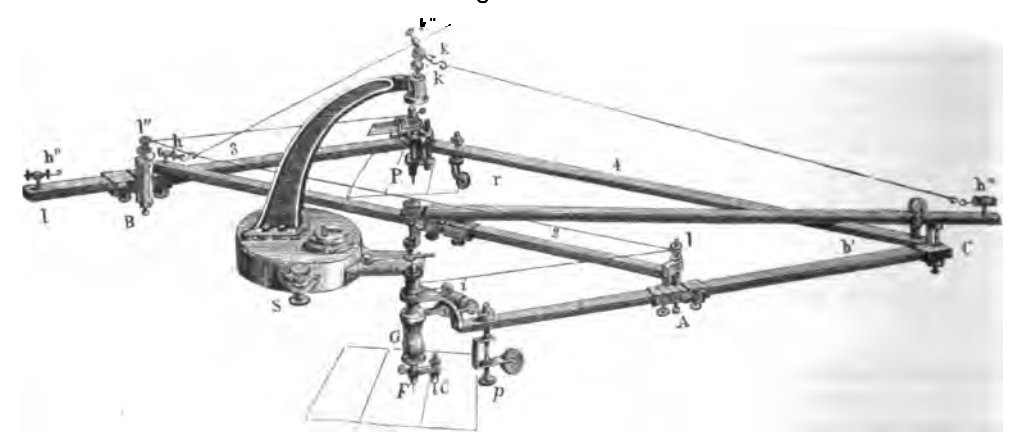
**Erkl. 88.** Es ist:

$$MM' : EE' = OM : OE = BE : B'E.$$

Figur 171.



Figur 172.



**Bemerkung.** Hat man keine Umrahmung (Rechteck) des Originals, dann kann man sich dadurch helfen, dass man im Original vier Punkte festlegt und auf dem Aufnahmeblatt eine ihnen entsprechende Kopie zeichnet. Drei Punkte genügen nicht, denn dann könnte es geschehen, dass der Originalpunkt rechts und der kopierte links zu der Zweipunktlinie zu stehen käme.

Soll bei dem Instrument erster Art in einem Verhältnis $\frac{m}{n}$ verkleinert oder vergrössert werden, so findet man die Stellung der drei Nonien durch:

$$x = l \cdot \frac{m}{n}$$

wobei $l$ die Länge der Seiten des Parallelogramms:

$$AB = CD$$

(vergl. Figur 172) ist. Ist diese z. B. = 720 und $\frac{m}{n} = \frac{5}{8}$, so hat man einzustellen:

$$\frac{5}{8} \cdot 720 = 450$$

Bei den Instrumenten zweiter Art hat man die Formel:

$$x = l \frac{m}{m+n}$$

also z. B. für $\frac{5}{8}$ und 720:

$$x = \frac{5}{8+5} \cdot 720 = \frac{5}{13} \cdot 720$$

also:

$$x = 277$$

**Bemerkung.** Als besonderer Vorzug der freischwebenden Pantographen möge angeführt werden die leichte Führung, da nur ein sehr geringer Teil des Instruments auf dem Papier gleitet, und die daraus entspringende grössere Genauigkeit.

---

**Frage 140.** Wie ist das Instrument erster Art (s. Figur 171) zu behandeln?

**Antwort.** Man horizontiert zuerst das Gestell $K$. Zu diesem Zwecke ist bei $L$ eine Dosenlibelle angebracht.

Nachdem das Gestell richtig gestellt ist, nimmt man das Instrument aus dem Kasten und legt es vorsichtig so auf den Tisch, dass die Polkugel $P$ gegen das Gestell $K$ zu liegen kommt, und unterstützt vorläufig das Instrument an den Aufhängestellen mit einem Buch oder dergl., damit das Instrument oder die Gelenke desselben keinen Verbiegungen ausgesetzt sind. Hierauf setzt man die Polkugel in das Gesenke am Gestell und schiebt den Riegel über dieselbe. Nun wird der kurze Draht einerseits bei $h$ am Stab 3, anderseits an der unteren Oese $k$ des Kranichs eingehängt, desgleichen der lange Draht an der kleinen Oese mit Kugelgelenk am Stab 1 neben Gelenk $C$. Mittelst der beigegebenen Setzlibelle und der Oesenschrauben $h$ und $h'$ werden nun Stab 3 und 4 horizontal gestellt. Stellt man nun noch mittelst der verstellbaren Stützrolle $p$ den Stab 1 horizontal, so ist auch Stab 2 horizontal und das Instrument ist zum Arbeiten fertig aufgestellt.

**Bemerkung.** Die Firma G. Coradi in Zürich, welche die Pantographen als Spezialität baut, legt einem jeden Instrument eine ausführliche Anleitung bei, in welcher die nötigen Vorsichtsmassregeln der Behandlung und Benützung dieser Instrumente enthalten sind.

---

## 2. Die Kartometer.

**Frage 141.** Was ist ein Kartometer?

**Antwort.** Ein Kartometer ist ein Instrument, welches zur direkten Ermittelung der Länge beliebig geformter Kurven dient. Wir geben nachstehend eine kurze Beschreibung einiger Kartometer (Curvimeter, Linienmesser).

1) Kartometer von G. Coradi in Zürich-Unterstrass (Schweiz). Die Achsen der beiden Messrollen und der Führungspunkt $c$ liegen in einer Linie und die Ränder der beiden Rollen, mit welchen das Instrumentchen auf dem Plan aufliegt, haben genau gleichen Abstand vom Punkte $c$. Der Umfang jeder Rolle beträgt 40 mm und ist in 20 Teile geteilt und zweimal von 0—9 beziffert, so dass die Ablesungen beider Rollen summiert ganze Millimeter angeben. Beide Rollen sind in gleicher Richtung beziffert, so dass wenn man das Instrumentchen um den Punkt $c$ dreht, ohne es vorwärts zu bewegen, die Summe beider Abwicklungen = 0 wird; bewegt man das Instrumentchen in gerader Linie fort, so gibt jede der Rollen die Hälfte des von $c$ durchlaufenen Weges an. Befährt man nun irgend eine Kurve, indem man die Achsen der Rollen senkrecht zum jeweiligen Kurvenelement hält (eine Abweichung von der Senkrechten um $8^0$ gibt erst eine Differenz von $^1/_{100}$), so wird die Summe der beiden Ablesungen den vom Punkt $c$ durchlaufenen Weg angeben (vergl. Figur 173).

Figur 173.




2) Kartometer von L. Tesdorpf in Stuttgart (vergl. Fig. 174). Auf einer Grundplatte, welche zugleich als Stütze für drei Fahrräder dient, ist ein Führungsstift genau im Mittelpunkt der Fahrräder-Stützpunkte angebracht. Die Fahrräder, von denen je nach Grösse des Apparats 3, 5 oder 7 Rollen vorhanden, sind mit Zifferblättern versehen, und je ein weiteres Rad, welches mit zehnfacher Uebersetzung vom Fahrrad aus getrieben wird, gestattet, die Vielfachen der ganzen Radumdrehungszahlen abzulesen. Die Fahrräder, deren Spurkränze auf dem Papier aufliegen, sind einseitig gesperrt, sie können sich nur nach aussen bewegen.

Der Gebrauch: Die absolute Länge $L$ ergibt sich direkt aus dem Produkt des arithmetischen Mittels ($m$) der Ablesungen an dem 3., 5. oder 7. Rollen-Apparat und der Konstante ($k$) des jeweiligen Instruments.

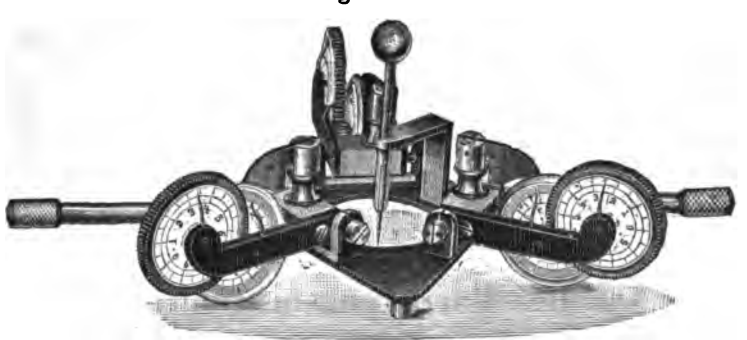
$$L = m \cdot k$$

Es ergibt sich z. B. aus:

d. 1. Umfahrung: Stand d. Roll. vor d. Umfahrung $N_1$ Stand d. Roll. nach d. Umfahrung $N_2$
„ 2. „ „ „ „ „ „ „ $N_3$ „ „ „ „ „ „ $N_4$

$$N_2 - N_1 = n \qquad \frac{n + n_1}{2} = m$$
$$N_4 - N_3 = n_1$$

Figur 174.



Die Konstante des Instruments bestimmt man am besten indirekt in folgender Art: Man führt den Fahrstift sorgfältig über den Umfang eines Kreises von genau abgestochenem Halbmesser von einem Punkte des Umfangs aus bis zum gleichen Punkte zurück und wiederholt zweckmässig sogleich diese Umfahrung in entgegengesetzter Richtung; vor und nach jeder Umfahrung notiert man den Stand der Zählwerke, und während der Umfahrung sieht man darauf, dass die Führungsstangen ihre Richtung ungefähr beibehalten.

Beispiel. Kreis von 10 cm Durchmesser, Umfang 31,42 cm.

| Ablesung vor der 1. Umfahrung | | | Ablesung nach der 1. und vor der 2. Umfahrung | | | Ablesung nach der 2. Umfahrung | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Rad | I | 7,350 | Rad | I | 8,920 | Rad | I | (1)0,550 |
| „ | II | 2,160 | „ | II | 3,800 | „ | II | 5,490 |
| „ | III | 3,440 | „ | III | 5,090 | „ | III | 6,590 |
| | | 12,95 | | | 17,81 | | | 22,63 |

Für die 1. Umfahrung ist $n = 17{,}81 - 12{,}95 = 4{,}86$
„ „ 2. „ „ $n_1 = 22{,}63 - 17{,}81 = 4{,}82$ } Mittel $m = \mathbf{4{,}84}$

$$\text{als Konstante } k = \frac{31{,}42}{4{,}84} = 6{,}50 \text{ cm}$$

Für jede Einheit (ganze Radumdrehung) der Umdrehungszahlen aller drei Räder zusammen ist also die Länge 6,50 cm in Rechnung zu bringen.

Bei Bestimmung der Länge einer vorgelegten unregelmässigen Linie bringt man das Instrument so auf die Zeichnung, dass der Fahrstift im Anfangspunkt steht und die Führungsgriffe bequem liegen, notiert den Stand der Zählwerke und durchfährt nun die gegebene Linie so, dass die Führungsgriffe ungefähr ihre ursprüngliche Richtung beibehalten. Ist der Fahrstift im Endpunkte angelangt, so wird der Stand der Zählwerke wieder abgelesen. Ist $n$ die Differenz der Ablesungssummen vor Beginn und nach Beendigung der Durchfahrung, so ist $k \cdot n$ die gewünschte Länge. Es ist aber, da der Apparat nur 3 Räder besitzt, dringend zu raten, die Befahrung der Linie zu wiederholen, wobei das Instrument so zu legen ist, dass die neue, für diese Befahrung ebenfalls wieder ungefähr beizubehaltende Richtung der Führungsstangen mit der bei der ersten Befahrung vorhandenen nahezu einen rechten Winkel einschliesst. Man erhält so eine zweite Angabe für die Länge der durchfahrenen Strecke, welche unter Umständen von dem ersten Ergebnis nicht unerheblich abweicht, während, wie man sich durch wiederholte Befahrung der gegebenen Linie in derselben Lage des Instruments überzeugen kann, der unregelmässige mittlere Fehler einer Befahrung wesentlich kleiner ist. Das Mittel beider Bestimmungen ist von dem weitaus grössten Teil des sich auf diese Art zeigenden regelmässigen (einseitigen) Fehlers befreit.

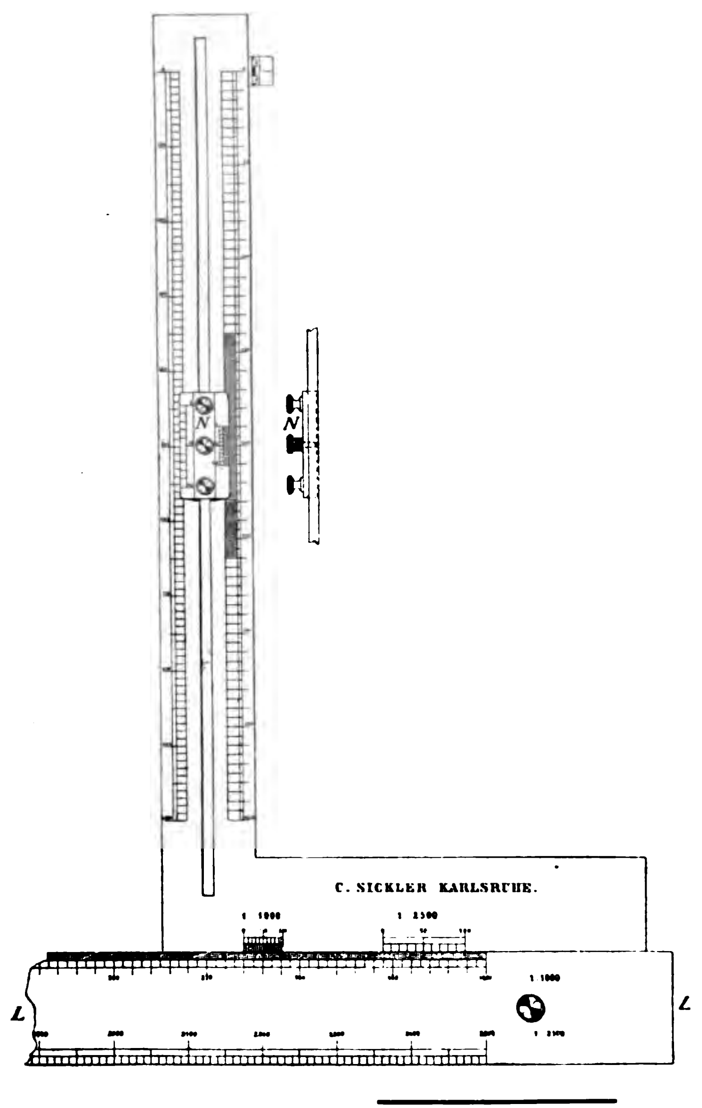
Bei einer solchen Doppelbestimmung mit dem obigen Instrument liegen also z. B. folgende Ablesungen vor:

| Ablesung vor der 1. Durchfahrung | | | Ablesung nach der 1. Durchfahrung | | | Ablesung vor der 2. Durchfahrung | | | Ablesung nach der 2. Durchfahrung | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | Instrument um 90° gedreht. | | | | | |
| Rad | I | 2,475 | Rad | I | 3,490 | Rad | I | 3,624 | Rad | I | 4,500 |
| „ | II | 3,105 | „ | II | 4,120 | „ | II | 4,125 | „ | II | 5,160 |
| „ | III | 5,115 | „ | III | 5,895 | „ | III | 5,900 | „ | III | 6,820 |
| | $N_1 =$ | 10,695 | | $N_2 =$ | 13,505 | | $N_3 =$ | 13,649 | | $N_4 =$ | 16,480 |
| | | $n = 2{,}810$ | | | | | | $n_1 = 2{,}831$ | | | |

Mittel $m = 2{,}82$; Länge $= 2{,}82 \cdot 6{,}50 = 18{,}3$ cm.

## 3. Das Kartierungsinstrument.

Figur 175.




Das Kartierungsinstrument (siehe Fig. 175) von Sickler, besteht aus einem neusilbernen Lineal von 1 m Länge und einem neusilbernen Winkel von 50 und 26 cm Kathetenlänge. Das Lineal ist an den Kanten nach 2 Massverhältnissen geteilt. Die kurze Kathete des Winkels trägt die Nonien für die Teilungen des Lineals. Die lange Kathete, mit denselben Teilungen wie das Lineal, ist der Länge nach geschlitzt. In diesem Schlitz lässt sich ein Schieber mit Druckspitze und Nonien für die beiden Teilungen bewegen.

Das Kartierungsinstrument wird zum Auftragen der Koordinaten benützt.

## 4. Die Heliotrope.

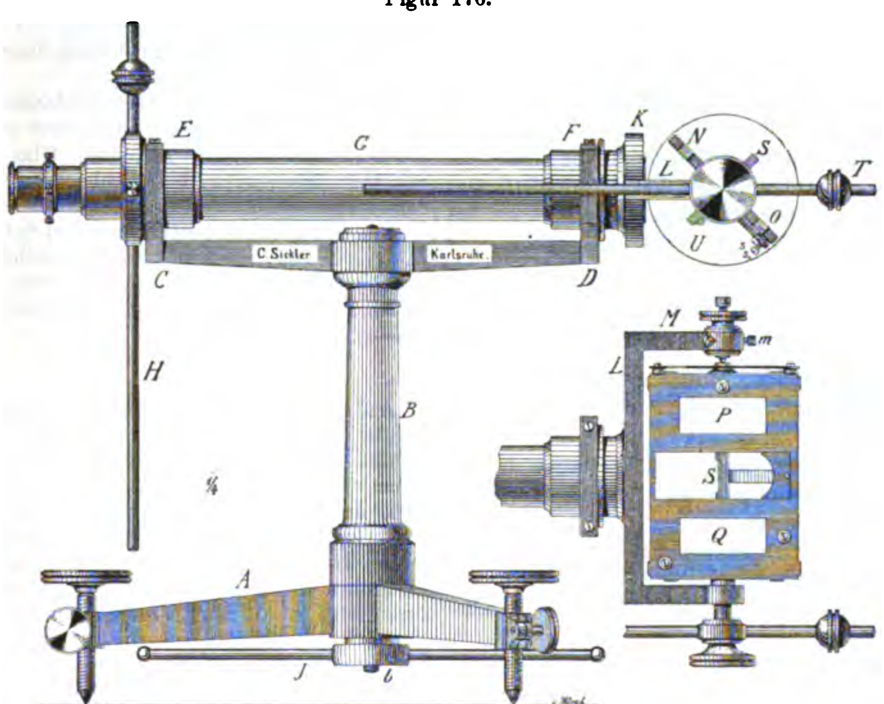
**Frage 142.** Was ist ein Heliotrop?

**Bemerkung.** Das Wort Heliotrop stammt vom griechischen „helios“, die Sonne, und „trepo“, wende, ist also wörtlich mit „Sonnenlichtwender“ zu übersetzen. Als Erfinder des Heliotrops gilt Gauss.

**Antwort.** Ein Heliotrop ist eine mechanische Vorrichtung, welche gestattet, das auf sie fallende Sonnenlicht nach einer bestimmten Richtung hinzusenden. Ein Heliotrop besteht im wesentlichen aus einem Spiegel und einer Richtungsvorrichtung. Die wichtigsten Heliotrope sind jene von Gauss, Steinheil und Bertram.

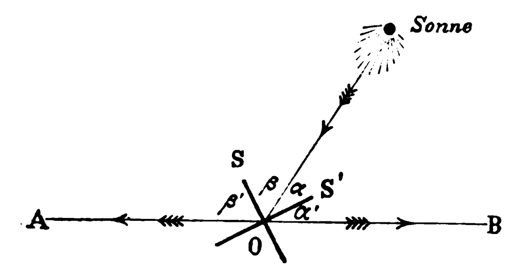
---

Figur 176.




**Frage 143.** Welches ist das Prinzip des Heliotrops von Gauss?

Figur 177.




**Antwort.** Seien (vergl. Figur 177) $S$ und $S'$ zwei aufeinander senkrechte Spiegel. Der von der Sonne kommende Strahl wird von beiden reflektiert, und zwar von $S'$ gegen $A$ und von $S$ gegen $B$. Es lässt sich nun zeigen, dass die Richtungen $OA$ und $OB$ einer Geraden angehören. Denn weil $S \perp S'$, muss nach dem Gesetze der Reflexion:

$$\sphericalangle \beta' = \sphericalangle \beta$$

und ebenso:

$$\sphericalangle \alpha' = \sphericalangle \alpha$$

Da aber:

$$\sphericalangle (\alpha + \beta) = 90^\circ$$

so muss wegen:

$$\sphericalangle (\alpha' + \beta') = \sphericalangle (\alpha + \beta)$$

auch:

$$\sphericalangle (\alpha + \alpha' + \beta + \beta') = 180^\circ$$

Auf diesem Prinzip ist das Gausssche Heliotrop aufgebaut.

---

**Frage 144.** In welcher Weise wird das Heliotrop gebaut?

**Antwort.** Die wesentlichen mechanischen Bestandteile des Heliotrops von Gauss sind:

a) das Gestell,
b) das Fernrohr,
c) das Spiegelwerk.

Das Gestell *B* (vergl. Figur 176) hat nicht nur die Bestimmung, das Fernrohr zu tragen, sondern es soll auch gestatten, dasselbe sowohl um die horizontale als auch um die vertikale Achse zu drehen, wozu die Hebel *J* und *H* dienen.

Das Fernrohr ist ein astronomisches und mit einem Fadenkreuz versehen, und besitzt vor dem Okular ein gefärbtes Glas zum Schutze der Augen bei Beobachtung der Sonnenstrahlen.

Das Spiegelwerk besteht aus drei Spiegeln *P*, *Q*, *S*, von denen *P* und *Q* parallel und *S* senkrecht auf dieselben gestellt sind. Ein Hebel *T* ermöglicht eine beliebige Drehung.

**Bemerkung.** Es muss nämlich die Durchschnittslinie der beiden Spiegel senkrecht auf die Richtung der Sonnenstrahlen sein, wenn das in der vorigen Frage aufgestellte Prinzip Geltung haben soll.

**Bemerkung.** Das Heliotropenlicht ist bis auf 100 km und darüber sichtbar. Heutzutage wird auch mitunter das elektrische Licht verwendet, welches in der Nacht, anvisiert, fast auf noch grössere Strecken sichtbar ist als das Heliotropenlicht.

---

**Frage 145.** Wie wird das Gausssche Heliotrop angewendet?

**Antwort.** Um das Heliotrop zu gebrauchen, richtet man das Fernrohr auf denjenigen Punkt, der das Sonnenlicht empfangen soll. Dabei muss das Spiegelwerk so zurückgedreht sein, dass man über den kleinen Spiegel *S* den Gegenstand am Fadenkreuz erblickt. Dann dreht man, durch das Okular des Fernrohrs sehend, sowohl das Fernrohr mit dem Hebel *H* als auch die Spiegel mit dem Hebel *T*, bis das Sonnenbild auf dem Fadenkreuz erscheint.

**Bemerkung.** Bei der Rektifikation des Instruments muss man auf folgende 4 Punkte besonders achten:

1) Ob die Drehachse der Spiegel senkrecht steht auf der Fernrohrachse.

2) Ob die Spiegel ihrer Drehachse parallel sind.

3) Ob die beiden Hälften *P* und *Q* des grossen Spiegels untereinander parallel sind.

4) Ob die beiden Spiegel aufeinander senkrecht stehen.

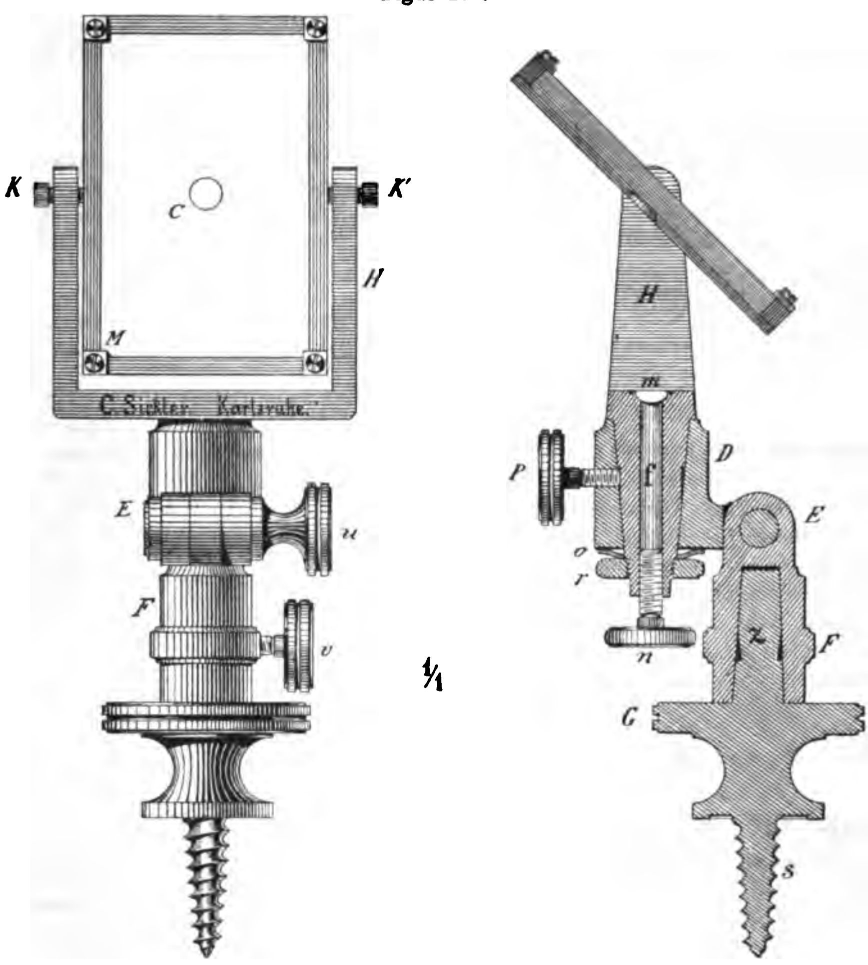
Wir gehen auf diese Rektifikationen nicht ein, da die Heliotrope in der niederen Messkunde selten verwendet werden, und man Instrumente guter Firmen (Spezialfirma: C. Sickler Karlsruhe in Baden) wohl nie zu rektifizieren braucht.

---

**Frage 146.** Wie ist das Heliotrop von Steinheil gebaut?

**Antwort.** Das Heliotrop von Steinheil besteht nur aus einem einzigen Spiegel *M*, der um die Achse *KK'* drehbar ist und in dessen Mitte ein kleines Scheibchen *C* (siehe Figur 178) des Beleges abgelöst erscheint. Durch die Schrauben *n* und *v* kann dem

Figur 178.




Heliotrop von Steinheil, gebaut von der Firma K. Scheurer in Karlsruhe (Baden).

Instrument eine beliebige Stellung gegeben werden. Gegenüber der Oeffnung *C* befindet sich eine Linse *m* und unter derselben in der Bohrung *F* eine glatte, spiegelnde Fläche am Ende der Schraube *n*. So dass, wenn die Sonnenstrahlen durch die Oeffnung *C* auf *m* fallen, sie wieder gegen die Oeffnung *C* reflektiert werden und um die Rückseite derselben einen hellen Lichtring bilden. Ist dieses geschehen, so liegen Sonne, die Oeffnung *C*, die Linse *m* in einer Geraden.

**Bemerkung.** Was den Gebrauch des Heliotrops von Steinheil anbetrifft, so wird zunächst derjenige Punkt, der das Licht empfangen soll, durch ein Fernrohr anvisiert. Hieraus stellt man das Heliotrop vor das Fernrohr, so dass man durch die Oeffnung *C* hindurchsehen kann, und bringt das Sonnenbild nach *C* herum.

## IX. Die Wassermessung.

**Frage 147.** Was versteht man unter Wassermessung?

**Antwort.** Unter Wassermessung im allgemeinen werden alle jene Arbeiten verstanden,

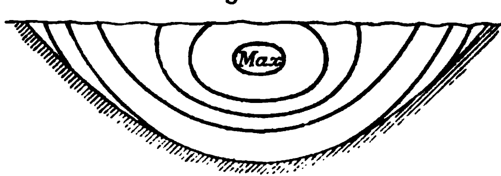
**Bemerkung.** Die Wassermessung wird auch Hydrometrie genannt und gehört streng genommen in die Lehre vom Wasserbau.

die angestellt werden müssen, wenn man die **Geschwindigkeit** und die **Wassermenge** irgend eines fliessenden Wassers bestimmen will.

---

**Frage 148.** Was versteht man unter der Geschwindigkeit des Wassers?

Figur 179.




**Bemerkung.** Man kann als genäherte Regel aufstellen, dass in der Mitte eines Flussbettes von der in der Figur 179 dargestellten Form an der Oberfläche die Geschwindigkeit zweimal so gross ist als am Grunde, und dass man die mittlere Geschwindigkeit des Profils hinreichend nahe erhält, wenn man von beiden Seiten die Geschwindigkeit an der Oberfläche etwa in der Entfernung:

$$\frac{b}{6}$$

vom Ufer misst, wo $b$ die Flussbreite bezeichnet.

Unter Geschwindigkeit des Wassers versteht man den Weg, den ein Wasserteilchen in 1 Sekunde zurücklegt. Man sagt z. B.: Dieser Fluss hat eine Geschwindigkeit von:

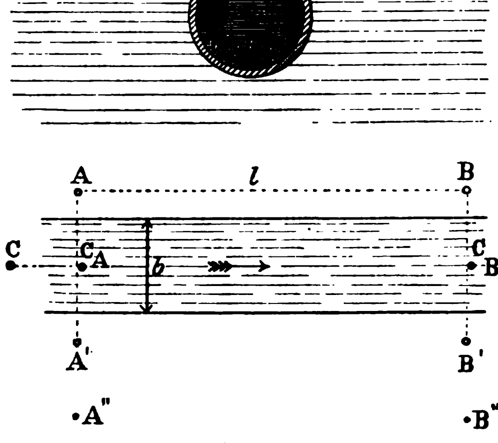
$$5\ m/s$$

(Meter per Sekunde). Die Geschwindigkeit der Wasserteilchen in einem Flusse hängt von der Tiefe desselben und vom Querprofil ab. Die Kurven, welche alle Punkte gleicher Geschwindigkeit des Querprofils verbinden, werden Isotachen genannt. Die Figur 179 gibt ein Bild vom Verlauf dieser Linien in einem gewöhnlich vorkommenden Querprofil. Man sieht, dass das Maximum etwa in der Mitte des Flusses etwas unter der Wasserfläche stattfindet.

---

**Frage 149.** Wie wird die Wassergeschwindigkeit gemessen?

Figur 180.




Figur 181.

**Antwort.** Zur Messung der Wassergeschwindigkeit hat man mehrere Methoden:

1) **Methode der schwimmenden Kugel.** Man benützt eine Hohlkugel aus Holz, die mit einer verschliessbaren Oeffnung versehen ist und so mit Schrot gefüllt wird, dass nur ein kleiner Teil von ihr über die Wasserfläche hervorragt (vergl. Figur 180).

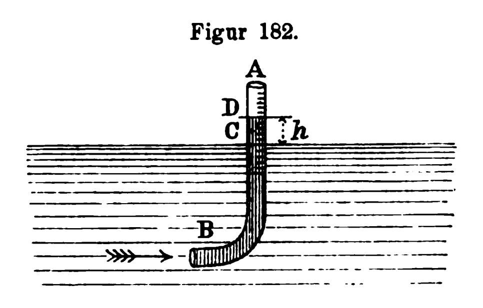
Sodann wird am Ufer des Flusses eine ihm parallele Strecke $AB$ (vergl. Fig. 181) abgesteckt und genau gemessen und an beiden Endpunkten derselben am andern Ufer zwei senkrecht auf ihr stehende Baken eingepflanzt. Nun wird die Kugel etwa 4—5 m vor dem Profil $AA'$ in einer Entfernung $b:6$ vom Ufer losgelassen. In $A''$ und $B''$ stehen zwei Beobachter mit gut gehenden Sekundenuhren und merken die Zeit an, zu welcher die Kugel die Verbindenden $AA'$ und $BB'$ passiert. Seien $t_A$ und $t_B$ diese Zeiten, so wird die Geschwindigkeit $v$ gleich:

$$v = \frac{l}{t_B - t_A}$$

wobei $l$ die Länge der Strecke $AB$ in Meter

**Bemerkung.** Man sieht, dass die nebenstehende Methode ein wenig umständlich ist und zwei geübte Beobachter erfordert, auch verfügt man nicht überall über geradlinigen Lauf des Flusses, sodann ist die gewonnene Geschwindigkeit nur die mittlere der durchlaufenen Strecke. Man hat daher andere Methoden ersonnen, welche die Geschwindigkeit an einzelnen Punkten zu messen gestatten.

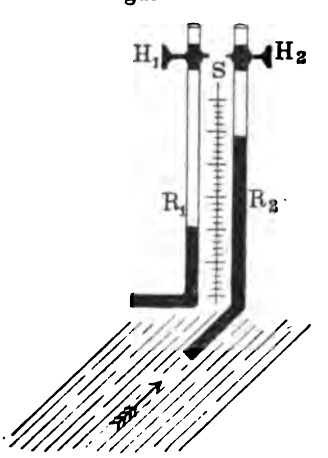
Figur 182.




**Bemerkung.** Die Pitotsche Röhre wird aber in dieser einfachen Gestalt nicht gebraucht, man verwendet andere Formen. So werden z. B. zwei solche Röhren ($R_1$ und $R_2$ in der Fig. 183) an einem Massstab $S$ miteinander verbunden. Die Oeffnung der einen $R_2$ ist gegen die Stromrichtung, die Oeffnung der zweiten $R_1$ senkrecht gegen die Stromrichtung gerichtet. Beide Röhren sind oben durch die Hahnen $H_1$ und $H_2$ verschliessbar.

Das Instrument wird mit geöffneten Hahnen $H_1 H_2$ ins Wasser gesenkt, sodann die Hahnen geschlossen. Zieht man das Instrument aus dem Wasser heraus, so kann man bequem an der zwischen beiden Röhren befindlichen Skala die Höhendifferenz $h$ ablesen.

Figur 183.




und $t_B - t_A$ den Zeitunterschied in Sekunden bezeichnet.

2) Messung mit Hilfe der Pitotschen Röhre.

Die Pitotsche Röhre ist eine gläserne Knieröhre (vergleiche Figur 182), welche mit einer Teilung $C$ in Centimeter oder Millimeter versehen ist.

Wird das offene, gebogene Ende $B$ gegen die Strömung gekehrt, so steigt in der Röhre die Flüssigkeit und zwar proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit $v$. Sei also $h$ diese Erhebung ($CD$ in der Figur 182), so kann man setzen:

$$h = cv^2$$

wobei $c$ eine konstante Zahl bezeichnet, die für jedes Instrument verschieden ist und durch Versuche bestimmt werden muss. Man kann also setzen:

$$v = \sqrt{\frac{h}{c}}$$

oder kurz:

$$v = c' \sqrt{h}$$

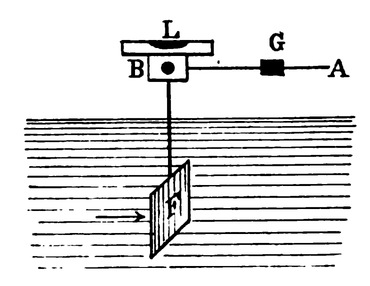
Die Pitotsche Röhre hat mit der früher und nachstehend beschriebenen Methode den Nachteil, dass man mit ihr nur die Wassergeschwindigkeit nahe der Oberfläche bestimmen kann.

3) Das Rheometer wird wenig gebraucht, weil es sehr unsicher ist. Das Instrument besteht aus einer Stossfläche $F$ (vergl. Figur 184) und einem Wagearm $A$ mit einem verschiebbaren Gewicht $G$, welches so lange verschoben wird, bis die Libelle $L$ einspielt. Das ganze Instrument muss natürlich um die Achse $B$ drehbar sein. Die Geschwindigkeit ist proportional der Quadratwurzel des der Gewichtverschiebung entsprechenden Gewichtes $G$, also ist:

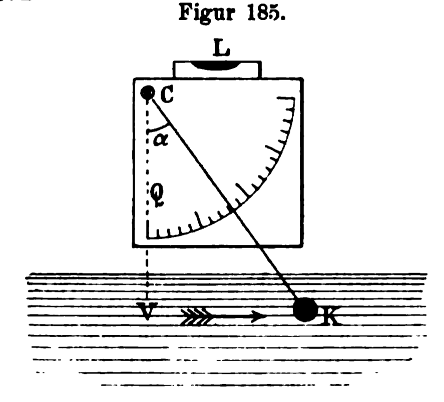
$$v = c \sqrt{G}$$

wobei $c$ eine Erfahrungskonstante ist.

Figur 184.



Figur 185.




4) Der Stromquadrant (vergleiche Figur 185) besteht aus einem in Grade geteilten Quadranten $Q$ und aus einer im Mittelpunkte $C$ mittels eines Fadens aufgehängten Metallkugel $K$ von etwa 5 cm Durchmesser.

Die Geschwindigkeit ist proportional der Quadratwurzel aus der Tangente des Abweichungswinkels:

$$\alpha = \sphericalangle VCK$$

von der Vertikalen, man hat also:

$$v = c \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$$

wobei $c$ eine Erfahrungskonstante bezeichnet.

**Bemerkung.** Alle die bisher beschriebenen Methoden wurden aber in der neueren Zeit durch die hydrometrischen Flügel verdrängt, die nicht nur genauere Resultate liefern, sondern auch Messungen in beliebigen Tiefen gestatten.

Wir beschreiben im Nachstehenden einige Repräsentanten dieser Instrumente, welche aus der Fabrik der in diesem Fache speziell renommierten Firma A. Ott in Kempten (Bayern) hervorgegangen sind.

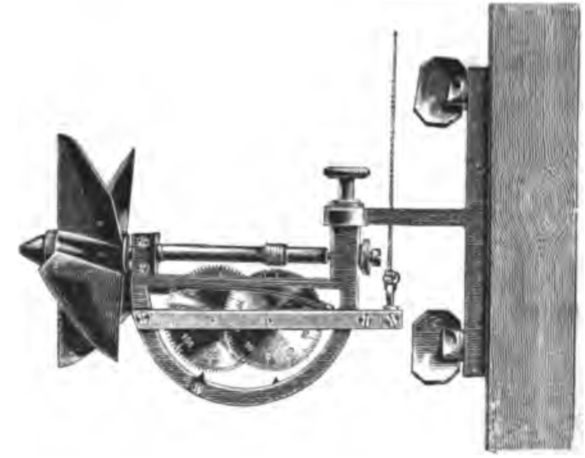
A. Das hydrometrische Flügelrad von Woltmann (vergl. Figur 186) besteht aus einer horizontalen Welle mit mehreren gegen die Achsenrichtung schief stehenden Flügeln, deren Umdrehungszahl innerhalb einer Sekunde die Geschwindigkeit angibt. Um die Zahl der Umdrehungen bestimmen zu können, ist die Welle mit einer Schraube ohne Ende versehen, welche in ein Zählrad eingreift. Dieses hat 100 Zähne und ist mit einem kleineren von 10 Zähnen verbunden, welches wieder ein Rad von 100 Zähnen treibt, so dass man die Zahl von 1000 Umdrehungen leicht an geeignet angebrachtem Index ablesen kann. Das Ganze ist gleich einer Windfahne an einer Stange befestigt. Mittels eines Hebels mit Federung kann die Verbindung (indem man oben an einer Schnur zieht) zwischen Rad und Welle beliebig hergestellt oder abgebrochen werden.

Für die Geschwindigkeit hat man die Erfahrungsformel:

$$v = \alpha + \beta u$$

wobei $u$ die Zahl der Umdrehungen in einer Sekunde, $\alpha$ und $\beta$ aber Erfahrungskonstanten bezeichnen. Die Konstante $\alpha$ bezeichnet jene Geschwindigkeit des Wassers, welche eben noch nicht im Stande ist, den Flügel in Bewegung zu setzen.

Figur 186.



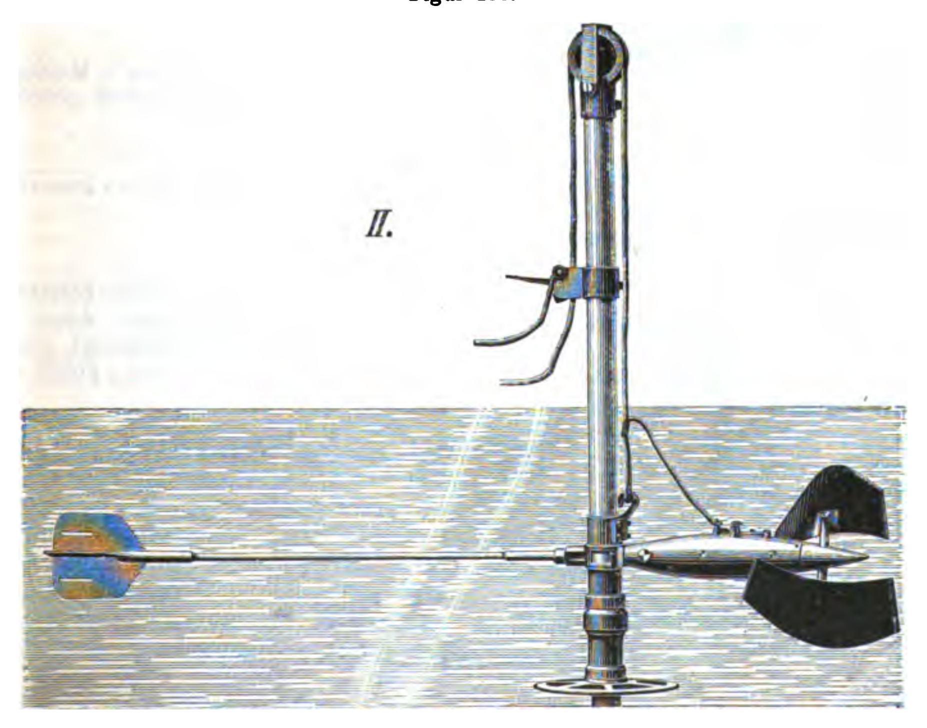
Hydrometrische Flügel mit Zählrädern von O. Ott in Kempten (Bayern).

Figur 187.




Elektrischer Flügel, System Harlacher von A. Ott in Kempten (Bayern).

Figur 188.




Universalflügel von A. Ott in Kempten (Bayern).

B. Der elektrische Flügel von Harlacher unterscheidet sich von dem soeben beschriebenen dadurch, dass die Zahl der Umdrehungen elektrisch registriert wird und ist vorzüglich für sehr genaue **Messungen** bestimmt. (Siehe Harlacher: Die Messungen in der Elbe und an der Donau und die hydrometrischen Apparate und Methoden des Verfassers, Leipzig 1881).

C. Der Universalflügel von A. Ott in Kempten, ebenfalls mit elektrischer Zählung oder mit Glockensignal je nach 50 Umdrehungen. Der Zählapparat ist wasserdicht eingeschlossen, so dass die oft zeitraubende Reinigung entfällt und auch die Funktion des Flügels durch im Wasser schwimmende Körper nicht gehindert werden kann.

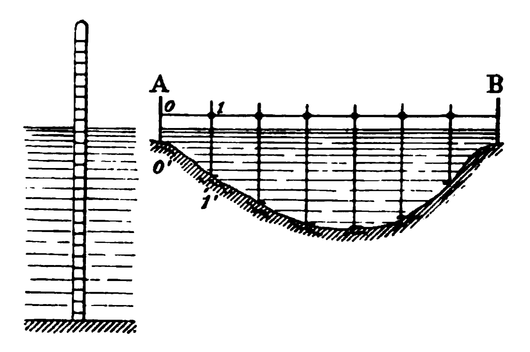
**Frage 150.** Was versteht man unter Wassermenge?

**Bemerkung.** Bei sich gleichbleibendem Wasserstande (d. h. bei unveränderlicher Höhe des Wasserspiegels) ist die Grösse $q$ für einen Querschnitt konstant, anderseits gilt für zwei Querprofile $f$ und $f_1$ die Gleichung:

$$fv = f_1 v_1$$

Diese Gesetze gelten nicht mehr, sobald die Höhe des Wasserspiegels sich ändert, also der Fluss im Steigen oder Fallen begriffen ist.

Figur 189.




**Erkl. 89.** Betrachtet man das Viereck 00′11′ als Trapez, so ist dessen Inhalt gleich:

$$(01)\cdot\frac{00'+11'}{2} = n\cdot\frac{t_1+t_2}{2}$$

ebenso ist der Inhalt des nächsten:

$$n\cdot\frac{t_2+t_3}{2}$$

und des folgenden:

$$n\cdot\frac{t_3+t_4}{2}$$

u. s. w. bis zum letzten:

$$n\cdot\frac{t_{n-1}+t_n}{2}$$

so dass man hat:

$$f = \frac{n}{2}\left[t_1+t_n+2\left(t_2+t_3+\cdots t_{n-1}\right)\right]$$

**Antwort.** Unter Wassermenge versteht man das in einer Sekunde durch ein Querprofil fliessende Wasserquantum. Sei also $v$ die Geschwindigkeit, $f$ die Fläche des Profils, sowie $q$ die Wassermenge, so ist:

$$q = fv$$

Man bedarf also zur Bestimmung der Wassermenge des Querprofils und der Geschwindigkeit.

Um das Profil zu bestimmen, werden am Ufer zwei Pfähle $A$ und $B$ eingeschlagen und über sie eine Schnur, die von Meter zu Meter irgendwie (etwa durch befestigte Holzstücke) gekennzeichnet ist, gezogen. Sodann wird an einzelnen Punkten entweder mit der Sondierstange (vergl. Figur 189) oder mit einer Sondierkette, an deren Ende sich ein Gewicht befindet, die Tiefe gemessen. Als Sondierstangen und Sondierketten können gewöhnliche Messlatten und Messketten verwendet werden.

Seien also:

$$t_1,\ t_2,\ t_3 \cdots t_n$$

die in gleichen Abständen von $n$ Metern gemessenen, so wird das Querprofil gleich:

$$f = \frac{n}{2}\left[t_1+t_n+2\left(t_2+t_3+\cdots t_{n-1}\right)\right]$$

Dieses muss mit der mittleren gemessenen Geschwindigkeit:

$$v = \frac{1}{m}\Sigma v_m$$

wobei $\Sigma v_m$ die Summen aller gemessenen Geschwindigkeiten bezeichnet, deren Zahl wir $m$ voraussetzen, multipliziert werden. So dass also die Wassermenge $q$ gleich wird:

$$q = fv$$

$$= \frac{n}{2m}\Sigma v_m\left[t_1+t_n+2\left(t_2+t_3\cdots t_{n-1}\right)\right]$$

# X. Die Grubenmessung (Markscheidekunst).

## 1. Einleitung und Instrumente.

**Frage 151.** Was versteht man unter der Grubenmesskunst?

**Bemerkung.** Der Name (Markscheidekunst) rührt von Markscheiden her, d. h. die Marken (Grenzen) angeben, durch welche ein abgeschlossener Raum von dem nebenliegenden geschieden wird.

**Bemerkung.** Man geht in der neueren Zeit daran, diesen unsinnigen Gebrauch von altertümlichen Ausdrücken abzuschaffen und benützt fast allgemein die sonst üblichen Benennungen.

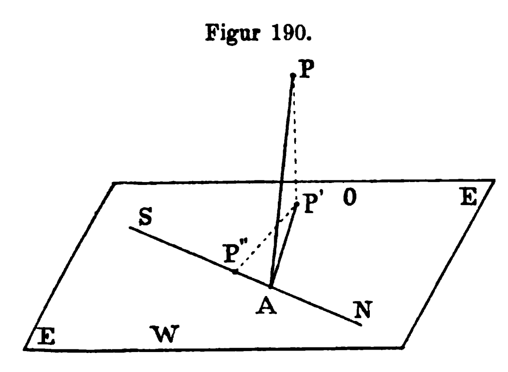
**Antwort.** Unter der Grubenmessung werden alle jene Vermessungen verstanden, vermittelst welcher nicht nur die Dimensionen unterirdischer Gänge, sondern auch ihre Lage untereinander und gegen die sichtbare Oberfläche bestimmt wird.

Die Markscheidekunst besitzt ihre eigene Terminologie. Diese ganz zwecklose Einrichtung nötigt uns eine kurze Zusammenstellung der angewandten Ausdrücke zu geben, die wir in der Folge in die Klammer neben den gebräuchlichen setzen werden.

---

**Frage 152.** Welches sind die in der Grubenmessung angewandten geometrischen Bezeichnungen?

Figur 190.




**Bemerkung.** Die Gerade $PP'$ heisst auch Seigerhöhe oder Seigerteufe. Es ist leicht einzusehen, dass durch die Seigerteufe, den Streichungs-Sinus und -Cosinus die Punktlage bezüglich der Ebene $E$, $A$ als Anfangspunkt vorausgesetzt, bestimmt ist. Man beachte die Analogie mit einem rechtwinkligen Koordinatensystem.

**Bemerkung.** Die Länge kann östlich oder westlich sein, die Breite nördlich oder südlich. In der Figur 190 hat der Punkt $P$ eine südliche Breite und östliche Länge, wenn $O$ die Ost- und $W$ die Westrichtung bezeichnet. Man spricht vom wahren (reduzierten) Streichen wenn sich die Streichung auf den astronomischen Meridian bezieht, sonst

**Antwort.** Um die in der Grubenvermessung gebräuchlichen Ausdrücke klarzustellen, betrachten wir einen Punkt $P$ (vergleiche Figur 190) über der horizontalen (söhligen) Ebene $EE$. Seine horizontale Projektion sei $P'$ (Seigerpunkt), so dass die Gerade $PP'$ die vertikale (seigere) Richtung darstellt. Dann stellt $P'A$ die Horizontalprojektion (Sohle oder Ebensohle) von $AP$ dar.

Der Winkel $PAP'$ (Tonlagewinkel) gibt die Neigung der Projektion gegen die projizierte Gerade. Dieser Winkel ist positiv (die Linie steigt) wenn er sich über der horizontalen (söhligen) Ebene befindet und negativ (die Linie fällt) wenn er unterhalb der Ebene $EE'$ liegt.

Ist $NS$ die durch $A$ gezogene Nord-Südrichtung oder Mittagslinie und wird $P'P''$ senkrecht gegen $NS$ gezogen, so wird:

$$\sphericalangle NAP$$

der Streichungswinkel (Streichen) von $AB$ genannt. Ferner wird:

$P'P''$ die Länge (Streichungssinus),

$P'A''$ die Breite (Streichungscosinus)

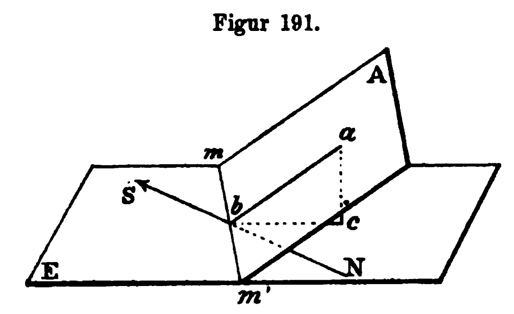
genannt.

Das wirkliche Längenmass einer Linie wird deren Grösse genannt. Jede schiefe (d. h. gegen die horizontale Ebene geneigte) Ebene wird eine flache oder tonnlägige Ebene (resp. Linie) genannt.

Nehmen wir nun an, dass die Ebene $A$ die Horizontale (söhlige) Ebene $E$ in der Geraden $mm'$ (Streichungslinie) schneidet.

vom observierten Streichen, wenn der magnetische Meridian zur Streichung verwendet worden ist.

Figur 191.



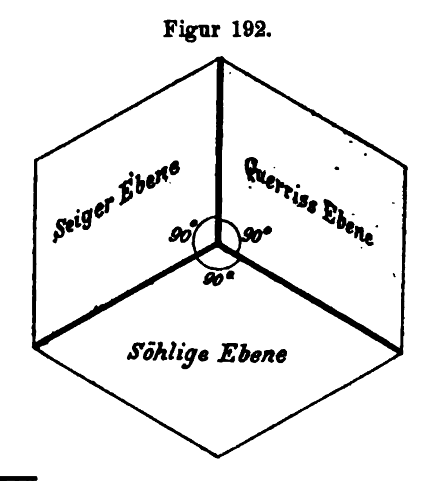

Bemerkung. Der Fallungswinkel führt auch die Namen: das Fallen, das Verflächen, das Einschiessen u. s. w.

Dass alle diese Namen unwissenschaftlich und unnötig sind, bedarf keiner Begründung. So lange die Wissenschaft das Wissen in möglichst ökonomische Form gebracht darstellt, bleibt eine unnötige Terminologie eine Todsünde gegen dieselbe.

Sodann wird jede in der schiefen (tonnlägigen) Ebene $A$ auf $mm'$ (Streichungslinie) gefällte Senkrechte $ba$ wird eine Fallungslinie genannt. Die in der Ebene $E$ auf $mm'$ im Punkte $a$ (vergl. Figur 191) gefällte Senkrechte wird Winkelkreuzstreichungslinie von $A$ genannt. Der Winkel $abc$ heisst der Fallungswinkel.

Ferner wird die Längenmessung, das Abziehen und die Verzeichnung das Zulegen genannt, während das Abstecken nach der Zeichnung das Abgeben heisst. Die vertikale Projektion heisst Seigerriss und eine auf ihr senkrecht gegen die Horizontalebene stehende Projektion der Querriss (auch Kreuzriss genannt). Man hat also drei Grundebenen (vergleiche Figur 192) Seiger- Querriss- und söhlige Ebene.

Figur 192.




## Frage 153. Welches sind die wichtigsten bergmännischen Begriffe und Ausdrücke.

Bemerkung. Da der Ingenieur mit den wichtigsten bergmännischen Ausdrücken vertraut sein muss, fügen wir eine Uebersicht derselben bei, obschon dieselbe streng genommen, zu der Vermessungskunde nicht zu zählen ist.

Bemerkung. Die Lager sind schichtförmige Ablagerungen, während die Gänge nur ausgeführte Spalten des Muttergebirges sind. Sehr kleine Gänge werden auch Adern genannt.

Lager von grosser Dicke und geringer Ausdehnung nennt man Stöcke.

Antwort. Die Erz (oder Kohlen etc.) führenden Schichten werden die Lagerstätte genannt. Geht die Lagerstätte bis an die Oberfläche, so nennt man dieses das Ausgehende oder Ausbeissen der Lagerstätte.

Man unterscheidet plattenförmige, massige und unregelmässige Lagerstätten. Zu den plattenförmigen werden gerechnet die Gänge, Lager, Flötze.

Zu den unregelmässigen Lagerstätten rechnet man die Nester, Putzen und Nieren.

In der Figur 193 ist $A$ das Muttergestein, $C$ die Lager, $B$ das Ausgehende, $D$ ein Gang, $E$ eine Ader, $F$ ein Nest.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

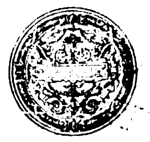
1330. Heft. Preis des Heftes 25 Pf.

Vermessungskunde (Geodäsie). Zweiter Teil. Forts. v. Heft 1329. — Seite 177—192. Mit 27 Figuren.





# Vollständig gelöste



# Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

**viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,**

aus allen Zweigen

der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus **allen Zweigen** der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie**; des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's**; der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar-** u. **Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

**zum einzig richtigen und erfolgreichen**

**Studium**, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

**Dr. Adolph Kleyer,**

Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

# Vermessungskunde

## (Geodäsie).

**Zweiter Teil.**

Nach **System Kleyer** bearbeitet von **Dr. W. Láska.**

Fortsetzung von Heft 1329. — Seite 177—192. Mit 27 Figuren.

**Inhalt:**

Die Grubenmessung (Markscheidekunst). — Instrumente. — Aufgaben. — Die Grubenzüge.

Stuttgart 1894.

Verlag von Julius Maier.

**Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.**

# PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar **in vollständig gelöster Form,** mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe und Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch **alle Teile der reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich **aber** auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften **vorgeführt.**

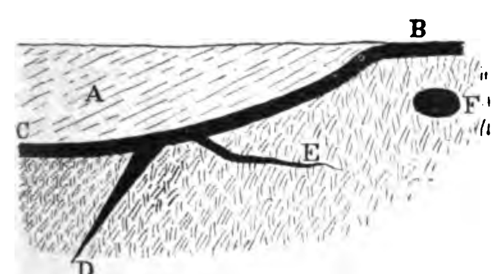
Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze für den** Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles der mathematischen** Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft **keine** Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen, die gehabten** Regeln, Formeln, Sätze etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige Kraft** verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige **und praktische** Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit **Angabe der Namen** verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, **nimmt der Verfasser,** Dr. **Kleyer,** Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen und **wird deren Erledigung** thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

Figur 193.




Ein Gang wird

| | | |
|---|---|---|
| schwebend | genannt, wenn er | 0—15° |
| flach | „ „ „ | 15—45° |
| tonnlägig | „ „ „ | 45—75° |
| stehend (seiger) | „ „ „ | 75—90° |

gegen den Horizont geneigt ist.

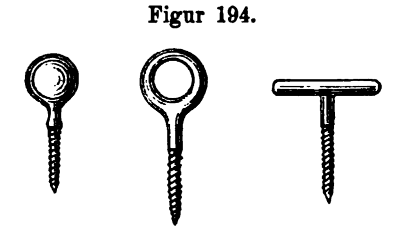
Die übrigen sonst noch vorkommenden Kunstausdrücke werden nötigenfalls an Ort und Stelle erörtert.

---

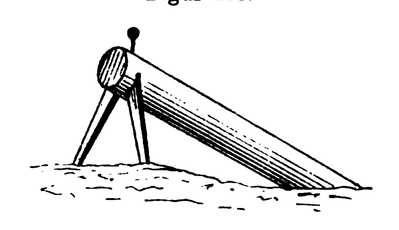
**Frage 154.** Welches sind die einfachsten Gerätschaften, die bei der Grubenmessung gebraucht werden?

**Antwort.** Ausser dem Messbande und der Messlatte (in Oesterreich Lachterkette und Lachterstab genannt, werden noch die Verziehschnur, die Verziehschrauben und der Verziehbock (Verziehschemel) benützt. Die Verziehschnur ist eine etwa 100 m lange Hanfschnur, die entsprechend stark ist, um eine möglichst grosse Spannung auszuhalten. Dieselbe markiert die Richtung der Messung und wird zwischen zwei Punkten ausgespannt, die flache Schnur genannt. Die verschiedenen Formen der Verziehschrauben gibt die Figur 194 wieder. Sie werden wie die Markiernägel zur vorübergehenden Punktbezeichnung benützt und entweder in das vorhandene Zimmerwerk oder in eigens zu diesem Zweck geschlagene Querhölzer (Spreitzen) oder endlich in den Markscheidebock (vergleiche Figur 195) eingeschraubt. Die Form der Verziehschemel gibt die Figur 196, $a$ ist ein Knopf, welcher zur Befestigung der Verziehschnur $S$ dient, welche über die Halbkreisöffnung $b$ gespannt wird, $m$ ist ein Sitzbrett, auf welches sich ein Gehilfe bei der Messung setzen muss, damit der Schemel bei der Arbeit nicht verrückt werde. $p$, $q$ sind Seitenspreitzen, welche die Stabilität der Schemel unterstützen sollen.

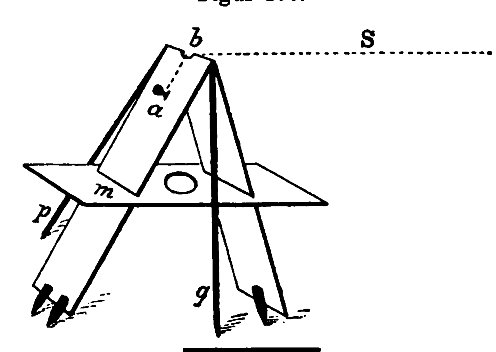
Figur 194.



Figur 195.



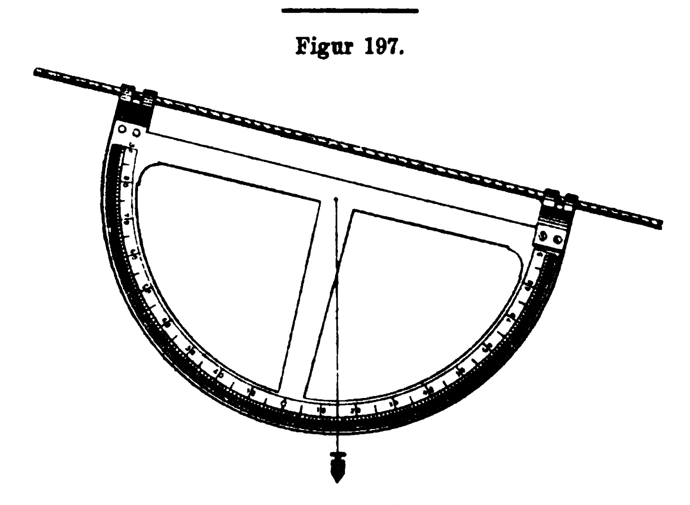
Figur 196.



**Frage 155.** Welche Instrumente werden sonst noch gebraucht?

**Antwort.** Man gebraucht noch in der Grubenmesskunst den Gradbogen, den Hängekompass, das Zulegezeug (ein Auftraginstrument), ferner die Grubentheodolite und Grubensignale.

Figur 197.

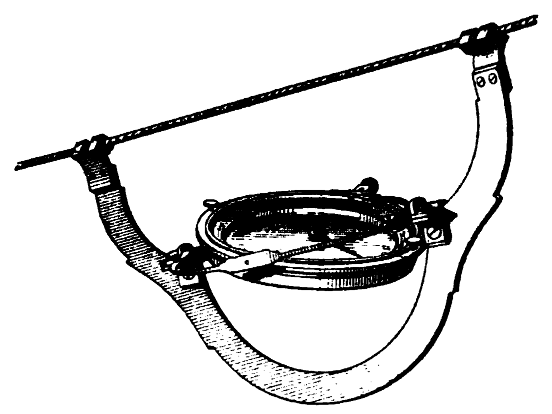


Gradbogen von Breithaupt & Sohn in Cassel.

**Frage 156.** Was ist ein Gradbogen?

**Antwort.** Der Gradbogen besteht (vergleiche Figur 197) aus einem in Grade geteilten Halbkreis, versehen mit einem vom Mittelpunkte aus herabhängenden Lote. An den Enden des Halbkreises befinden sich Haken, um das Instrument auf eine gespannte (flache) Schnur befestigen zu können. Die jedesmalige Ablesung des Lotes gibt die Neigung der Schnur.

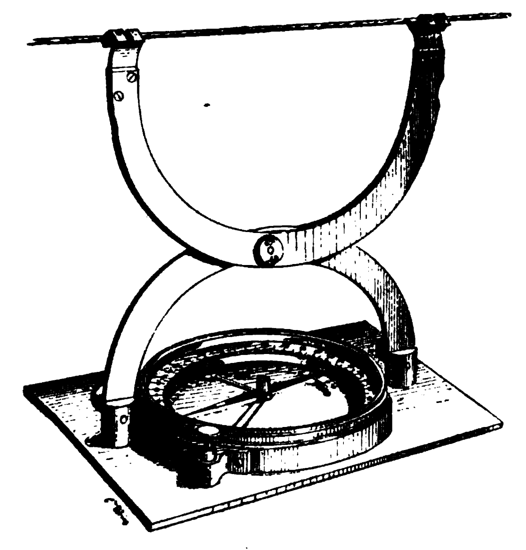
Figur 198.



Hängekompass von F. W. Breithaupt & Sohn in Cassel.

**Frage 157.** Was ist ein Hängekompass?


Figur 199.

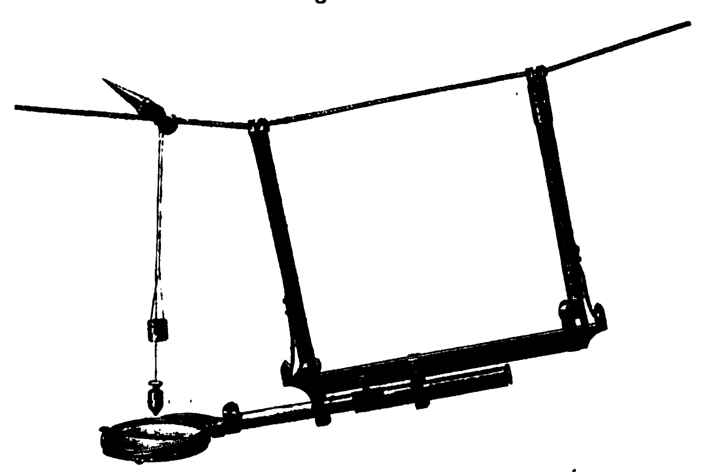


Grubenkompass von F. W. Breithaupt & Sohn in Cassel.

**Antwort.** Der Hängekompass besteht aus einem auf einem Hängezeug befestigten Kompass (vergl. Fig. 198 u. 199). Das Hängezeug hat den Zweck, die jedesmalige Horizontalstellung des Kompasses zu ermöglichen. Eine eigentümliche Form des Hängekompass bringt die Figur 200. Derselbe wird von Albert Ott in Kempten gebaut. Der Kompass wird im Scheitelpunkt des Winkels zentriert und lässt sich auch bei beliebig geneigter Schnur in gleicher Höhe unter dem Pfriemen einstellen. Der eigentliche Kompass muss in dem Kompassring drehbar sein.

**Bemerkung.** Während man also mit Hilfe des Gradbogens die Neigung (den Tonnlagewinkel) bestimmt, dient der Hängekompass zur Orientierung derselben.


Figur 200.



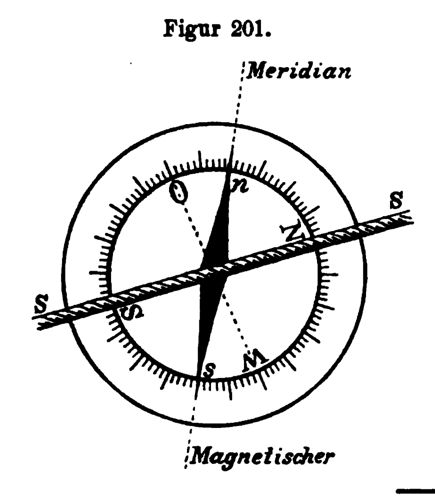
Hängekompass von Albert Ott in Kempten (Bayern).

---

**Frage 158.** Wie wird ein Hängekompass gebraucht?

**Antwort.** Beim Gebrauch wird das Hängezeug auf die Schnur gehängt und sodann der Kompass im Ringe so gedreht, dass die Nord-Süd-Richtung des Kompasses mit der Richtung der Schnur zusammenfällt. Die Nadelablesung am Kompass gibt dann den

Figur 201.



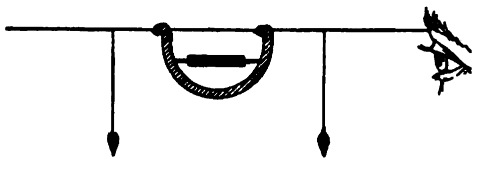

Winkel zwischen der Schnurrichtung und dem magnetischen Meridian (das observierte Streichen der flachen Schnur) an (vergl. Figur 201).

**Frage 159.** Welchen Bedingungen hat ein Hängekompass zu genügen?

**Antwort.** Der richtige Gebrauch des Hängekompasses setzt voraus, dass der Hängering vertikal stehe bei jeder Aufhängung und dass ferner die Nadelmitte des Kompasses in die Vertikalebene des Hängeringes falle. Dass der Kompass selbst bei jeder Lage des Hängeringes horizontal sein muss, braucht wohl nicht erst erwähnt zu werden.

**Frage 160.** Wie wird der Hängering in Bezug auf seine vertikale Lage geprüft?

Figur 202.



**Bemerkung.** Gute Firmen liefern immer sorgfältig gearbeitete Kompasse, unbrauchbar gewordene sende man lieber zur Berichtigung an jene Firma, von welcher das Instrument bezogen wurde.

**Antwort.** Man hängt den Ring auf eine horizontal gespannte Schnur und lässt von den Enden derselben zwei Senkel herabhängen (vergleiche Figur 202).

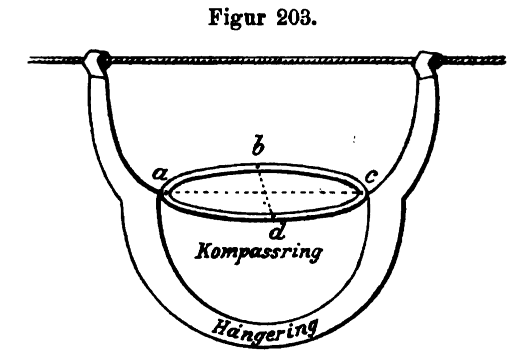
Wird nun nach der Richtung der beiden Senkel visiert, so wird man sofort eine etwaige Abweichung des Hängeringes von der Vertikalen bemerken.

Die Berichtigung geschieht entweder durch Anlötung kleiner Gewichte oder durch entsprechende Umformung der Haken. Dieselbe muss vom Mechaniker ausgeführt werden. Es ist gut diese Untersuchung auch bei einer Schnurneigung, die möglichst gross ist, vorzunehmen.

**Frage 161.** Wie überzeugt man sich, dass die Nadelmitte genau in der vertikalen Ebene des Hängeringes liegt?

**Antwort.** Um sich zu überzeugen, dass die Nadelmitte genau in der Mitte des Hängeringes liegt, untersucht man zunächst, ob das Zentrum des Kompassringes dieser Bedingung genügt und sodann, ob der Kompass selbst im Ringe zentrisch aufgehängt ist.

Figur 203.



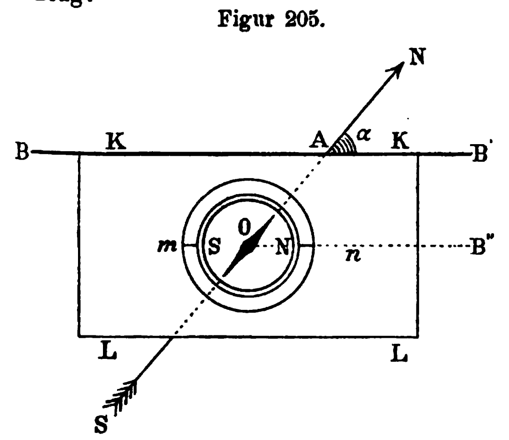

Figur 204.

Am Kompassring sind (vergl. Figur 203) immer die Orientierungsmarken *a*, *c* angebracht, welche die Richtung der gespannten Schnur bezeichnen. Man halbiere nun mit Hilfe eines Zirkels die beiden Hälften des Kompassringes (*b* und *d* in der Figur 203) und zwar auf folgende Weise. Der Abstand *a*, *c* wird in die Zirkelöffnung genommen und mit der Hälfte dieser Länge am Papier ein Kreis beschrieben, den man genau in vier Teile teilt (vergl. Figur 204 *a*, *b*, *c*, *d*), hierauf wird die Seite *ab* in die Winkelöffnung genommen und am Ring selbst von *a* und *c* aus nach beiden Seiten aufgetragen, wodurch man die Punkte *b* und *c* erhält. Nun untersucht man, ob die Entfernung des Punktes *d* von dem innern und äussern Rande genau dieselbe ist wie die entsprechende Entfernung des Punktes *b* von beiden Rändern. Ist dieses der Fall, so liegt der Ringmittelpunkt in der durch den Hängering gegebenen Vertikalen. Nun wird der Kompass in den Ring gelegt und die Nord-Süd-Richtung in Koincidenz mit den Marken *a*, *c* gebracht. Dann muss eine richtige Teilung des Kompasses vorausgesetzt, die Ost-West-Richtung sich mit den Punkten *b* und *d* decken.

**Bemerkung.** Man beachte aber wohl, dass hiebei vorausgesetzt wird, dass der Kompassring sowohl nach innen als auch nach aussen genau konzentrisch abgedreht ist.

**Frage 162.** Was ist ein Zulegezeug?

Figur 205.



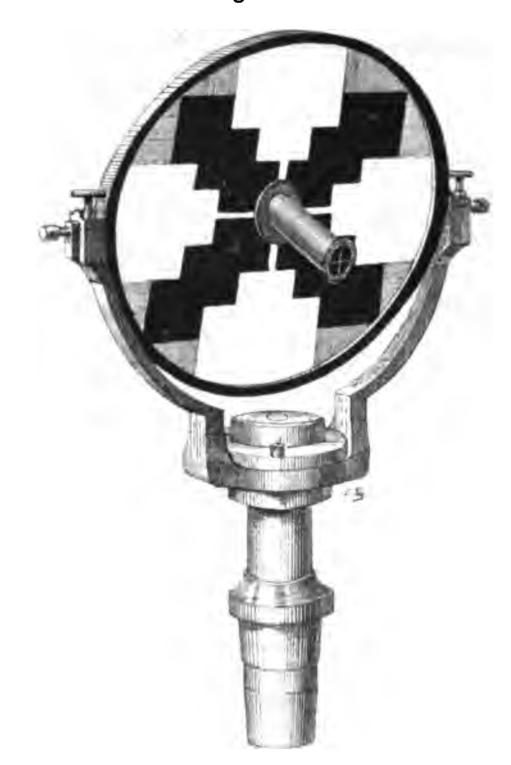

**Antwort.** Das Zulegezeug besteht aus einer rechtwinkligen Messingplatte, auf welcher ein Ring befestigt ist, in welchen der Kompass des Hängezeuges genau passt. Der Ring hat zwei feste Marken *m*, *n* in der Figur 205, die genau die Richtung der ihnen parallelen Kanten *KK*, *LL* angeben. Mit diesen Marken wird die Nord-Süd-Richtung des Kompasses zur Deckung gebracht. Der Gebrauch ist einfach und analog jenem der Kippregel.

Will man z. B. mit Hilfe des Zulegezeuges eine Linie $BB'$ (vergl. Figur 205) ziehen, die einen Winkel:

$$\alpha = \sphericalangle NAB' = \sphericalangle NOB''$$

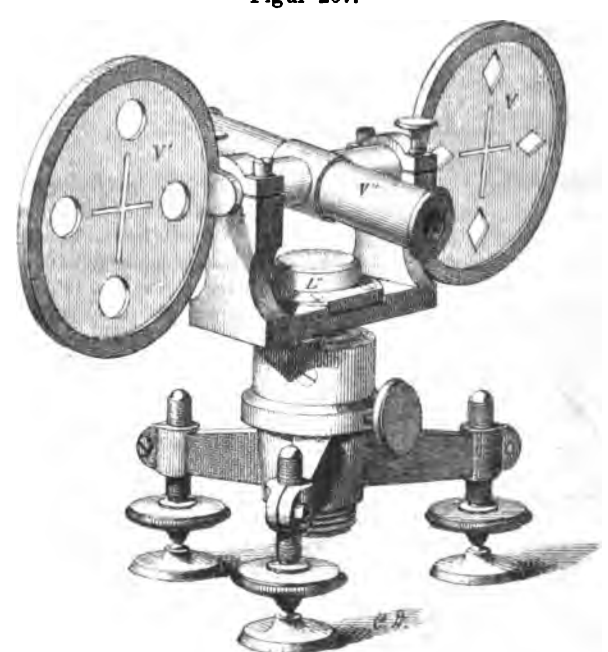
mit der Nord-Süd-Richtung einschliesst, so hat man das Zulegezeug so lange zu drehen, bis das Nordende der Nadel diesen Winkel am Kompass anzeigt. Darauf gibt die Kante $BB'$ die Richtung jener Linie an.

Figur 206.



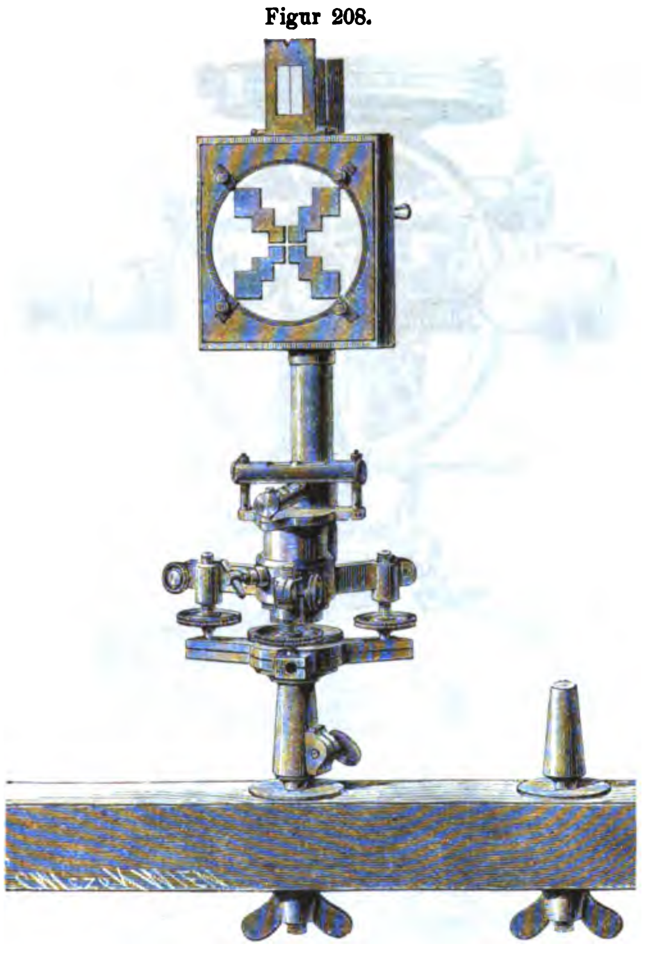
Grubensignal von Breithaupt & Sohn in Cassel.

Figur 207.



Gruben-Doppelsignal von Breithaupt & Sohn in Cassel.

Figur 208.



Grubensignal von Albert Ott in Kempten (Bayern).

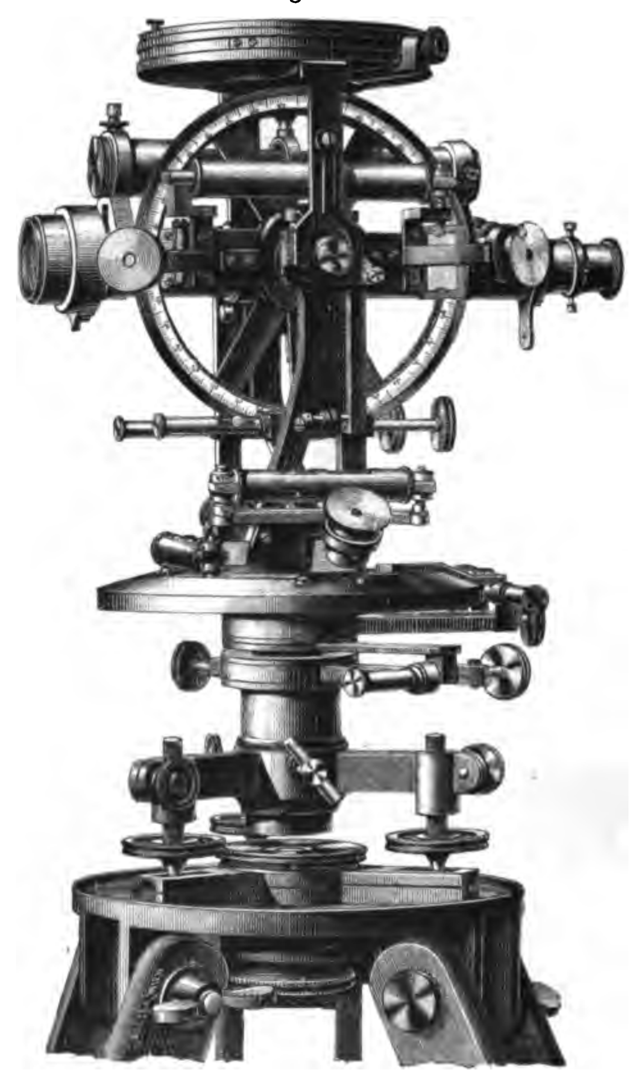
**Frage 163.** Welche Arten der Signale benützt man in der Grubenvermessung?

**Antwort.** Die Signale der Grubenvermessung müssen, da sie zu Arbeiten in der Grube (unter Tage) benützt werden, entsprechend beleuchtet werden. Das geschieht dadurch, dass man hinter die Signalscheiben (vergl. Figur 206) eine Grubenlampe stellt. Bei excentrischen Theodoliten benützt man Doppelsignale, deren Zielpunkte genau so weit von der Mitte des Visurpunktes abstehen, wie die Achse des Fernrohres vom Mittelpunkte des Instruments (vergleiche Figur 207). Um die Achse des Signals genau senkrecht zur Visurachse des Fernrohrs zu stellen, dient ein mit den Visurscheiben $VV'$ festverbundenes Fernrohr $V''$.

Die Figur 208 stellt ein Signal mit Visurdioptern und Querlibellen zum Horizontalstellen dar.

**Bemerkung.** Der hiezu gehörige Theodolit ist in Figur 209 abgebildet.

Figur 209.



Grubentheodolit von Albert Ott in Kempten (Bayern).

---

**Frage 164.** Was ist ein Grubentheodolit?

**Bemerkung.** Die typische Gestalt eines Grubentheodolits gibt die Figur 209 wieder.

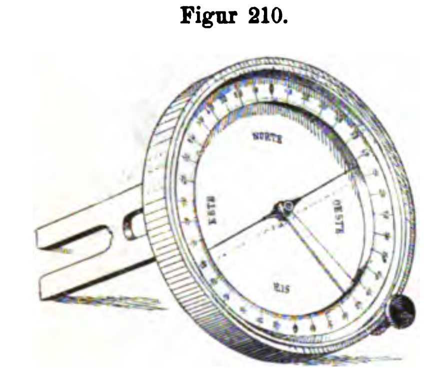
**Bemerkung.** Da beide Kreise genau in derselben Weise verwendet werden und in die Rechnung eingehen, so sollen sie auch gleiche Teilungen besitzen. Es ist gut, wenn zum

**Antwort.** Ein Grubentheodolit ist ein gewöhnlicher Theodolit, der jedoch mit einer genau gearbeiteten Bussole verbunden ist. Um nicht eine Ablenkung der Nadel zu verursachen, darf keiner seiner Bestandteile aus Eisen oder Stahl sein. Auch soll das Fernrohr möglichst lichtstark sein. Der Grubentheodolit wird wie ein Theodolit überhaupt gebraucht. Bezüglich der Aufstellung muss

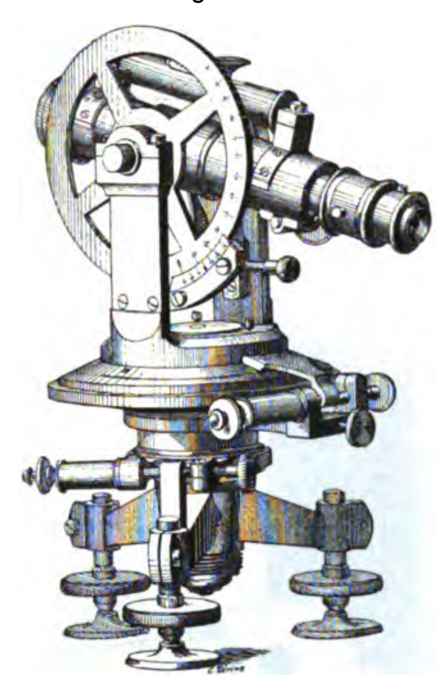
Schutze gegen Staub beide Kreise verdeckt sind. Auch soll die Teilung des Horizontalkreises auf schiefen Konus angebracht sein, weil eine horizontale Teilung sich nur sehr unbequem beleuchten lässt.

bemerkt werden, dass in der Grube (unter Tage) sich im allgemeinen das dreibeinige Gestell nicht immer verwenden lässt, man muss daher zu anderen Befestigungsarten greifen. Eine solche geben wir in der Figur 212.

Figur 210.



Figur 211.



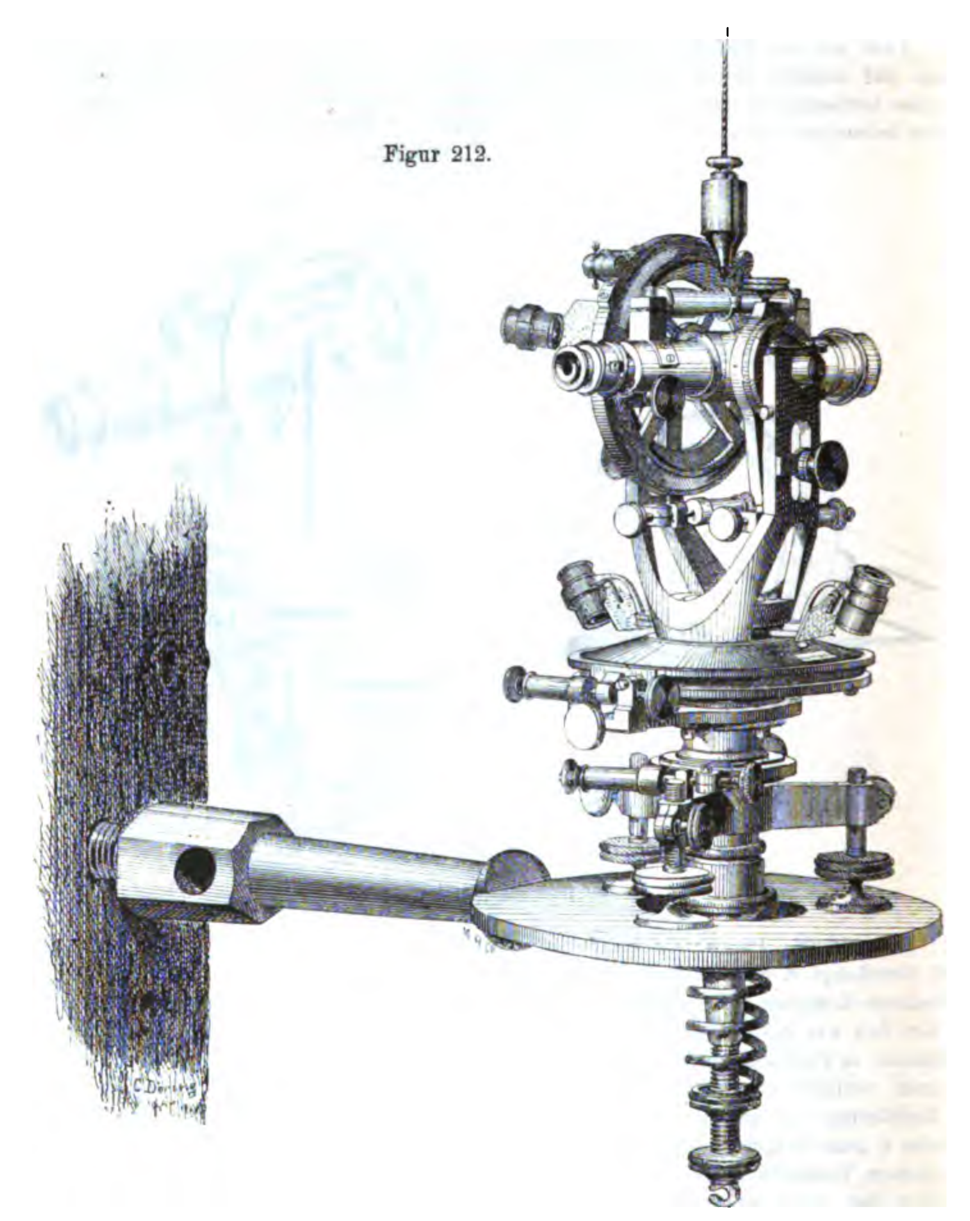
Kleiner Grubentheodolit von F. W. Breithaupt & Sohn in Cassel.

**Bemerkung.** Die älteste Firma, die speziell bergmännische Instrumente baut, dürfte F. W. Breithaupt & Sohn in Cassel sein. Schon im Jahre 1780 fertigte Joh. Chr. Breithaupt Markscheide-Kompasse. Bei Anfertigung und Vervollkommnung dieser Instrumente traten ihm mit der Zeit zur Seite Joh. Gotth. Studer — nachmals sein Schwiegersohn, der 1791 Bergmechanikus in Freiburg wurde — und seine beiden Söhne H. C. Wilhelm und Fr. W. Breithaupt; letzterem verdankt man die Federarretierung, die matte Versilberung der Kompassböden und die Einführung der gewölbten Gläser. — Fr. W. Breithaupt wurde 1806 vom Kurfürsten Wilhelm I. zum Bergmechanikus ernannt. — In dem 1801 von den Gebrüdern Breithaupt veröffentlichten Verzeichnisse aller neu erfundenen und verbesserten mathematischen Instrumente ist schon das zusammenlegbare Gehänge aufgeführt, welches ihr Schwager Studer in seinem 1811 erschienenen Werke: „Beschreibung der beim Bergbau nötigen Vermessungs-Instrumente“ ebenfalls erwähnt.

Die erste Idee, Konstruktion und Ausführung eines theodolitartigen Visier-Instruments mit Nonienablesung zur Zugmessung in der Grube ist vom Hofmechanikus H. C. W. Breithaupt ausgegangen, der im Jahre 1798 im Richelsdorfer Kupfergebirge in Hessen ein Grubengebäude von 178 Lachter Umfang mit seinem neuen Markscheide-Instrument und nach seiner neuen Methode aufnahm.

Die ersten vollkommneren Grubentheodolite konstruierte Fr. W. Breithaupt, und es erhielt im Jahre 1832 die Impérial Brazélian Mining Association zu London die ersten dieser Grubentheodolite, während in Deutschland der erste Grubentheodolit im Jahre 1836 für das

Figur 212.

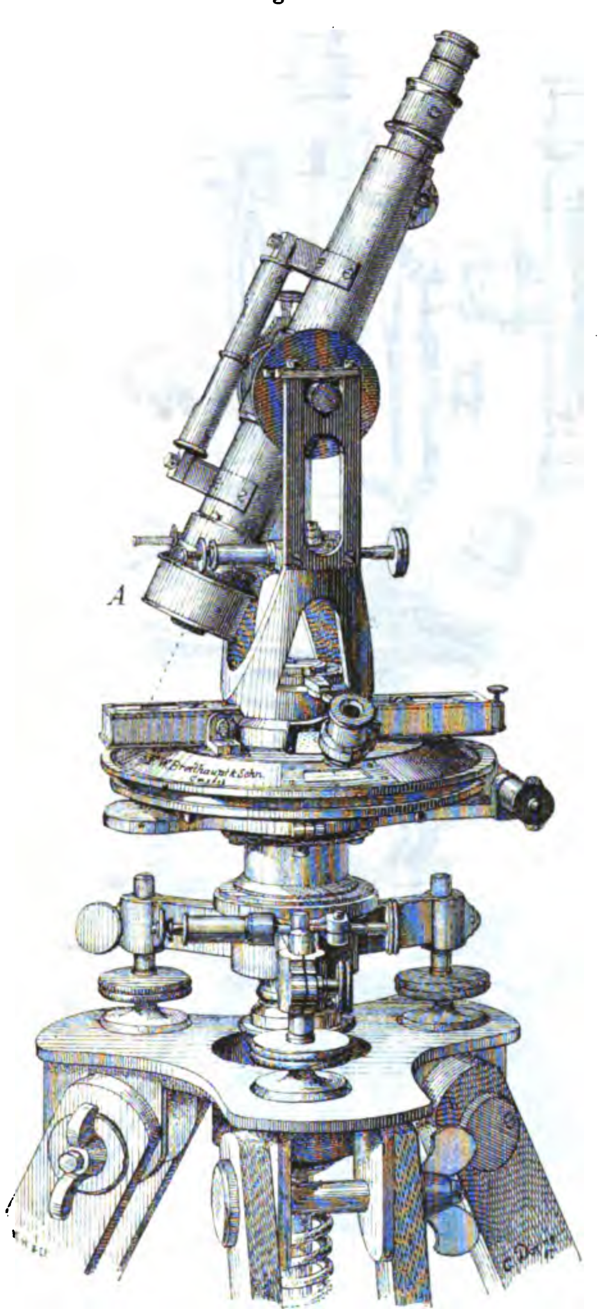


Grubentheodolit mit Aufstellung auf einem Arm von F. W. Breithaupt & Sohn in Cassel.

königl. preuss. Oberbergamt zu Saarbrücken von Breithaupt ausgeführt wurde, dessen Resultate wesentlich zur raschen Verbreitung und Einführung dieser Instrumente beigetragen haben. Mit diesem Theodolit wurde der erste Grubenzug im Jahre 1836 von Markscheider Prediger zur Angabe von Gegenörtern in dem circa 2000 m langen Ensdorfer Stollen der Steinkohlenzeche „Kronprinz“ bei Saarlouis ausgeführt.

Noch zweier Instrumente derselben Firma möchten wir Erwähnung thun. Das erste, „das Orientierungsinstrument“ (vergleiche Figur 213), ist vor allem zur Beobachtung der Nadelschwankungen bestimmt. Zu diesem Zwecke wird vor das Objektiv des Fernrohrs

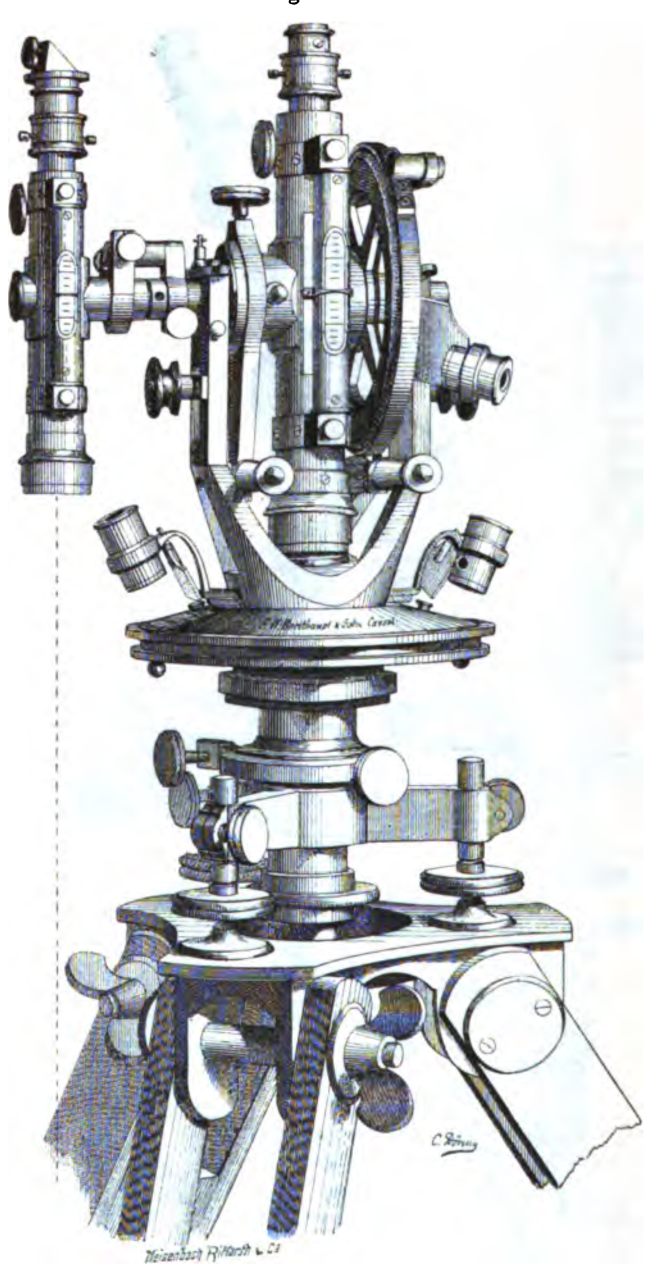
Figur 213.




Orientierungs-Instrument von F. W. Breithaupt & Sohn in Cassel.

noch eine Linse *A* in der Figur 213 vorgesetzt. Stellt man hierauf das Fadenkreuz auf die Nadelspitze, so können leicht die etwa in der Folgezeit eintretenden Variationen des Nadelstandes beobachtet werden. Wird die Aufsatzlinse *A* weggenommen, so kann das Instrument genau so wie ein Theodolit gebraucht werden.

Figur 214.



Grubentheodolit mit seitlichem Fernrohr und Schachtmessungen von F. W. Breithaupt & Sohn in Cassel.

Will man mit dem Orientierungsinstrument nun den Winkel bestimmen, den eine Dreiecksseite über Tage oder eine Polygonseite des Grubenzuges mit der Richtung der Magnetnadel einschliesst, so ist dasselbe an einem Punkt $A$ der Seite aufzustellen, genau zu horizontieren und zu zentrieren. Sind die Nullpunkte der Nonien I und II auf 360° bezw. 180° des Kreises eingestellt, so wird in der Richtung des magnetischen Meridians eine Millimeterskala in geringer

Entfernung befestigt und der Wert der Teile bestimmt. Jetzt öffnet man die Arretierung, klappt die Linse vor das Objektiv und führt, nachdem die Nadel zur Ruhe gekommen, mit der Feinstellung des Kreises die Parallelfäden des Fadenkreuzes im Fernrohr über die Indexlinien der Magnetnadel. Darauf schlägt man die Linse zurück und visiert die Skala an, notiert den betreffenden Millimeterstrich, der in der Mitte der Fäden sich zeigt, löst dann den oberen Klemmknopf und dreht die Alhidade mit dem Fernrohr nach dem Punkt $B$ der Linie, deren Richtung bestimmt werden soll, visiert denselben ein und liest den Winkel ab. Dann öffnet man die untere Klemme und dreht den Kreis mit Alhidade und Fernrohr auf die erste Stellung zurück, klappt die Linse vor das Objektiv und führt die Parallelfäden des Fernrohrs über die Indexlinie der Magnetnadel, klappt die Linse zurück, visiert die Skala an, notiert den betreffenden Millimeterstrich, öffnet wieder die obere Klemme und visiert nach $B$ u. s. w., bringt also das Repetitionsverfahren in Anwendung, zu welchem Zwecke der Theodolit in bekannter Weise eingerichtet ist. Die sich an der Skala zeigenden verschiedenen Werte entsprechen den Variationen der Magnetnadel und geben ein Mittel an die Hand, die einzelnen Messungen auf gleiche Deklination zu reduzieren. Immerhin ist es ratsam, die registrierten Tagesbeobachtungen des nächstliegenden magnetischen Observatoriums zu benutzen.

Das zweite noch zu erwähnende Instrument ist ein Grubentheodolit mit seitlichem Fernrohr zu Schachtmessungen (vergleiche Figur 214).

Das Okular besitzt ein Okularprisma, so dass sich damit bequem auch vertikale Richtungen anvisieren lassen.

---

## 2. Aufgaben.

**Aufgabe 45.** Die Grösse und die Lage einer Geraden im Raume soll bestimmt werden (das Abziehen tonnlägiger Linien).

**Bemerkung.** Eine Gerade ist im Raume bestimmt, wenn wir eine der nachstehenden Gruppen angeben:

| | | |
|---|---|---|
| I. | Länge | $AP$ |
| | Tonnlagewinkel | $PAP'$ |
| | Streichen | $NAP'$ |
| II. | Streichen | $NAP'$ |
| | Ebensohle | $P'A$ |
| | Seigerhöhe | $PP'$ |
| III. | Streichungssinus | $P'P''$ |
| | Streichungscosinus | $P''A$ |
| | Seigerhöhe | $PP'$ |

Die Bezeichnungen beziehen sich auf die Figur 215.

Die erste Gruppe wird direkt gemessen, die zweite und dritte nur aus der gemessenen ersten rechnerisch bestimmt.

**Auflösung.** Die Länge wird mit Messband unter Zuhilfenahme der Verziehschnur gemessen, welche an der Grubenzimmerung oder an Querbalken mittels der Verziehschrauben befestigt ist.

Den Tonnlagewinkel bestimmt man mittels des Gradbogens, welcher in die Mitte der Verziehschnur gehängt wird.

Das Streichen wird endlich mit dem am besten am Ende der Schnur aufgehängten Hängekompass bestimmt.

Die beiden letzteren Winkel können natürlich auch mit Hilfe eines Grubentheodolits aufgenommen werden.

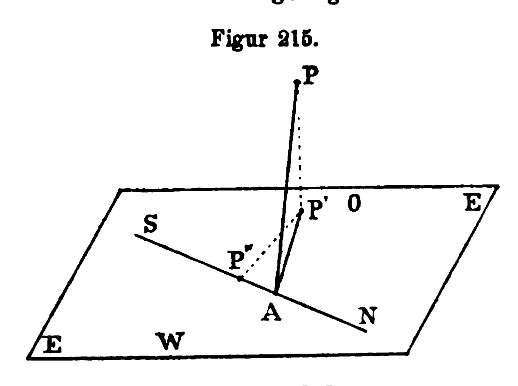
Es muss dann im Eckpunkte der Geraden in gleicher Höhe mit dem Zentrum des Theodolits (Schnittpunkt der horizontalen Drehachse mit der optischen Achse des Fernrohrs) über den Standpunkt ein Grubensignal aufgestellt werden.

Der Tonnlagewinkel wird dann genau so wie die Zenithdistanz (vergleiche Frage 104) gemessen. Dann wird der Kompass aufgesetzt und das Signal des Endpunktes anvisiert, worauf man den Stand der Kompassnadel abliest, welcher das Streichen liefert.

Alle Messungen müssen bei sorgfältig horizontiertem Instrument vorgenommen wer-

den. Die so gewonnenen Grössen werden in das Winkelbuch (Zugbuch) eingetragen.

Figur 215.




## Aufgabe 46. Eine aufgenommene Gerade soll berechnet werden.

**Auflösung.** Betrachten wir die Fig. 215 und bezeichnen:

$$AP \text{ (Länge) mit } l$$
$$\sphericalangle PAP' \text{ (Tonnlagewinkel) mit } \varphi$$
$$\sphericalangle NAP' \text{ (Streichen) mit } \psi$$

so ist im Dreieck $AP'P$:

$$PP' = l \sin\varphi$$
$$P'A = l \cos\varphi$$

Setzen wir nun:

$$AP'' = x \text{ (Streichcosinus)}$$
$$P''P' = y \text{ (Streichsinus)}$$

so folgt aus dem Dreieck $AP'P''$:

$$x = AP' \cos\psi$$
$$y = AP' \sin\psi$$

so dass man also hat, wenn man zufolge den früheren Gleichungen:

$$AP' = l \cos\varphi$$

setzt:

$$x = l \cos\varphi \cos\psi$$
$$y = l \cos\varphi \sin\psi$$

wozu noch $PP' = z$ gesetzt:

$$z = l \sin\varphi$$

kommt. Diese Berechnung bezieht sich natürlich auf das reduzierte Streichen (den wahren Meridian) und wird in das sogenannte Schienbuch eingetragen.

**Bemerkung.** Unter Berechnung einer Geraden versteht man die rechnerische Herleitung der Systeme II und III aus den beobachteten Daten des Systems I.

**Bemerkung.** Durch die drei berechneten Koordinaten $x$, $y$, $z$ ist die Gerade vollkommen bestimmt, und man kann eine jede Projektion von ihr zeichnen. Die Projektion in der söhligen Ebene (Horizontalebene) ist bestimmt durch die Grösse $AP'$ und den Winkel $\psi$.

Das Zulegen (Auftragen, Zeichnen) der Linie hat keine Schwierigkeiten, indem es entweder mechanisch mit Hilfe des Zulegezeugs geschehen kann oder trigonometrisch, d. h. mittels der Koordinaten $x$, $y$, $z$, bewerkstelligt wird.

## Aufgabe 47. Das observierte Streichen soll reduziert werden.

**Auflösung.** Sei $\sigma$ das observierte Streichen, sowie $\delta$ die magnetische Dekli-

nation im Augenblick der Beobachtung, so wird das **reduzierte Streichen:**

$$\varphi = \sigma \pm \delta$$

je nachdem der Kompass **widersinnisch** oder **rechtsinnisch** ist (vergl. Erkl. 90).

**Bemerkung.** Zur Reduktion bedarf man also der Kenntnis der magnetischen Deklination (vergleiche Frage 105 des I. Teiles).

**Erkl. 90.** Ein Kompass heisst **rechtsinnisch**, wenn die Bezifferung im Sinne des Uhrzeigers fortschreitet, im Gegenfalle wird der Kompass **widersinnisch**.

---

**Aufgabe 48.** Es seien zwei Ebenen durch ihre Streichungslinien $ab$, $cd$ und durch ihre Fallungswinkel $\varphi$, $\varphi'$ gegeben, es soll das Streichen ihrer Durchschnittslinie (**Scharungslinie**) bestimmt werden.

**Auflösung.** Man sucht (vergl. Fig. 216) die Streichungslinien beider Ebenen für einen Horizont, der um einen beliebigen Abstand $h$ höher liegt (vergl. Erkl. 91). Diese mögen $a'b'$, $c'd'$ (vergl. Figur 217) sein. Die Schnittpunkte der früheren und der jetzigen Streichungslinien sind beiden Ebenen gemeinschaftlich.

Da nun eine Gerade durch zwei Punkte bestimmt ist, und diese beiden Schnittpunkte Punkte der Scharungslinie sind, so ist die durch sie gelegte Gerade die gesuchte Scharungslinie.

Figur 216.

**Erkl. 91.** Sei $HH'$ eine Horizontale und $A$ eine gegen sie geneigte Ebene (vergleiche Figur 216), sowie $mm'$ die Streichungslinie von $A$ in der Ebene $H$.

Sodann wird die Seite $mm'A$ der Ebene $HH'$, auf welche der Fallungswinkel $\varphi$ zu liegen kommt, die **Liegendseite** und die andere $mm'A'$ die **Hangendseite** der Ebene $AA'$ genannt.

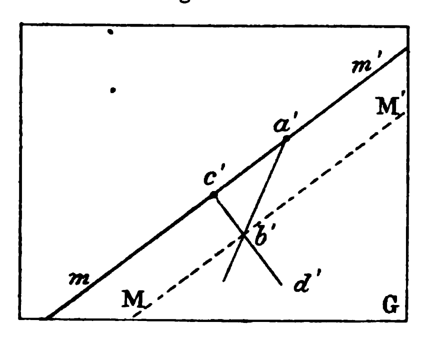
Um nun die Streichungslinie einer Horizontalebene, die um $h$ höher als $HH'$ liegt, zu konstruieren, hat man $ac = h$ zu machen und durch $a$ eine Parallele zu $mm'$ zu ziehen. Dieses wird im Grundriss wie folgt bewerkstelligt.

Man sucht zu $ac = h$ mit Hilfe des $\sphericalangle \varphi$ die Seite $bc$ und zieht durch $c$ eine Parallele zu $mm'$. Sei also (vergleiche Figur 217) $g$ der Grundriss und $mm'$ die Streichungslinie des Horizontes $HH'$, so mache man $a'c' = h$, ziehe $c'd' \perp mm'$ und mache ferner:

$$\sphericalangle c'a'b' = 90^0 - \varphi$$

wird nun durch $b'$ (= Schnittpunkt von $c'd'$ und $a'c'$ mit dem $\sphericalangle 90^0 - \varphi$) eine zu $mm'$ parallele Gerade $MM'$ gezogen, so ist diese die gesuchte Streichungslinie für den neuen Horizont, der um $h$ höher gegen den ersteren liegt.

Figur 217.



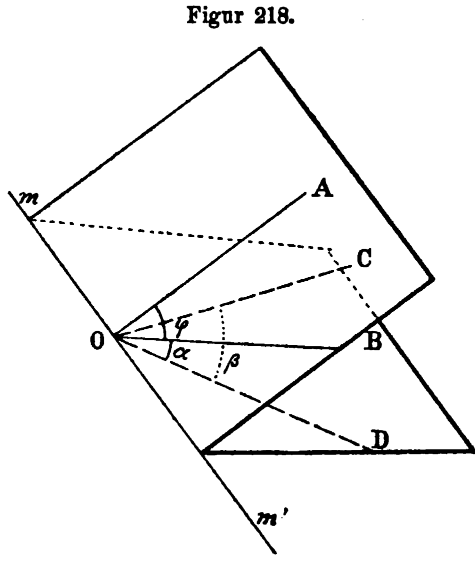

---

**Aufgabe 49.** Es sei von einer Ebene die Streichungslinie und der Neigungswinkel $\beta$ gegen eine bestimmte

**Auflösung.** Es sei (vergl. Figur 218) $mm'$ die gegebene Streichungslinie, ferner

Richtung gegeben, es soll der Fallungswinkel $\varphi$ gefunden werden.

Figur 218.




$AOB$ der Fallungswinkel. Ferner $OC$ und $OD$ die Schnittlinien der von der Fallungsebene $OAB$ unter dem Winkel $BOD = \alpha$ abweichenden Ebene $OCD$. Denken wir uns von $O$ aus eine Kugel mit dem Radius $= 1$ beschrieben, dann erhalten wir das sphärische Viereck $ACBD$ (vergl. Fig. 219), in welchem:

$$AC = \varphi$$
$$BD = \alpha$$
$$DC = \beta$$
$$AC = \delta$$

gesetzt werden soll. $\varphi$ ist zu suchen, $\alpha$, $\beta$ sind gegeben.

Im sphärischen Dreieck $CAM$ haben wir [nach Láska Lehrbuch der sphärischen Trigonometrie, Seite 7, Formel 3a)]:

$$\text{ctg}\,(90 - \beta) = \text{ctg}\,(90 - \varphi) \cos \alpha$$

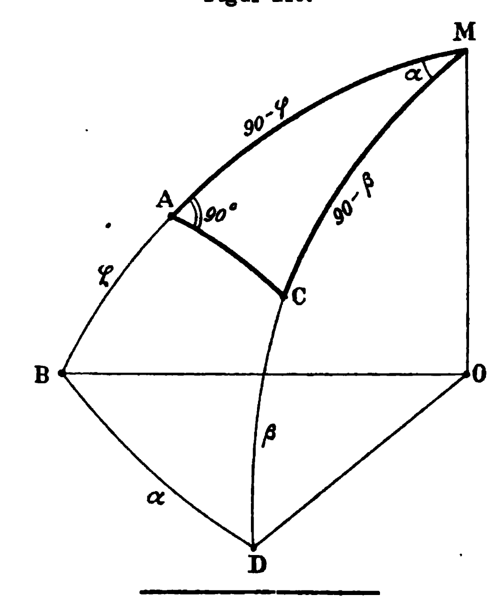
also:

$$\text{tg}\,\beta = \text{tg}\,\varphi \cos \alpha$$

woraus:

$$\text{tg}\,\varphi = \frac{\text{tg}\,\beta}{\cos \alpha} \text{ folgt.}$$

Figur 219.




## 3. Die Grubenzüge.

**Bemerkung.** Die Grubenzüge unterscheiden sich von den trigonometrischen dadurch, dass bei ihnen noch die Neigung gegen den Horizont mit in Rechnung gezogen werden muss. Während es bei einem trigonometrischen Zug genügt, die Längen und Azimute (Brechungswinkel) zu messen, werden beim Grubenzug drei Grössen zu messen sein: die Länge, der Tonnlagewinkel und das Streichen.

Im nachstehenden behandeln wir die streng wissenschaftliche Grubenaufnahme und geben im Anschluss daran die Theorie des Grubenzuges.

**Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.**

**Der ausführliche Prospekt und das ausführliche Inhaltsverzeichnis der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer" kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung gratis und portofrei bezogen werden.**

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist **aufgeschnitten** und gut brochiert, um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). **Jedes Kapitel** enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und **Erklärungen** am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft.

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

---

☛ Das **vollständige**

# Inhaltsverzeichnis

## der bis jetzt erschienenen Hefte

kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

---

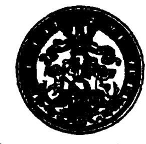
**Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.**

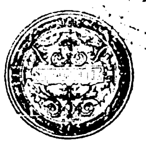
Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

1331. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Vermessungskunde (Geodäsie). Zweiter Teil. Forts. v. Heft 1330. — S. 193—204 u. I—VIII. Mit 9 Figuren. (Schlussheft.)





# Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — **aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie**; des **Maschinen-**, **Strassen-**, **Eisenbahn-**, **Wasser-**, **Brücken-** u. **Hochbau's**; der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar-** u. **Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

**zum einzig richtigen und erfolgreichen**

**Studium**, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

**Dr. Adolph Kleyer,**

Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

## Vermessungskunde

## (Geodäsie).

**Zweiter Teil.**

Nach **System Kleyer** bearbeitet von **Dr. W. Láska.**

Forts. von Heft 1330. — S. 193—204 u. I—VIII. Mit 9 Figuren. (**Schlussheft.**)

**Inhalt:**

Die Grubenmessung (Markscheidekunst). — Die Grubenzüge. — Aufgaben. — Die Lehre von der Ausfertigung der Pläne (Situationszeichnen). — Darstellung des Terrains. — Darstellung von Boden und Kultur. — General-Register. — Titelblatt. — Vorwort. — Inhaltsverzeichnis. — Litteraturverzeichnis.

Stuttgart 1894.

Verlag von Julius Maier.

**Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.**

# PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar **in vollständig gelöster Form,** mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe und Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch alle **Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust,** Liebe und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige Kraft** verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc, welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. **Kleyer,** Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

**Frage 165.** Wodurch wird ein Punkt bei einer Grubenaufnahme bestimmt?

**Antwort.** Um die Lage eines Grubenpunktes zu fixieren, bedient man sich analog wie bei den Horizontalmessungen eines Koordinatensystems, dessen Mittelpunkt durch einen beliebig angenommenen Punkt geht. Die durch diesen Punkt gehende Horizontalebene bildet die $XY$-Ebene des Systems. Die Nord-Süd-Richtung ist die $X$-Richtung und zwar soll diese positiv nach Norden genommen werden. Die positive $Y$-Richtung soll gegen Ost gerichtet sein (für Deutschland); überhaupt soll das Horizontalsystem mit jenem der Landestriangulierung übereinstimmen. Als $Z$-Achsen, positiv nach unten sollen die absoluten Höhendifferenzen zwischen der Höhe des Koordinatenmittelpunktes und des jeweiligen zu bestimmenden Punktes genommen werden.

Sei $h$ der senkrechte Abstand eines Punktes von der $XY$-Ebene, so wird:

$$z = h$$

**Bemerkung.** Der Anfangspunkt des Systems muss genügend vermarkt, und an das Koordinatensystem des Landes angeschlossen werden (etwa mit Hilfe des Pothenotschen Problems, vergl. II. Teil, Seite 49). Durch diesen Anschluss erhält man die absolute Nord-Süd-Richtung, da man ja die Azimute der anvisierten Punkte der Landesaufnahme berechnen kann. Auf diesem Punkt wird nun mit Vorteil das Breithauptsche Orientierungsinstrument aufgestellt (vergl. Figur 213 des II. Teiles). Dadurch wird man im Stande sein, die jeweilige magnetische Deklination absolut zu bestimmen und zwar auf folgende Weise, man stellt die Magnetnadel auf das Fadenkreuz ein und liest den Horizontalkreis ab. Hierauf wird der Horizontalkreis frei gemacht und ein Signalpunkt (etwa Turmspitze) mit bekanntem Azimut anvisiert. Sei $A_m$ die Ablesung der Magnetnadel, $A_s$ jene des Signals, so wird:

$$\alpha_m = A_s - A_m$$

der magnetische Azimut des Objektes sein und seine Differenz gegen den astronomischen (aus der Triangulation berechneten) gibt die augenblickliche magnetische Deklination an.

---

**Frage 166.** Wie werden die Koordinaten eines unter Tage (in der Grube) gelegenen Punktes bestimmt?

**Antwort.** Um die Koordinaten eines unter Tage liegenden Punktes zu bestimmen (z. B. $A$ in der Figur 220), muss man sich zuerst einen Anhaltspunkt ($P$ in der Figur 220) in der Grube festlegen. Dieses geschieht in nachstehender Weise.

Sei $O$ der Ursprung der Koordinaten. Man bezeichne über der Grube einen Punkt $P'$, unter dem in der Grube der Punkt $P$ als liegend angenommen wird. Sodann wird die Entfernung $OP' = l$ gemessen, und auch der Winkel:

$$SOP = W$$

mit einem Theodolit. $S$ ist ein Punkt, dessen Azimut $\alpha_s$ als bekannt angenommen wird. Die Seite $OP'$ schliesst sodann mit der $+X$-Achse den Winkel:

$$\alpha_s + W$$

ein, so werden die Koordinaten des Punktes $P'$ (vergl. Erkl. 92):

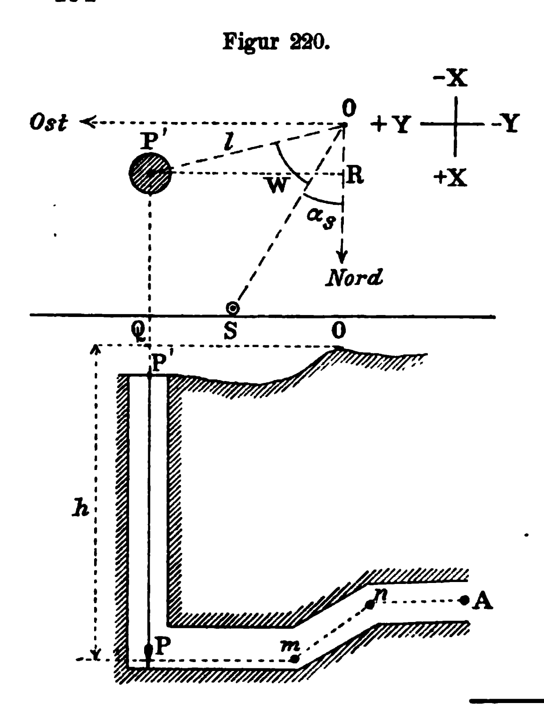
$$x = l \cos(\alpha_s + W)$$
$$y = l \cos(\alpha_s + W)$$

**Erkl. 92.** Man hat im rechtwinkligen Dreieck $P'OR$:

$$OR = x = l \cos(\alpha_s + W)$$
$$PP' = y = l \sin(\alpha_s + W)$$

**Bemerkung.** Die Längenbestimmung von $PP'$ kann auch mit Hilfe des Messbandes geschehen, zu diesem Zwecke werden von 20 zu 20 m Querhölzer in den Schacht, zunächst mit Hilfe einer Schnur eingesetzt. Man kann aber auch schon bei der Bohrung sehr bequem in die Wände von 20 zu 20 m Höhenmarken einsetzen, was sich unbedingt empfehlen dürfte, da etwaige spätere Messungen sich nicht bequem genug ausführen lassen.

Figur 220.




Wird nun von $P'$ aus der Punkt $P$ in der Grube herabgelotet, dann sind $x$ und $y$ auch die Koordinaten des Punktes $P$. Wird noch die Länge $PP'$ direkt und $P'Q$ (wobei $OQ$ die durch $O$ hindurchgehende Horizontalebene darstellt) durch Nivellement bestimmt, so hat man für die $z$-Koordinate des Punktes $P$ den Wert:

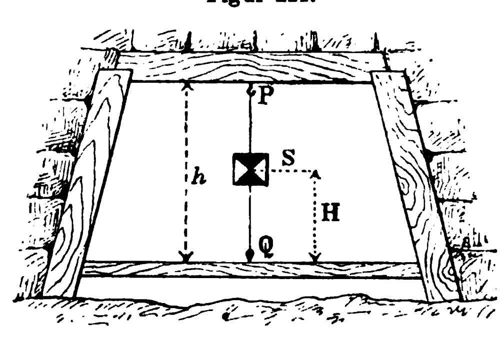
$$z = PP' + P'Q = h$$

Hat man einmal einen solchen Anhaltspunkt in der Grube gekennzeichnet, dann braucht bloss der gesuchte Punkt ($A$) durch einen Koordinatenzug mit dem Anhaltspunkt verbunden zu werden, um seine Koordinaten zu erhalten.

Punkte, die nur als Zwischenpunkte benützt werden (z. B. in der Figur 220, $m$, $n$) werden verlorene Punkte genannt.

**Frage 167.** Wie wird ein Polygonzug in der Grube gemessen?

Figur 221.




**Bemerkung.** Wir nehmen an, dass die Messung mit Hilfe des Fennelschen Fernrohrs (siehe Teil I, Seite 70) oder des Breithauptschen Orientierungsinstruments (Teil II, Seite 187) geschieht.

**Antwort.** Die Aufnahme eines Polygonzuges in der Grube ist wesentlich eine andere, als über Tage.

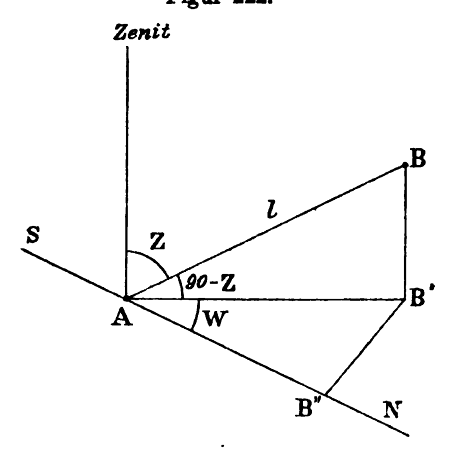
Zunächst werden die Polygonpunkte (z. B. $P$ in der Figur 221) durch Markiernägel gekennzeichnet und zwar in dem oberen Teile der Zimmerung.

Soll eine Vermessung stattfinden, so werden sie auf die Querhölzer $Q$ herabgelotet, wobei zugleich die Höhe $PQ = h$ ermittelt wird. Ueber einen so herabgeloteten Punkt $Q$ wird nun der Theodolit (oder das Signal) zentriert und dabei zugleich die Höhe ($H = SQ$) des Theodolitmittelpunktes (oder Signalmitte) gemessen.

Sei (vergl. Figur 222) in $A$ der Theodolit und in $B$ das Signal aufgestellt, dann wird zunächst am Höhenkreise die Zenithdistanz (nach Frage 104 des II. Teiles) gemessen.

Bei der Messung der Zenithdistanz wird zugleich der Horizontalkreis abgelesen. Vor und nach dieser Messung wird der Stand der Magnetnadel am Horizontalkreis bestimmt, wodurch man die Abweichung der Projektion der Geraden $AB$ von der Richtung des magnetischen Meridians erhält.

Figur 222.




Für die Vermessung gilt also nachstehendes Schema:

I. Zentrierung über $A$ und $B$.

II. Horizontierung des Instruments (nach Frage 97 des I. Teiles)

III. Die Magnetnadel wird anvisiert und der Horizontalkreis abgelesen (Ablesung $Am_1$)

IV. Das Signal wird anvisiert und 1) der Horizontalkreis abgelesen (Ablesung $As_1$)
2) der Höhenkreis abgelesen (Ablesung $Ah_1$)

V. Das Fernrohr wird durchgeschlagen

IV. Das Signal wird anvisiert und 1) der Höhenkreis abgelesen (Ablesung $Ah_2$)
2) der Horizontalkreis abgelesen (Ablesung $As_2$)

VII. Die Magnetnadel wird anvisiert und der Horizontalkreis abgelesen (Ablesung $Am_2$)

Dazu kommt noch:

VIII. 1) Die Länge $AB$ wird mit dem Messband gemessen,
2) die Höhen $h$ am Signal und Theodolit werden gemessen,
3) „ „ $H$ „ „ „ „ „ „

IX. Die Zeiten der Ablesungen $Am_1$ und $Am_2$ werden notiert.

**Bemerkung.** Man trachte die Grössen $h$ und $H$ beim Signal und Theodolit möglichst gleich zu nehmen.

---

**Frage 168.** Wie werden auf Grund der in der vorstehenden Frage gemachten Messungen, die Koordinaten des Signalpunktes berechnet?

**Antwort.** Zunächst ergibt sich aus der Figur 222 leicht, dass man hat:

$$x_B - x_A = AB''$$
$$y_B - y_A = B'B''$$
$$z_B - z_A = B'B$$

wenn $B'B'' \perp AB''$ senkrecht gezeichnet wird und $N$ die Nordrichtung bezeichnet.

**Erkl. 98.** Im rechtwinkligen Dreieck $AB'B''$ hat man:

$$AB'' = AB' \cos w$$
$$B'B'' = AB' \sin w$$

Ferner ist im rechtwinkligen Dreieck $ABB'$, wenn $AB = l$ gesetzt wird:

$$AB' = l \cos(90 - z) = l \sin z$$
$$BB' = l \sin(90 - z) = l \cos z$$

also wird:

$$AB'' = l \sin z \cos w$$
$$B'B'' = l \sin z \sin w$$
$$BB' = l \cos z$$

Ferner ist (vergl. Erkl. 93):

$$x_B - x_A = l \sin z \cos w$$
$$y_B - y_A = l \sin z \sin w$$
$$z_B - z_A = l \cos z$$

Es handelt sich also nunmehr um die Bestimmung von $z$ und $w$.

Für $z$ hat man offenbar:

$$z = \frac{1}{2}(Ah_1 + Ah_2)$$

Um $w$ zu erhalten, verschaffe man sich nach Bemerkung zur Frage 105 des I. Teiles für die Zeiten der Ablesungen $Am_1$ und $Am_2$ die Deklinationen der Magnetnadel $\delta_1$ und $\delta_2$, so wird die Ablesung der Nord-Süd-Richtung:

$$Am_1 \pm \delta_1$$
$$Am_2 \pm \delta_2$$

also die Azimute von $B$:

$$As_1 - (Am_1 \pm \delta_1)$$
$$As_2 - (Am_2 \pm \delta_2)$$

demnach wird:

$$w = \frac{1}{2}(As_1 + As_2) - \frac{1}{2}(Am_1 + Am_2) \mp \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2)$$

wodurch wir alle Grössen zur Bestimmung von:

$$x_B, \quad y_B, \quad z_B$$

erhalten, sobald:

$$x_A, \quad y_A, \quad z_A$$

bekannt sind.

Diese letzteren haben wir aber in der Frage 166 für den Anhaltspunkt bestimmt, so dass wir von Punkt zu Punkt fortschreitend die Koordinaten eines beliebigen Punktes bestimmen können.

Damit ist das Hauptproblem der Grubenvermessung absolviert.

---

## 4. Aufgaben.

**Aufgabe 50.** Ein Punkt in der Grube ist gegeben, man soll über Tage einen Punkt finden, welcher vertikal über dem gegebenen liegt. (Es soll die Oertung eines Punktes an den Tag gebracht werden.)

**Auflösung.** Seien:

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c$$

die Koordinaten des gegebenen Punktes, so sind offenbar:

$$x' = a, \quad y' = b, \quad z' = 0$$

die Koordinaten des gesuchten Punktes über Tage.

Man stellt sich also mit dem Theodolit über den Ursprung des Koordinatensystems auf, bestimmt sich mit Hilfe des bekannten

Azimuts eines Signals die Nord-Süd-Richtung, lässt in dieser ein Signal einvisieren und misst in ihr die Länge $a$ ab. Sodann begibt man sich mit dem Instrument auf den so bestimmten Punkt, lässt die Richtung von 90° gegen den früheren Standpunkt einvisieren und trägt auf diese die Länge $b$ auf. Der so erhaltene Punkt ist die Oertung des gegebenen Punktes.

---

**Aufgabe 51.** Die Verbindungslinie zweier Punkte soll ihrer Länge und Lage nach bestimmt werden (zwei Punkte sollen durchschlägig gemacht werden).

**Erkl. 94.** Es ist:

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2$$
$$= l^2 \sin^2 z (\cos^2 w + \sin^2 w) + l^2 \cos^2 z$$
$$= l^2 \sin^2 z + l^2 \cos^2 z$$
$$= l^2 (\sin^2 z + \cos^2 z) = l^2$$

also:

$$l = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_A - z_A)^2}$$

**Auflösung.** Seien:

$$x_A,\ y_A,\ z_A$$
$$x_B,\ y_B,\ z_B$$

die gegebenen Punkte, so liefern die Gleichungen der Frage 168 zunächst durch Quadrieren (vergl. Erkl. 94) für die Länge ihrer Verbindungslinie den Ausdruck:

$$l = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

sodann ist:

$$\cos z = \frac{l}{z_B - z_A}$$

und

$$\sin w = \frac{y_B - y_A}{l \sin z}$$

womit die Aufgabe gelöst ist.

---

# XI. Die Lehre von der Ausfertigung der Pläne.
## (Situationszeichnen.)

## 1. Darstellung des Terrains.

**Frage 169.** Wie wird eine Terrain-Erhebung zeichnerisch dargestellt?

**Antwort.** Um eine Erhebung des Terrains zeichnerisch darzustellen, bedient man sich entweder der Schichtenlinien oder der Schraffierung.

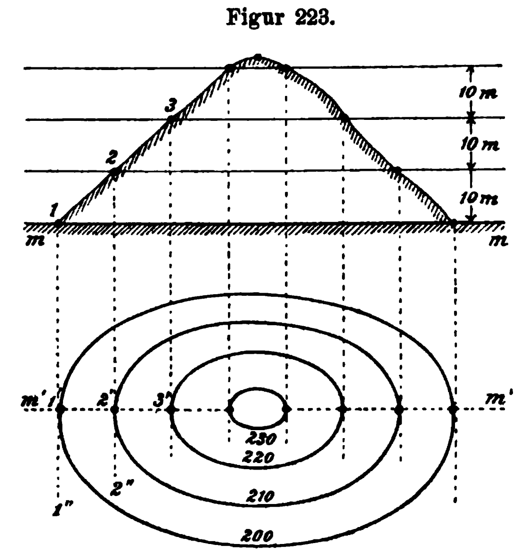
---

**Frage 170.** Wie werden die Schichtenlinien gezeichnet?

**Bemerkung.** Wie aus vorhandenen Schnittlinien umgekehrt Vertikalschnitte hergestellt werden, braucht wohl nicht speziell auseinandergesetzt zu werden.

**Antwort.** Um eine Bodenerhebung durch Schichtenlinien darzustellen, bildet man genügend viele Vertikalschnitte derselben in folgender Weise ab. Man zieht sich zunächst den Horizont $mm$ (vergl. Fig. 223) etwa in 0, 10, 20 ⋯ m Höhe, sodann wird der Vertikalschnitt durch in gleichen Abständen zum Horizont gezogene Parallelen

Figur 223.




zerschnitten, wodurch man die Punkte 1, 2, 3 ⋯ erhält.

Werden durch diese Senkrechte 11″, 22″ ⋯ gegen den Horizont gezogen, so erhält man eine Reihe von Tangenten an jene Schichtenlinien, welche den Profilschnitten entsprechen. Dem Profil selbst entspricht in der horizontalen Darstellung die Gerade $m'm'$, und ihre Schnittpunkte mit den obenerwähnten Tangenten 1′, 2′, 3′ sind Punkte (und zwar Berührungspunkte der jeweiligen Tangenten) der Schichtenkurven.

Indem man die Konstruktion für mehrere Vertikalschnitte ausführt, gelangt man zu einem mehr und mehr entsprechendem Bilde der Schichtenlinien.

**Frage 171.** Wie wird eine Bodenerhebung durch Schraffierung dargestellt?

**Antwort.** Um eine Bodenerhebung durch Schraffierung darzustellen (Lehmannsche Manier), wird der Raum zwischen zwei Schichtenlinien mit Strichen ausgefüllt, die senkrecht auf die Schichtenlinien und um so stärker und zusammengedrängter gezeichnet werden, je grösser die Neigung der Bergfläche gegen den Horizont ist.

In dieser Manier ist die Figur 224 gezeichnet.

Die Schraffierung setzt also die Kenntnis der Schichtenlinien voraus.

Im allgemeinen gilt für das Verhältnis von schwarz zu weiss die Gleichung:

$$\varphi^0 : 45^0 - \varphi^0$$

wenn nur Flächen bis 45° Neigung dargestellt werden. Wollte man Flächen bis 90° Neigung darstellen, so hätte man:

$$\varphi^0 : 90^0 - \varphi^0$$

In diesem Falle wäre also für eine Neigung von 30°, also $\varphi = 30^0$:

$$\varphi^0 : 90^0 - \varphi^0 = 30^0 : 60^0 = 1 : 2$$

also müsste das Verhältnis von schwarz zu weiss 1 : 2 sein. In der Regel pflegt man aber Neigungen, die grösser als 45° sind, ganz schwarz zu zeichnen, weil sonst die Unterschiede in der Zeichnung schwer erkennbar sind.

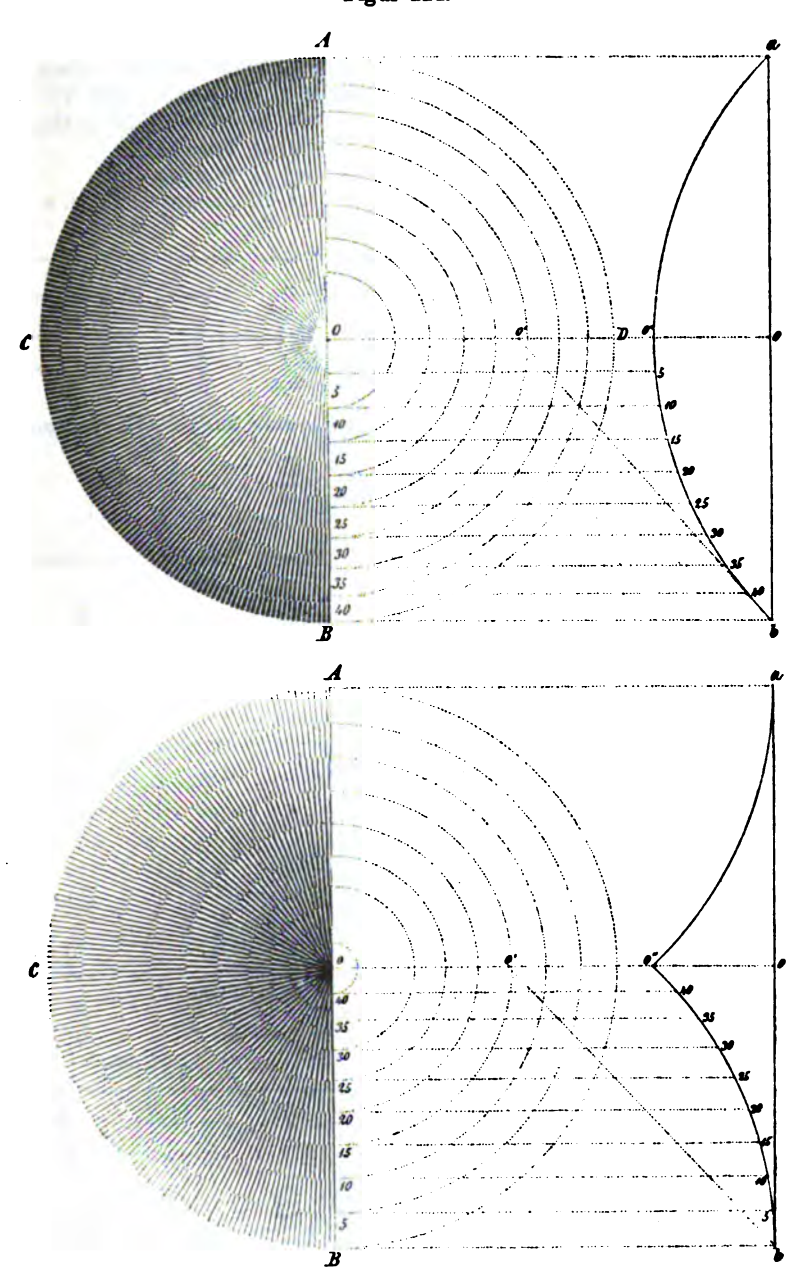
Statt der Schraffierung pflegt man auch verschieden abgestufte braune Farben zu verwenden, was indessen nur dort zu empfehlen ist, wo grosse Flächen darzustellen

**Bemerkung.** Das militärgeographische Institut in Wien benützt nachstehende Darstellungsarten:

| Es verhält sich bei einer Neigung von | Schwarz zu weiss wie |
|---|---|
| 5° | 1 : 9 |
| 10° | 2 : 8 |
| 15° | 3 : 7 |
| 20° | 4 : 6 |
| 25° | 5 : 5 |
| 30° | 6 : 4 |
| 35° | 7 : 3 |
| 40° | 8 : 2 |
| 45° | 9 : 1 |

sind, wo also die Schraffierung unschön ausfallen und die Schichtenlinien nicht anschaulich genug hervortreten würden.

Figur 224.



## 2. Darstellung von Boden und Kultur.

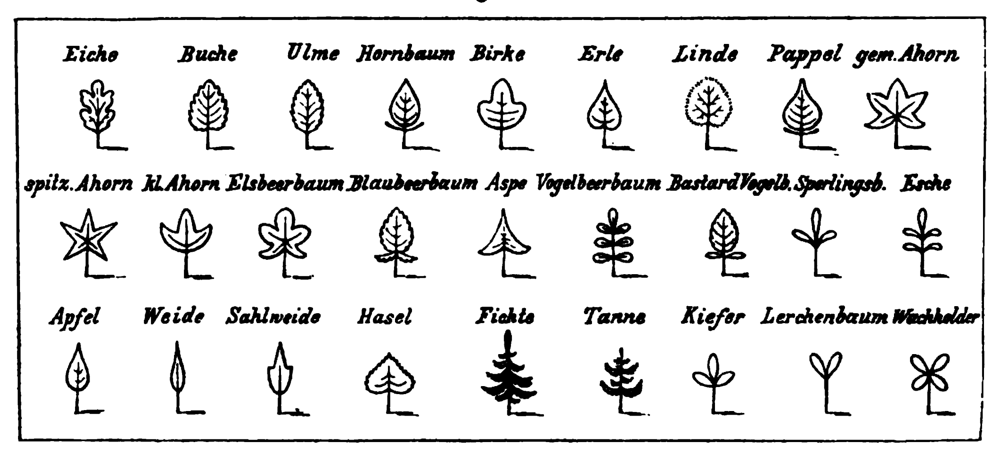
**Frage 172.** Wie werden die Gewächse in den Plänen dargestellt?

**Bemerkung.** Die Figuren 225, 226 und 227 bedürfen wohl keiner Erklärung. Sie gelten sämtlich für kolorierte und unkolorierte Pläne.

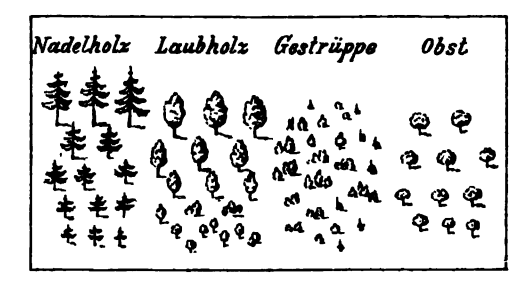
**Antwort.** Sollen Gewächse in den Plänen zur Darstellung gelangen, so gilt als Grundsatz, dieselben so abzubilden, dass sie sofort erkannt werden können. Weitere Anmerkungen können durch Anfangsbuchstaben erfolgen z. B. (vergl. Figur 227):

*H. H.* (Hoch-Holz) schlagbar,
*M. H.* Mittel-Holz,
*St. H.* Stangen-Holz,
*J. H.* Junges Holz, u. s. w.

Figur 225.




Figur 226.



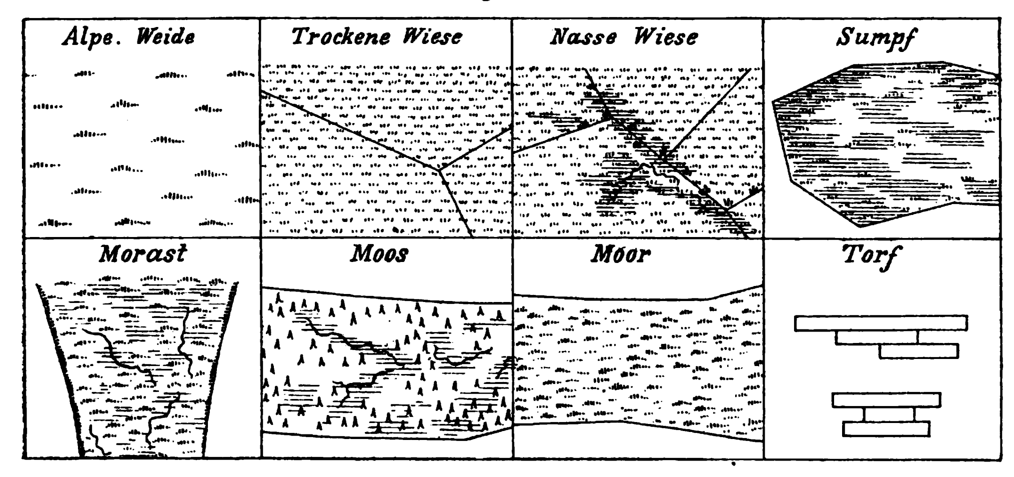

Figur 227.

Nadelholz Laubholz

**Frage 173.** Wie werden die Bodenarten in den Plänen dargestellt?

**Antwort.** Um Bodenarten in den Plänen darzustellen bedient man sich entweder geeigneter Zeichnungen (vergl. Fig. 228) oder man deutet die Bodenverschiedenheit durch Farben an.

Figur 228.




Die Felder bleiben sowohl bei farbigen als auch gefärbten Plänen weiss, für die übrigen Bodenarten gelten nachstehende Farben:

1) Wiesen hellgrün (Grünspan mit Gummigutt).
2) Heiden und Oedungen blassgelb (Gummigutt).
3) Wege lichtbraun (Sepia mit Terra di Siena), die Begrenzungen der Wege werden mit Sepia allein ausgezogen.
4) Felsen braun (Sepia, in mehreren Abstufungen aufzutragen).
5) Gärten saftgrün (Grünspan mit etwas Berliner Blau).
6) Weingärten blaurot (Karmin, sehr schwach gehalten mit etwas Terra di Siena)
7) Hopfengärten schwach rotbraun (Terra di Siena, schwach gehalten).
8) Wasser blau (Berliner Blau).
9) Brücken a) von Holz rötlichbraun (Terra di Siena mit Gummigutt),
   b) von Stein rotgelb (Karmin, mittelstark),
   c) von Eisen grünblau (Gummigutt mit sehr viel Berliner Blau).
10) Gebäude a) von Holz gelb (Gummigutt, nicht zu schwach),
   b) von Stein rot (Karmin, mittelstark).

**Frage 174.** Wie werden sonstige Gegenstände (z. B. Monumente, Kreuze, Wegweiser, Marksteine etc.) gezeichnet?

**Bemerkung.** Die näheren Bestimmungen findet man in dem amtlichen Werke:

Bestimmungen über die Anwendung gleichmässiger Signaturen für topographische und geometrische Pläne und Risse. Berlin, 1888.

**Antwort.** Die sonstigen Gegenstände, die man in die Pläne einzeichnen will, werden so gezeichnet, dass sie sofort als solche erkennbar werden, und dass das Bild der Natur möglichst entspricht.

# General-Register.

Die römischen Ziffern bezeichnen den Teil, die arabischen die Seite.

**T.**



**U.**



**V.**



**W.**



**Z.**





**Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.**

**Der ausführliche Prospekt und das ausführliche Inhaltsverzeichnis der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung gratis und portofrei bezogen werden.**

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist **aufgeschnitten** und gut brochiert, um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). **Jedes Kapitel** enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft.

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

---

☛ Das **vollständige**

# Inhaltsverzeichnis

## der bis jetzt erschienenen Hefte

kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

---

**Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.**

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.




Eng 498.94
Lehrbuch der vermessungskunde, geod
Cabot Science 005890411
3 2044 091 993 634